18498

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

KÖNIGL. PR. REGIERUNG ZU POTSDAM

Drei und vierzigster Band.

In vier Heften.

Mit neun lithographirten Tafeln.

Berlin, 1852.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier), Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des drei und vierzigsten Bandes, nach den Gegenständen.

I. Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
1.	Sur les coefficients du développement du produit $1.\quad (1+x)(1+2x)\ldots(1+(n-1)x)$ suivant les puissances ascendantes de x. Par Mr. *Schlaeffli*, professeur à l'université de Bern.	I.	1
2.	Über das Minimum des Integrals $\int\sqrt{(dx_1^2+dx_2^2\ldots+dx_n^2)}$, wenn die Variabeln $x_1, x_2, \ldots. x_n$ durch eine Gleichung zweiten Grades gegenseitig von einander abhängig sind. Von Herrn Dr. *Schlaeffli*, Privatdocent an der Universität zu Bern.	I.	23
3.	Eine eigenthümliche Eliminations-Rechnung. Vom Herausgeber.	I.	37
4.	Über die Reste, welche bei der Anwendung des *Sturm*schen Satzes vorkommen. Von dem Herrn Dr. *Heilermann* zu Cöln.	I.	43
5.	Mémoire sur les fonctions arbitraires exprimées par des intégrales doubles, et de séries de quantités périodiques. Par Mr. *A. Meyer*, prof. de math. à Liège.	I.	60
6.	Summirung einiger Reihen, vermittelt durch die Entwicklung der Potenz $(1-ax-cx^2)^{-m}$. Von dem Herrn Dr. *Dienger* zu Sinsheim bei Heidelberg.	I.	88
12.	Über die Factorielle $\left(\frac{m}{k}\right)=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-k+1)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ \ldots.\ \ k}$, in welcher die Basis m eine complexe Zahl von der Form $p+qi$ und i die imaginäre Einheit ist, p und q aber reelle Zahlen bezeichnen; desgleichen über einige bestimmte Integrale, die mit derselben im Zusammenhang stehen. Von Herrn Prof. Dr. *Raabe* zu Zürich. (Aus einer Jubelschrift der dortigen naturforschenden Gesellschaft.)	IV.	283

2. Geometrie.

7.	De curva quarti ordinis sphaerica, de Circulari scalena. Auctore Dr. *Chr. Gudermann*, math. prof. ord. Monast. Guestph.	II.	93
11.	Beitrag zur Lehre von den geometrischen Verwandtschaften. Von dem Herrn Dr. phil. *Swellengrebel* zu Utrecht.	II.	245
13.	Fundamenta Trigonometriae sphaeroïdicae exacta; imprimis de lineis brevissimis, vulgo dictis geodaeticis, in superficie sphaeroïdica. Auctore Dr. *Chr. Gudermann*, math. prof. ord. Monast. Guestph.	IV.	294

Nr. der Abhandlung.		Heft. Seite.
	3. Mechanik.	
8.	Über die drehende Bewegung der festen Körper um ihre Schwerpuncte. Von dem Herrn Prof. Dr. *Gudermann* zu Münster.	II. 114
9.	Mémoire de mécanique, relatif au mouvement de rotation et au mouvement naissant des corps solides. Par Mr. *Steichen,* professeur à l'école militaire de Bruxelles.	II. 161
10.	Suite de No. 9.	III. 185
	II. Angewandte Mathematik.	
14.	Über Torsionswiderstand und Torsionsfestigkeit. Von Herrn Dr. *E. Segnitz* zu Eldena.	IV. 340
15.	Über das Gesetz der Symmetrie der Krystalle und die Anwendung dieses Gesetzes auf die Eintheilung der Krystalle in Systeme. Von dem Herrn Prof. Dr. *Möbius* zu Leipzig. (Aus den Berichten über die Verhandlungen der k. s. Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig von 1850.)	IV. 365
	Fac-simile der Handschrift von *C. G. J. Jacobi.*	III.
	- - - - - - *C. Gudermann.*	IV.

Anm. In dem Inhaltsverzeichnifs des 37ten Bandes ist die Überschrift der Abhandlung No. 15. „Über die Gesetze der Biegung elastischer fester Körper. Von Herrn *v. Heim,* Major in der Königl. Würtembergischen Artillerie." aus Versehen zu benennen vergessen, und eben so in dem nach den Inhaltsverzeichnissen der einzelnen Bände aufgestellten, dem 40ten Bande beigegebenen Inhaltsverzeichnissen der vierten zehn Bände des Journals, unter dem Namen *v. Heim.* Die Abhandlung bekommt daselbst, S. 370, und dann S. 385 unter 3. Mechanik, *A.* Statik und Dynamik, jetzt die Nummer 831 *a.*

1.

Sur les coëfficients du développement du produit $1.\ (1+x)(1+2x)\ldots(1+(n-1)x)$ suivant les puissances ascendantes de x.

(Par Mr. *Schlaeffli*, professeur à Université de Berne.)

1.

Je commence par définir le produit $1.(1+x)(1+2x)..(1+(n-1)x)$ avec la plus grande latitude possible. En le désignant par $\overset{n}{\Pi}(x)$, je remarque qu'il est suffisamment caracterisé par les deux conditions,

$$(1.) \qquad \overset{n}{\Pi}(x) = (1+(n-1)x)\overset{n-1}{\Pi}(x)\,,$$

$$(2.) \qquad \overset{0}{\Pi}(x) = 1\,,$$

dont la première exprime la loi générale de la formation de la fonction Π, et dont la seconde donne la valeur initiale pour le cas de $n = 0$.

Bornons-nous d'abord à considérer le cas où n est un nombre entier, positif ou négatif.

Si le nombre n est un entier positif, le dévoloppement du produit Π finira par le terme $n^{\text{ième}}$, affecté de x^{n-1}; pour $n = 1$, il se réduit au premier terme 1.

Pour $n = 0$, il y a déjà interruption dans la suite décroissante des nombres de termes. Car, alors, la valeur du produit Π étant égale à l'unité, le nombre des termes est le même que pour $n = 1$.

Quand le nombre n devient un entier négatif, on conclut successivement des deux conditions ci-dessus:

$$\overset{-1}{\Pi}(x) = \frac{1}{1-x}\,,\quad \overset{-2}{\Pi}(x) = \frac{1}{(1-x)(1-2x)}\,,\quad \overset{-3}{\Pi}(x) = \frac{1}{(1-x)(1-2x)(1-3x)}\,,\ \text{etc.}$$

Alors le développement du produit en question, suivant les puissances ascendantes de x, contiendra un nombre infini de termes. A cette occasion on remarquera que l'on a (n désignant un entier positif):

$$(3.) \qquad \overset{-n}{\Pi}(x) = \frac{1}{\overset{n+1}{\Pi}(-x)},$$

où la condition de la convergence du développement exige que la quantité x soit absolument moindre que la fraction $\frac{1}{n}$.

2.

Après ces considérations préalables nous posons:

$$(4.) \qquad \overset{n}{\Pi}(x) = 1 + \overset{n}{A}_1 x + \overset{n}{A}_2 x^2 + \overset{n}{A}_3 x^3 \ldots = \sum_{i=0} \overset{n}{A}_i x^i.$$

Pour $i = 0$, dans tous les cas, le coefficient $\overset{n}{A}_i$ devient égal à l'unité. Si n est un nombre entier et positif, différent de zéro, tous les coefficients $\overset{n}{A}_i$ dont l'indice inférieur i surpasse le nombre $n-1$, s'évanouissent. Pour $n = 0$, tous les coefficients $\overset{n}{A}_i$ dont l'indice inférieur surpasse zéro, disparaissent.

En multipliant les deux membres de l'équation précédente par $1+nx$, et en égalant séparément les termes affectés de la même puissance de x, il en résulte les conditions suivantes:

$$(5.) \qquad \begin{cases} \overset{n+1}{A}_1 = \overset{n}{A}_1 + n, \\ \overset{n+1}{A}_2 = \overset{n}{A}_2 + n\overset{n}{A}_1, \\ \overset{n+1}{A}_3 = \overset{n}{A}_3 + n\overset{n}{A}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overset{n+1}{A}_i = \overset{n}{A}_i + n\overset{n}{A}_{i-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On en tire successivement:

$$\overset{n}{A}_1 = \binom{n}{2},$$

$$\overset{n}{A}_2 = -\binom{n}{3} + 3\binom{n+1}{4},$$

$$\overset{n}{A}_3 = \binom{n}{4} - 10\binom{n+1}{5} + 15\binom{n+2}{6},$$

$$\overset{n}{A}_4 = -\binom{n}{5} + 25\binom{n+1}{6} - 105\binom{n+2}{7} + 105\binom{n+3}{8},$$

$$\overset{n}{A}_5 = \binom{n}{6} - 56\binom{n+1}{7} + 490\binom{n+2}{8} - 1260\binom{n+3}{9} + 945\binom{n+4}{10}$$

$$\overset{n}{A}_6 = -\binom{n}{7} + 119\binom{n+1}{8} - 1918\binom{n+2}{9} + 9450\binom{n+3}{10} - 17325\binom{n+4}{11} + 10395\binom{n+5}{12}, \quad \text{etc.,}$$

où $\binom{n}{i} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-i+1)}{1.\ \ 2.\ \ 3\ \dots\dots\ i}$ désigne un nombre figuré. Par cette induction nous sommes conduits à essayer le développement suivant:

$$(6.)\quad \overset{n}{A}_i = (-1)^{i+1}\binom{n}{i+1} + (-1)^{i+2}\overset{i}{B}_1\binom{n+1}{i+2} \dots + (-1)^{i+\alpha+1}B_\alpha\binom{n+\alpha}{i+\alpha+1}\dots$$
$$\dots\dots + \overset{i}{B}_{i-1}\binom{n+i-1}{2i}.$$

En substituant les expressions analogues pour $\overset{n+1}{A}_i$ et $\overset{n}{A}_{i-1}$ dans l'équation $\overset{n+1}{A}_i - \overset{n}{A}_i - n\overset{n}{A}_{i-1} = 0$, et observant qu'on a

$$\binom{n+\alpha+1}{i+\alpha+1} - \binom{n+\alpha}{i+\alpha+1} = \binom{n+\alpha}{i+\alpha},$$

$$n\binom{n+\alpha}{i+\alpha} = (i+\alpha+i)\binom{n+\alpha+1}{i+\alpha+1} - (\alpha+1)\binom{n+\alpha}{i+\alpha},$$

elle se change en

$$(7.)\quad \left(\overset{i}{B}_0 - \overset{i-1}{B}_0\right)\binom{n}{i}(-1)^{i+1} + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=i-2}\left(\overset{i}{B}_\alpha - (\alpha+1)\overset{i-1}{B}_\alpha - (i+\alpha)\overset{i-1}{B}_{\alpha-1}\right)\binom{n+a}{i+a}(-1)^{i+\alpha+1}$$
$$+ \left(\overset{i}{B}_{i-1} - (2i-1)\overset{i-1}{B}_{i-2}\right)\binom{n+i-1}{2i-1} = 0.$$

Cette équation devant subsister quel que soit n, puisque les degrés des polynomes entiers relatifs à n, suivant lesquels elle est ordonnée, vont en augmentant, il faut que chaque terme s'évanouit séparément. Ainsi l'on a ce système d'équations:

$$(8.)\quad \begin{cases} \overset{i}{B}_0 = \overset{i-1}{B}_0 = 1, \\ \overset{i}{B}_1 = 2\overset{i-1}{B}_1 + i + 1, \\ \overset{i}{B}_2 = 3\overset{i-1}{B}_2 + (i+2)\overset{i-1}{B}_1, \\ \overset{i}{B}_3 = 4\overset{i-1}{B}_3 + (i+3)\overset{i-1}{B}_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \overset{i}{B}_\alpha = (\alpha+1)\overset{i-1}{B}_\alpha + (i+\alpha)\overset{i-1}{B}_{\alpha-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overset{i}{B}_{i-1} = * \quad (2i-1)\overset{i-1}{B}_{i-2}. \end{cases}$$

La dernière de ces relations nous apprend qu'on a toujours $\overset{i}{B}_i = 0$, ce qui nous fournira les valeurs initiales de B dans les intégrations que nous aurons successivement à faire par rapport au nombre i. L'intégration de la seconde équation (8) donne $\overset{i}{B}_1 = C.2_i - (i+3)$. Mais comme il doit être $\overset{1}{B}_1 = 0$, la constante C prend la valeur particulière **2.** Ainsi nous obtenons

$$\overset{i}{B}_1 = 2^{i+1} - (i+3).$$

Substituant cette valeur dans la troisième équation (8), et intégrant par rapport à i, on trouve

$$\overset{i}{B}_2 = C.3^i - (i+5)2^{i+1} + \tfrac{1}{2}(i+3)(i+4) + \tfrac{1}{2}\,.$$

Mais le second membre devant s'annuler pour $i = 2$, il en suit $C = \frac{9}{2}$. On a donc

$$\overset{i}{B}_2 = \tfrac{1}{2}.3^{i+2} - (i+5).2^{i+1} + \tfrac{1}{2}[(i+3)(i+4)+1]\,.$$

3.

Après ces préliminaires, généralisons le calcul, en posant

$$(9)\quad \overset{i}{B}_\alpha = \frac{1}{1.2.3\ldots\alpha}\Big\{(a+1)^{i+\alpha} - \binom{\alpha}{1}\overset{\alpha}{C}_1.\alpha^{i+\alpha-1}\ldots + (-1)^\beta\binom{\alpha}{\beta}\overset{\alpha}{C}_\beta.(\alpha-\beta+1)^{i+\alpha-\beta}\ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^\alpha.\overset{\alpha}{C}_\alpha.1^i\Big\}\,,$$

où $\overset{\alpha}{C}_\beta$ désigne un polynome entier par rapport à i, du degré indiqué par l'indice inférieur β. Si i sera remplacé par $i-1$ dans ce polynome, nous le désignerons par $\overset{\alpha}{C}{}^{(0)}_\beta$. En substituant la formule (g) dans l'équation générale (8), et en égalant séparément les termes qui sont affectés de la même quantité exponentielle par rapport à i, il résulte pour les polynomes entiers, les équations de condition suivantes:

$$(10.)\quad \begin{cases} \alpha\overset{\alpha}{C}_1 - (\alpha+1)\overset{\alpha}{C}{}^{(0)}_1 + i + \alpha = 0\,, \\ (\alpha-1)\overset{\alpha}{C}_2 - (\alpha+1)\overset{\alpha}{C}{}^{(0)}_2 + 2(i+\alpha)\overset{\alpha-1}{C}{}^{(0)}_1 = 0\,, \\ (\alpha-2)\overset{\alpha}{C}_3 - (\alpha+1)\overset{\alpha}{C}{}^{(0)}_3 + 3(i+\alpha)\overset{\alpha-1}{C}{}^{(0)}_2 = 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\alpha-\beta+1)\overset{\alpha}{C}_\beta - (\alpha+1)\overset{\alpha}{C}{}^{(0)}_\beta + \beta(i+\alpha)\overset{\alpha-1}{C}{}^{(0)}_{\beta-1} = 0\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

La condition, pour que les quantités C soient des polynomes entiers en i, suffit pour détruire toute incertitude par rapport aux intégrations à faire. On trouve successivement:

$$\overset{\alpha}{C}_1 = i+2\alpha+1\,,$$

$$\overset{\alpha}{C}_2 = (i+2\alpha)(i+2\alpha-1) + \alpha-1\,,$$

$$\overset{\alpha}{C}_3 = (i+2\alpha-1)(i+2\alpha-2)(i+2\alpha-3) + (\alpha-2)\{3(i+2\alpha-2)+1\}\,,$$

$$\overset{\alpha}{C}_4 = (i+2\alpha-2)(i+2\alpha+3)(i+2\alpha-4)(i+2\alpha-5) + (\alpha-3)\{6(i+2\alpha-3)(i+2\alpha-4)$$
$$+4(i+2\alpha-4) + 3\alpha - 7\}\,,$$

$$\overset{a}{C}_5 = (i+2\alpha-3)(i+2\alpha-4)(i+2\alpha-5)(i+2\alpha-6)(i+2\alpha-7)$$
$$+ (\alpha-4)\{10(i+2\alpha-4)(i+2\alpha-5)(i+2\alpha-6)+10(i+2\alpha-5)(i+2\alpha-6)$$
$$+ 5(3\alpha-10)(i+2\alpha-6) + 25\alpha-94\},$$

et ainsi de suite.

4.

Pour obtenir des formules générales, je pose d'abord

$$(10,^b.) \qquad \overset{a}{C}_\beta = 1.2.3\ldots\beta\left\{\binom{i+2\alpha-\beta+2}{\beta} + (\alpha-\beta+1)\overset{a}{Q}_\beta\right\}.$$

Par là, l'équation de condition

$$(\alpha-\beta+1)\Delta.\overset{a}{C}{}^{(0)}_\beta - \beta\overset{a}{C}{}^{(0)}_\beta + \beta(i+\alpha)\overset{a-1}{C}{}^{(0)}_{\beta-1} = 0,$$

où j'ai mis $\Delta\overset{a}{C}{}^{(0)}_\beta$ au lieu de $\overset{a}{C}_\beta - \overset{a}{C}{}^{(0)}_\beta$, se changera en celle-ci:

$$(11.) \quad \binom{i+2\alpha-\beta}{\beta-2} + (\alpha-\beta+1).\Delta\overset{a}{Q}{}^{(0)}_\beta - \beta\overset{a}{Q}{}^{(0)}_\beta + (i+\alpha)\overset{a-1}{Q}{}^{(0)}_{\beta-1} = 0.$$

Puis, en introduisant des nouveaux coefficients indéterminés $\overset{u}{D}_\gamma$, indépendants de i, qui doivent être regardés comme fonctions de $\alpha-\beta+1=u$, de manière à ne pas changer de valeur, si α et β sont remplacés à la fois par $\alpha-1$, $\beta-1$, j'essaye le développement

$$(12.) \qquad \overset{a}{Q} = \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\beta-2} \frac{\overset{u}{D}_\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)}\binom{i+2\alpha-\beta-\gamma+1}{\beta-2-\gamma},$$

d'où vient

$$\Delta.\overset{a}{Q}{}^{(0)}_\beta = \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\beta-3} \frac{\overset{u}{D}_\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)}\binom{i+2\alpha-\beta-\gamma}{\beta-\gamma-3} = \sum_{\gamma-1}^{\gamma=\beta-2} \frac{\overset{u}{D}_{\gamma-1}}{\gamma(\gamma+1)}\binom{i+2\alpha-\beta-\gamma+1}{\beta-\gamma-2},$$

et comme on a

$$\binom{n-\gamma+1}{i-\gamma} = \sum_{\delta=\gamma}^{\delta=i}\binom{n-\delta}{i-\delta},$$

cette expression se change en

$$\sum_{\gamma=1}^{\gamma=\beta-2}\sum_{\delta=\gamma}^{\delta=\beta-2}\frac{\overset{u}{D}_{\gamma-1}}{\gamma(\gamma+1)}\binom{i+2\alpha-\beta-\delta}{\beta-\delta-2} = \sum_{\delta=1}^{\delta=\beta-2}\left(\sum_{\gamma=1}^{\gamma=\delta}\frac{\overset{u}{D}_{\gamma-1}}{\gamma(\gamma+1)}\right)\binom{i+2\alpha-\beta-\delta}{\beta-\delta-2}.$$

Ainsi on a, en permutant les indices,

$$(a) \quad \Delta.\overset{a}{Q}{}^{(0)}_\beta = \sum_{\gamma=1}^{\gamma=\beta-2}\left(\frac{\overset{u}{D}_0}{1\cdot2}+\frac{\overset{u}{D}_1}{2\cdot3}+\frac{\overset{u}{D}_2}{3\cdot4}\ldots+\frac{\overset{u}{D}_{\gamma-1}}{\gamma(\gamma+1)}\right)\binom{i+2\alpha-\beta-\gamma}{\beta-\gamma-2}.$$

On a de plus, en vertu de (12):

$$(b) \quad \overset{a}{Q}{}^{(0)}_\beta = \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\beta-2}\frac{\overset{u}{D}_\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)}\binom{i+2a-\beta-\gamma}{\beta-\gamma-2}.$$

et pareillement

$$\overset{a-1}{Q}{}^{(0)}_{\beta-1} = \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\beta-3}\frac{\overset{u}{D}_\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)}\binom{i+2\alpha-\beta-\gamma-1}{\beta-\gamma-3},$$

$$(i+\alpha)\overset{\alpha-1}{Q}{}^{(0)}_{\beta-1} = \sum_{\gamma=0}^{\gamma-\beta-2}(\beta-\gamma-2)\frac{\overset{u}{D}_\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)}\binom{i+2\alpha-\beta-\gamma}{\beta-\gamma-2}$$

$$-\sum_{\gamma=0}^{\gamma=\beta-3}(\alpha-\beta-\gamma)\frac{\overset{u}{D}_\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)}\binom{i+2\alpha-\beta-\gamma-1}{\beta-\gamma-3},$$

et en remplaçant dans la dernière somme γ par $\gamma-1$,

$$(c)\qquad (i+\alpha)\overset{\alpha-1}{Q}{}^{(0)}_{\beta-1} = \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\beta-2}(\beta-\gamma-2)\frac{\overset{u}{D}_\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)}\binom{i+2\alpha-\beta-\gamma}{\beta-\gamma-2}$$

$$-\sum_{\gamma=1}^{\gamma=\beta-2}(\alpha-\beta-\gamma+1)\frac{\overset{u}{D}_{\gamma-1}}{(\gamma+1)\gamma}\binom{i+2\alpha-\beta-\gamma}{\beta-\gamma-2}.$$

A l'aide des expressions (a, b, c), que nous venons d'obtenir, l'équation **(11)** se changera en celle-ci:

$$(12.)\qquad \left(1-\overset{u}{D}_0\right)\binom{i+2\alpha-\beta}{\beta-2}+\sum_{\gamma=1}^{\gamma=\beta-2}\left(-\frac{\overset{u}{D}_\gamma}{\gamma+1}+\frac{\overset{u}{D}_{\gamma=1}}{\gamma+1}+(\alpha-\beta+1)\left(\frac{\overset{u}{D}_0}{1\cdot 2}+\frac{\overset{u}{D}_1}{2\cdot 3}\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdots+\frac{\overset{u}{D}_{\gamma-2}}{(\gamma-1)\gamma}\right)\right)\binom{i+2\alpha-\beta-\gamma}{\beta-\gamma-2}=0.$$

Comme cette équation doite être satisfaite quelle que soit la valeur du nombre entier et positif i, les polynomes entiers en i étant tous de degrés différents, il faut qu'on ait séparément:

$$(13.)\qquad \begin{cases} \overset{u}{D}_0 = 1, \\ \overset{u}{D}_1 = \overset{u}{D}_0, \\ \overset{u}{D}_2 = \overset{u}{D}_1 + 3u\cdot\frac{\overset{u}{D}_0}{1\cdot 2}, \\ \overset{u}{D}_3 = \overset{u}{D}_2 + 4u\left(\frac{\overset{u}{D}_0}{1\cdot 2}+\frac{\overset{u}{D}_1}{2\cdot 3}\right), \\ \overset{u}{D}_4 = \overset{u}{D}_3 + 5u\left(\frac{\overset{u}{D}_0}{1\cdot 2}+\frac{\overset{u}{D}_1}{2\cdot 3}+\frac{\overset{u}{D}_2}{3\cdot 4}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \overset{u}{D}_\gamma = \overset{u}{D}_{\gamma-1} + (\gamma+1)u\left(\frac{\overset{u}{D}_0}{1\cdot 2}+\frac{\overset{u}{D}_1}{2\cdot 3}+\frac{\overset{u}{D}_2}{3\cdot 4}\cdots+\frac{\overset{u}{D}_{\gamma-2}}{(\gamma-1)\gamma}\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Voici les premières valeurs successives de la fonction D qui en suivent:

$$\overset{u}{D}_0 = 1\,,$$
$$\overset{u}{D}_1 = 1\,,$$
$$\overset{u}{D}_2 = 1+\frac{2}{3}u\,,$$
$$\overset{u}{D}_3 = 1+\frac{25}{6}u\,,$$
$$\overset{u}{D}_4 = 1+\frac{95}{12}u+\frac{5}{8}u^2\,,$$
$$\overset{u}{D}_5 = 1+\frac{763}{60}u+\frac{21}{8}u^2\,,$$
$$\overset{u}{D}_6 = 1+\frac{371}{10}u+\frac{245}{36}u^2+\frac{7}{48}u^3\,,$$
$$\overset{u}{D}_7 = 1+\frac{3557}{140}u+\frac{2521}{180}u^2+\frac{13}{16}u^3\,,$$
$$\overset{u}{D}_8 = 1+\frac{9319}{280}u+\frac{7225}{288}u^2+\frac{85}{32}u_3+\frac{3}{128}u_4,$$

et ainse de suite.

$$\frac{\overset{u}{D}_0}{1\cdot 2}+\frac{\overset{u}{D}_1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3}\,,$$
$$\frac{\overset{u}{D}_0}{1\cdot 2}+\frac{\overset{u}{D}_1}{2\cdot 3}+\frac{\overset{u}{D}_2}{3\cdot 4} = \frac{3}{4}+\frac{1}{8}u\,,$$
$$\frac{\overset{u}{D}_0}{1\cdot 2}..+\frac{\overset{u}{D}_3}{4\cdot 5} = \frac{4}{5}+\frac{1}{3}u\,,$$
$$\frac{\overset{u}{D}_0}{1\cdot 2}..+\frac{\overset{u}{D}_4}{5\cdot 6} = \frac{5}{6}+\frac{43}{72}u+\frac{1}{48}u^2,$$
$$\frac{\overset{u}{D}_0}{1\cdot 2}..+\frac{\overset{u}{D}_5}{6\cdot 7} = \frac{6}{7}+\frac{9}{10}u+\frac{1}{12}u^2,$$
$$\frac{\overset{u}{D}_0}{1\cdot 2}..+\frac{\overset{u}{D}_6}{7\cdot 8} = \frac{7}{8}+\frac{197}{160}u+\frac{59}{288}u^2+\frac{1}{384}u_3,$$

etc,

5.

Il s'agit maintenant d'exprimer $\overset{u}{D}_\gamma$ comme polynome entier en u. A ce but je pose

$$(14.)\qquad \overset{u}{D}_\gamma = \overset{\gamma}{E}_0+\overset{\gamma}{E}_1 u+\overset{\gamma}{E}_2 u^2+\overset{\gamma}{E}_3 u_3\ldots+\overset{\gamma}{E}_\delta u^\delta \ldots.,$$

où la dernière valeur de δ sera $\frac{1}{2}\gamma$ ou $\frac{1}{2}(\gamma-1)$, selon que le nombre γ est pair ou impair. Cette formule, substituée dans l'équation générale **(13)**, donne (puisque le coefficient de chaque puissance de u doit s'évanouir séparément,) l'équation suivante, où l'on a changé γ en $\gamma+1$:

$$(15.)\qquad \Delta.\overset{\gamma}{E}_\delta = (\gamma+2)\left\{\frac{\overset{0}{E}_{\delta-1}}{1\cdot 2}+\frac{\overset{1}{E}_{\delta-1}}{2\cdot 3}\ldots+\frac{\overset{\gamma-1}{E}_{\delta-1}}{\gamma(\gamma+1)}\right\}.$$

Dabord on a $\overset{\gamma}{E}_0 = 1$. De là on tire par des intégrations successives:

$$\overset{\gamma}{E}_1 = \binom{\gamma+1}{2}-\int\frac{1}{\gamma}\,,\qquad \overset{\gamma}{E}_2 = \binom{\gamma+2}{3}-\binom{\gamma+1}{2}\int\frac{1}{\gamma}+\int\frac{1}{\gamma}\int\frac{1}{\gamma-1}\,,$$

où les symboles $\int$ désignent des sommes des séries qui finissent par les termes mêmes qui y sont écrits dessous. Comme ce calcul (continué de la même manière, à cause des intégrations nombreuses et compliquées qu'il entraîne) devient assez pénible, je me dispense de l'exposer ici. Mais heureusement la forme générale

de l'expression de $\overset{\gamma}{E}_\varrho$, à deviner par induction, des premiers résultats ci-dessus, est telle qu'elle permet de mettre en dehors, dans l'expression de $\overset{u}{D}_\gamma$, un facteur qui, à lui seul, donne naissance à ces fonctions transcendantes $\int\frac{1}{\gamma}$, $\int\frac{1}{\gamma}\int\frac{1}{\gamma-1}$, etc., qui sont les causes principales des difficultés du calcul éprouvées jusqu' ici. En effet, en imaginant le développement

$$(16.)\ldots\ldots \left(1+\frac{z}{1}\right)\left(1+\frac{z}{2}\right)\left(1+\frac{z}{3}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{\gamma}\right) = 1+\overset{1}{S}_\gamma z+\overset{2}{S}_\gamma z^2\ldots+\overset{\gamma}{S}_\gamma z^\gamma,$$

on voit sans peine que les coefficients $\overset{1}{S}_\gamma$, $\overset{2}{S}_\gamma$, etc. sont précisément ces fonctions transcendantes: $\int\frac{1}{\gamma}$, $\int\frac{1}{\gamma}\int\frac{1}{\gamma-1}$, $\int\frac{1}{\gamma}\int\frac{1}{\gamma-1}\int\frac{1}{\gamma-2}$, etc. Donc, la forme vraisemblable de l'expression de $\overset{\gamma}{E}_\delta$ peut être écrite de la manière suivante:

$$(17.)\quad \overset{\gamma}{E}_\delta = \overset{\gamma}{F}_\delta - \overset{\gamma}{F}_{\delta-1}.\overset{1}{S}_\gamma + \overset{\gamma}{F}_{\delta-2}.\overset{2}{S}_\gamma \ldots + (-1)^{\delta-\varkappa}\overset{\gamma}{F}_\varkappa.\overset{\delta-\varkappa}{S}_\gamma \ldots + (-1)^\delta \overset{\gamma}{S}_\gamma.$$

Celle-ci, reportée dans l'équation (14) (si l'on a égard à l'équation (16)), la change en

$$(18.)\quad \overset{u}{D}_\gamma = \left(1-\frac{u}{1}\right)\left(1-\frac{u}{2}\right)\left(1-\frac{u}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{u}{\gamma}\right).(1+\overset{\gamma}{F}_1 u+\overset{\gamma}{F}_2 u^2+\ldots.),$$

où je ferai, pour abréger:

$$\left(1-\frac{u}{1}\right)\left(1-\frac{u}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{u}{\gamma}\right) = \Pi\left(1-\frac{u}{\gamma}\right), \text{ et } 1+\overset{\gamma}{F}_1 u+\overset{\gamma}{F}_2 u^2\ldots. = \overset{u}{\Phi}_\gamma.$$

Or, en désignant par Δ une différence qui se rapporte à un accroissement de γ, égal à l'unité, l'équation générale (13) peut être mise sous la forme

$$(19.)\quad \Delta.\frac{\Delta.\overset{u}{D}_\gamma}{\gamma+2} = u\,\frac{\overset{u}{D}_\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)}$$

ou bien, en vertu de l'équation (18.),

$$\Delta.\frac{\Delta.\overset{u}{\Phi}_\gamma\,\Pi\left(1-\frac{u}{\gamma}\right)}{\gamma+2} = u.\frac{\overset{u}{\Phi}_\gamma\Pi\left(1-\frac{u}{\gamma}\right)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}.$$

Mais on a

$$\Delta.\overset{u}{\Phi}_\gamma\,\Pi\left(1-\frac{u}{\gamma}\right) = \left\{\left(1-\frac{u}{\gamma+1}\right)\Delta\overset{u}{\Phi}_\gamma - u\frac{\overset{u}{\Phi}_\gamma}{\gamma+1}\right\}\Pi\left(1-\frac{u}{\gamma}\right).$$

Puis, si, pour abréger, on pose

$$(20.)\quad \left(1-\frac{u}{\gamma+1}\right)\frac{\Delta\overset{u}{\Phi}_\gamma}{\gamma+2} - u\frac{\overset{u}{\Phi}_\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)} = \overset{u}{\Psi}_\gamma,$$

on a de même:

$$\Delta.\overset{u}{\Psi}_\gamma\,\Pi\left(1-\frac{u}{\gamma}\right) = \left\{\left(1-\frac{u}{\gamma+1}\right)\Delta\overset{u}{\Psi}_\gamma - u\frac{\overset{u}{\Psi}_\gamma}{\gamma+1}\right\}\Pi\left(1-\frac{u}{\gamma}\right)$$

et de là, en vertu de l'équation (19)

$$\left(1-\frac{u}{\gamma+1}\right)\Delta\overset{u}{\psi}_\gamma - u\,\frac{\overset{u}{\Psi}_\gamma}{\gamma+1} = u\cdot\frac{\overset{u}{\Phi}_\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)}$$

Retranchant cette équation de celle (20), et chassant le facteur $1-\frac{u}{\gamma+1}$, il viendra l'expression

$$\frac{\Delta\,.\,\overset{u}{\Phi}_\gamma}{\gamma+2} = \overset{u}{\Psi}_\gamma + \Delta\,.\,\overset{u}{\Psi}_\gamma = \overset{u}{\Psi}_{\gamma+1}\,.$$

En la comparant avec l'équation (20), on obtiendra sans difficulté:

$$(21.)\quad \Delta\,.\,\frac{\Delta\cdot\overset{u}{\Phi}_\gamma}{\gamma+2} = u\,.\,\frac{\overset{u}{\Phi}_{\gamma+2}}{(\gamma+2)(\gamma+3)}\,,$$

parsuite

$$(22.)\quad \Delta\,.\,\frac{\Delta\,.\,\overset{\gamma}{F}_\delta}{\gamma+2} = \frac{\overset{\gamma+2}{F}_{\delta-1}}{(\gamma+2)(\gamma+3)}\,,$$

ou bien encore, si, dans les sommations à faire, on met le dernier terme de chaque somme sous le signe $\int$:

$$(23.)\quad \overset{\gamma}{F}_\delta = \int(\gamma+1)\int\frac{\overset{\gamma}{F}_{\delta-1}}{\gamma(\gamma+1)}\,,$$

où chaque somme commence par $\gamma = 1$. Or nous avons déja trouvé:

$$\overset{\gamma}{F}_0 = 1,\ \overset{\gamma}{F}_1 = \binom{\gamma+1}{2}\ ,\quad \overset{\gamma}{F}_2 = \binom{\gamma+2}{3}\,.$$

Il est donc à présumer que, généralement, $\overset{\gamma}{F}_\delta$ sera de la forme $\Sigma\,\overset{\delta}{a}_\varepsilon\binom{\gamma+\varepsilon-1}{\varepsilon}$, où ε désigne le nombre entier variable, auquel la somme indiquée par Σ se rapporte, et où, en même temps, $\overset{\delta}{a}_\varepsilon$ représente un coefficient numérique rationnel qui ne dépend que de ses deux indices δ et ε. Maintenant, pour que les calculs successifs, fondés sur la formule (23), réussissent, sans amener de nouveau des fonctions transcendantes, il faut que, à partir de $\delta = 1$, le polynome $\overset{\gamma}{F}_\delta$ soit divisible par $\gamma\,(\gamma+1)$; ce qui exige que dans la somme précédente la plus petite valeur de ε soit 2. Cette supposition qui sera vérifiée tout-à-l'heure, admise, nous avons

$$\frac{\overset{\gamma}{F}_{\delta-1}}{\gamma(\gamma+1)} = \Sigma\,\frac{\overset{\delta-1}{a}_\varepsilon}{(\varepsilon-1)\varepsilon}\binom{\gamma+\varepsilon-1}{\varepsilon-2}\,,$$

et de là:

$$\int\frac{\overset{\gamma}{F}_{\delta-1}}{\gamma(\gamma+1)} = \Sigma\,\frac{\overset{\delta-1}{a}_\varepsilon}{(\varepsilon-1)\varepsilon}\binom{\gamma+\varepsilon}{\varepsilon-1} - \Sigma\,\frac{\overset{\delta-1}{a}_\varepsilon}{\varepsilon-1}\,,$$

puisque la sommation doit commencer par $\gamma = 1$. Cette équation, multipliée par $\gamma+1$, devient

$$(\gamma+1)\int \overset{\gamma}{F}_{\delta-1} = \Sigma \frac{\overset{\delta-1}{a_\varepsilon}}{\varepsilon-1}\binom{\gamma+\varepsilon}{\varepsilon} - \left(\Sigma \frac{\overset{\delta-1}{a_\varepsilon}}{\varepsilon-1}\right)\binom{\gamma+1}{1}.$$

L'intégration donne, en vertu de la formule (23):

$$\overset{\gamma}{F}_\delta = \Sigma \frac{\overset{\delta-1}{a_\varepsilon}}{\varepsilon-1}\left[\binom{\gamma+\varepsilon+1}{\varepsilon+1} - \binom{\gamma+2}{2}\right] = \Sigma \frac{\overset{\delta-1}{a_\varepsilon}}{\varepsilon-1}\left[\binom{\gamma+2}{3} + \binom{\gamma+3}{4} + \binom{\gamma+4}{5} \cdots + \binom{\gamma+\varepsilon}{\varepsilon+1}\right]$$

$$= \Sigma\left(\frac{\overset{\delta-1}{a_\varepsilon}}{\varepsilon-1} + \frac{\overset{\delta-1}{a_{\varepsilon+1}}}{\varepsilon} + \frac{\overset{\delta-1}{a_{\varepsilon+2}}}{\varepsilon+1} + \ldots\ldots\right)\binom{\gamma+\varepsilon}{\varepsilon+1}.$$

Cette somme, commençant par $\varepsilon = 2$, le plus bas nombre figuré qui s'y trouve, est $\binom{\gamma+2}{3}$, et par cette raison la supposition dont nous sommes partis, a été verifiée. En outre, on conclut de la présente formule que le degré du polynome $\overset{\gamma}{F}_\delta$ surpasse d'une unité celui du polynome $\overset{\gamma}{F}_{\delta-1}$. Donc, le nombre 2, marquant le degré de $\overset{\gamma}{F}_1$, celui de $\overset{\gamma}{F}_\delta$, sera $\delta+1$. Ainsi nous avons, à partir de $\delta = 1$ (cette valeur y comprise):

$$(24.)\quad \overset{\gamma}{F}_\delta = \overset{\delta}{a}_{\delta+1}\binom{\gamma+\delta}{\delta+1} + \overset{\delta}{a}_\delta\binom{\gamma+\delta-1}{\delta} \cdots\cdots + \overset{\delta}{a}_\varepsilon\binom{\gamma+\varepsilon-1}{\varepsilon} \cdots\cdots + \overset{\delta}{a}_\varepsilon\binom{\gamma+1}{2},$$

et en même temps

$$(25.)\quad \overset{\delta}{a}_\varepsilon = \frac{\overset{\delta-1}{a_{\varepsilon-1}}}{\varepsilon-2} + \frac{\overset{\delta-1}{a_\varepsilon}}{\varepsilon-1} + \frac{\overset{\delta-1}{a_{\varepsilon+1}}}{\varepsilon} \cdots\cdots + \frac{\overset{\delta-1}{a_{\delta-1}}}{\delta-2} + \frac{\overset{\delta-1}{a_\delta}}{\delta-1},$$

où il ne faut pas oublier que la dernière équation n'aura lieu que pour les valeurs de ε plus grandes que 2. Quant au coefficient $\overset{\delta}{a}_2$, sa valeur est 1, ou 0, selon que δ est égal à l'unité, ou plus grand. Pour $\varepsilon = \delta+1$, la série en (25) se réduit à son dernier terme

$$\overset{\delta}{a}_{\delta+1} = \frac{\overset{\delta-1}{a_\delta}}{\delta-1}.$$

Or on a $\overset{1}{a}_2 = 1$; il en suit donc

$$(26)\quad \overset{\delta}{a}_{\delta+1} = \frac{1}{1.\,2.\,3.\ldots\ldots(\delta-1)}.$$

Cela posé, je vais tirer de l'équation de récursion (25) une expression indépendante du coefficient $\overset{\delta}{a}_\varepsilon$. J'en trouve d'abord

$$\overset{\delta}{a}_\varepsilon - \overset{\delta}{a}_{\varepsilon+1} = \frac{\overset{\delta-1}{a_{\varepsilon-1}}}{\varepsilon-2}, \quad \text{ou} \quad \overset{\delta}{a}_\varepsilon - \frac{\overset{\delta-1}{a_{\varepsilon-1}}}{\varepsilon-2} = \overset{\delta}{a}_{\varepsilon+1}.$$

Puis, après avoir multiplié par $1.\,2.\,3.....(\varepsilon-2)$, j'introduis la nouvelle notation

$$(27.)\quad 1.\,2.\,3.\,.....\,(\varepsilon-2)\,.\,\overset{\delta}{a} = \overset{\delta-\varepsilon+1}{T}_{\varepsilon-2}\,,$$

et il vient

$$\overset{\delta-\varepsilon+1}{T}_{\varepsilon-2} - \overset{\delta-\varepsilon+1}{T}_{\varepsilon-3} = \frac{1}{\varepsilon-1}\,\overset{\delta-\varepsilon}{T}_{\varepsilon-1}\,,$$

ou, en mettant n et m au lieu de $\varepsilon-2$ et $\delta-\varepsilon$:

$$(28.)\quad \overset{m+1}{T}_n - \overset{m+1}{T}_{n-1} = \frac{1}{n+1}\,\overset{m}{T}_{n+1}\,.$$

Or ce qui a été dit ci-dessus à l'égard du coefficient $\overset{\delta}{a}_2$, nous apprend que $\overset{m}{T}_0$ est 1, ou 0, suivant que m est zéro, ou un entier plus grand. Donc, en intégrant:

$$(29.)\quad \overset{m+1}{T}_n = \frac{1}{2}\,\overset{m}{T}_2 + \frac{1}{3}\,\overset{m}{T}_3 + \frac{1}{4}\,\overset{m}{T}_4\,..... + \frac{1}{n+1}\,\overset{m}{T}_{n+1}.$$

D'ailleurs, la formule (26) montre que

$$(30.)\quad \overset{0}{T}_n = 1$$

pour $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ .....$ De cette valeur initiale on déduit successivement:

$$\overset{1}{T}_n = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\,..... + \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\,,$$

$$\overset{2}{T}_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)..... + \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\,..... \frac{1}{n+2}\right),$$

$$\overset{3}{T}_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\cdots+\frac{1}{4}.\frac{1}{5}\right).....+\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{2}\cdots+\frac{1}{n+2}.\frac{1}{n+3}\right),$$

et ainsi de suite; en sorte que $\overset{m}{T}_n$ représente une fonction transcendante de *l'argument n* (analogue à celle *S*, considérée plus haut), dont les deux indices m et n marquent, l'un l'ordre ou la dimension des produits, l'autre le nombre des termes dans la dernière sommation à faire. Désormais on pourra regarder $\overset{m}{T}_n$ comme une expression indépendante (et en vertu de l'équation (27) il en sera de même du coëfficient $\overset{\delta}{a}_\varepsilon$). Car elle est une espèce de somme de produits combinatoires de la $m^{\text{ième}}$ classe, formés des éléments fractionnaires $\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ .....\ \frac{1}{n+m-1},\ \frac{1}{n+m}$, et soumis à la condition que, *dans chaque produit, aucun de ses facteurs ne doit avoir son dénominateur plus grand, d'un nombre surpassant l'unité, que celui qui le précède immédiatement.*

Je reprendrai plus tard la discussion ultérieure de cette fonction remarquable $\overset{m}{T}_n$. Dans ce moment je vais reporter la valeur de $\overset{\delta}{a}_\varepsilon$, déterminée par les formules (27, 29, 30), dans l'expression de $\overset{u}{\Phi}_\gamma$ (18). En remplaçant ε

par $\varepsilon + 2$, la formule (24) se transforme, d'après la nouvelle notation, en celle-ci:

$$\overset{\gamma}{F}_\delta = \frac{\overset{0}{T}_{\delta-1}}{\Pi(\delta-1)}\binom{\gamma+\delta}{\delta+1} + \frac{\overset{1}{T}_{\delta-2}}{\Pi(\delta-2)}\binom{\gamma+\delta-1}{\delta} \cdots + \frac{\overset{\delta-1-\varepsilon}{T}_{\delta}}{\Pi(\varepsilon)}\binom{\gamma+\varepsilon+1}{\varepsilon+2} \cdots + \frac{\overset{\delta-1}{T}_{0}}{\Pi(0)}\binom{\gamma+1}{2},$$

où l'on a mis $\Pi(n)$ au lieu de $1.2.3 \ldots n$, et où $\Pi(0)$ est supposé égal à l'unité. (Il suit de là, en vertu de la formule (18):

$$(31.) \qquad \overset{u}{\Phi} = 1 + \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=\infty} \frac{1}{\Pi(\varepsilon)}\binom{\gamma+\varepsilon+1}{\varepsilon+2} u^{\varepsilon+1}\left(\overset{0}{T}_\varepsilon + \overset{1}{T}_\varepsilon u + \overset{2}{T}_\varepsilon u^2 + \overset{3}{T}_\varepsilon u^3 + \ldots\right).$$

La double somme que nous venons d'obtenir pour expression de $\overset{u}{\Phi}_\gamma$ et qui devrait être reportée dans celle de D_γ (18), a l'inconvénient d'être infinie et, ce qui est plus, de ne pas être convergente pour une valeur de u entière et positive. Sa réduction ultérieure dépend de la question, s'il est possible de faire subir à la série $\sum_{m=0}^{m=\infty} \overset{m}{T}_n u^m$ une transformation semblable à celle opérée sur la série analogue $\sum_{m=0}^{m=\infty} \overset{m}{S}_n z^m$ dans la formule (16).

J'observe d'abord que, abstraction faite de la condition primitive pour u, d'être un nombre entier, on peut toujours supposer u une fraction assez petite, pour que la série proposée soit convergente. Car le nombre des produits, compris dans l'aggrégat $\overset{m}{T}_n$, est certainement moindre que $(n+m-1)^m$, et comme aucun d'eux ne peut être plus grand que $\left(\frac{1}{2}\right)^m$, il en suit, *a fortiori*, que l'on a: $\overset{m}{T}_n < \left(\frac{n+m-1}{2}\right)^m$. Il suffit donc pour la convergence de la série en question, que u soit moindre que deux fois la valeur inverse de la base des logarithmes naturels.

Or j'avance que l'on a

$$(32.) \quad \sum_{m=0}^{m=\infty} \overset{m}{T}_n u^m = \frac{1}{\left(1-\frac{u}{1}\right)\left(1-\frac{u}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{u}{n+1}\right)}\left\{1 - \frac{\frac{1}{1}u}{1-\frac{u}{n+2}}\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{1}{1\cdot 2}u^2}{\left(1-\frac{u}{n+2}\right)\left(1-\frac{u}{n+3}\right)} - \frac{\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}u^3}{\left(1-\frac{u}{n+2}\right)\left(\frac{u}{n+3}\right)\left(\frac{u}{n+4}\right)} + \cdots\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \frac{\frac{1}{\Pi(k)}u^k}{\Pi\left(1-\frac{u}{n+k+1}\right)} = U_n.$$

D'abord il est aisé de prouver que, pour $n = 0$, le membre à droite que j'ai désigné par U_n, devient égal à **1**. Car on a

$$(-1)^k \frac{\frac{1}{\Pi(k)} u^k}{\Pi\left(1-\frac{u}{k+1}\right)} = (-1)^k \frac{\frac{1}{\Pi(k)} u^k}{\Pi\left(1-\frac{u}{k}\right)} + (-1)^k \frac{\frac{1}{\Pi(k+1)} u^{k+1}}{\Pi\left(1-\frac{u}{k+1}\right)}.$$

En variant k depuis $k = 0$ jusqu' à $k = \infty$, et prenant la somme, on obtient à gauche l'expression en question, et à droite l'unité.

Une décomposition semblable peut être effectuée dans le cas général. On a

$$(-1)^k \frac{\frac{1}{\Pi(k)} u^k}{\Pi\left(1-\frac{u}{n+k+1}\right)} = (-1)^k \frac{\frac{1}{\Pi(k)} u^k}{\Pi\left(1-\frac{u}{n+k}\right)} + (-1)^k \frac{\frac{1}{\Pi(k)} \frac{u^{k+1}}{n+k+1}}{\Pi\left(1-\frac{u}{n+k+1}\right)}.$$

En faisant successivement $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ jusqu'à l'infini, et prenant la somme, on obtient

$$U_n = U_{n-1} + u \cdot \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \frac{\frac{1}{\Pi(k)} \frac{u^k}{n+k+1}}{\Pi\left(1-\frac{u}{n+k+1}\right)}.$$

Or $\frac{1}{n+k+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \cdot \frac{k}{n+k+1}$. Donc la formule précédente se change en

$$U_n - U_{n-1} = \frac{u}{n+1} \left\{ U_n + u \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \frac{\frac{1}{\Pi(k)} \frac{u^k}{n+k+2}}{\Pi\left(1-\frac{u}{n+k+2}\right)} \right\},$$

où l'on a changé, dans la dernière somme, k en $k+1$. Comme l'expression dans les crochets vient du membre à droite de la formule précédente, par le seul changement de n en $n+1$, on obtient enfin

$$\textbf{(33.)} \quad U_n - U_{n-1} = \frac{u}{n+1} U_{n+1}.$$

C'est précisément l'équation qui résulterait de celle **(28)**, multipliée par u^{m+1}, et sommée, conjointement avec $1-1 = 0$, depuis $m = 0$ jusqu' à $m = \infty$, si U_n désignait la série $\Sigma \overset{m}{T}_n u^m$. Voilà ce qu'il fallait encore pour prouver la formule avancée plus haut **(32)**. En effet, la suite des équations

$$\textbf{(33}^{\text{a}}\textbf{.)} \quad U_0 = 1,$$

$$\textbf{(33}^{\text{b}}\textbf{.)} \begin{cases} U_1 - U_0 = \frac{u}{2} U_2, \\ U_2 - U_1 = \frac{u}{3} U_3, \\ U_3 - U_2 = \frac{u}{4} U_4, \quad \text{etc.,} \end{cases}$$

qui, suivant l'acception du signe de fontion U_n, resultent pareillement de l'une ou de l'autre des deux formules (28) et (32), suffit complètement pour déterminer d'une manière unique la fonction U_1 et les autres analogues qui en suivent. Ces équations se prêtent, en outre, à un développement en fraction continue. Car on a successivement

$$U_1 = \frac{1}{1-\frac{U_1-U_0}{U_1}} = \frac{1}{1-\frac{\frac{u}{2}U_2}{U_1}} = \frac{1}{1-\frac{\frac{u}{2}}{1-\frac{U_2-U_1}{U_2}}} = \frac{1}{1-\frac{\frac{u}{2}}{1-\frac{\frac{u}{3}U_3}{U_2}}} = \frac{1}{1-\frac{\frac{u}{2}}{1-\frac{\frac{u}{3}}{1-\frac{U_3-U_2}{U_3}}}}$$

et ainsi de suite. On peut donc exprimer la fonction U_1 par la fraction continue infinie:

$$(34.) \qquad U_1 = \cfrac{1}{1-\cfrac{\frac{u}{2}}{1-\cfrac{\frac{u}{3}}{1-\cfrac{\frac{u}{4}}{1-\cfrac{\frac{u}{5}}{1-\text{etc.}}}}}}$$

Or, la vérité de la formule (32) etant mise hors de doute, je vais la substituer dans la précédente (31). En rassemblant tous les termes en $\frac{u^m}{\Pi\left(1-\frac{u}{m}\right)}$, on trouve pour facteur de cette fonction la somme

$$(35.)\ (-1)^{m-1}\frac{1}{\Pi(0)\cdot\Pi(m-1)}\binom{\gamma+1}{2}\ldots\ldots+(-1)^{m-1-\varepsilon}\frac{1}{\Pi(\varepsilon)\Pi(m-1-\varepsilon)}\binom{\gamma+\varepsilon+1}{\varepsilon+2}\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{1}{\Pi(m-1)\cdot\Pi(0)}\binom{\gamma+m}{m+1}$$
$$=\frac{(-1)^{m+1}}{\Pi(m-1)}\left\{\binom{m-1}{m-1}\binom{-\gamma}{2}\ldots\ldots+\binom{m-1}{m-1-\varepsilon}\binom{-\gamma}{\varepsilon+2}\ldots\ldots+\binom{m-1}{0}\binom{-\gamma}{m+1}\right\}$$
$$=\frac{(-1)^{m+1}}{\Pi(m-1)}\cdot\binom{m-1-\gamma}{m+1}=\frac{1}{\Pi(m-1)}\binom{\gamma+1}{m+1}.$$

On a donc

$$(36.) \qquad \overset{u}{\Phi}_\gamma = 1+\sum_{m=1}^{m=\gamma}\frac{1}{\Pi(m-1)}\binom{\gamma+1}{m+1}\frac{u^m}{\Pi\left(1-\frac{u}{m}\right)},$$

ce qui change l'équation (18) en celle-ci, rationnelle et entière par rapport à u:

$$(37.)\quad \overset{u}{D}_\gamma = \left(1-\frac{u}{1}\right)\left(1-\frac{u}{2}\right).....\left(1-\frac{u}{\gamma}\right) + \sum_{m=1}^{m=\gamma} \frac{1}{\Pi(m-1)}\binom{\gamma+1}{m+1} u^m \left(1-\frac{u}{m+1}\right)\left(1-\frac{u}{m+2}\right).....\left(1-\frac{u}{\gamma}\right).$$

Si l'on se souvient de la remarque jointe à la formule (14), on verra que le degré du présent polynome qui paraît s'élever au nombre γ, n'est effectivement que $\frac{1}{2}\gamma$ ou $\frac{1}{2}(\gamma-1)$, selon que le nombre γ est pair ou impair. Voilà donc une proprieté intéressante de l'expression (37), savoir, que tous les termes, dont l'ordre excède celui de $u^{\frac{\gamma}{2}}$ ou $u^{\frac{\gamma-1}{2}}$, devront en disparaître. En désignant par $\overset{m,\gamma}{H}_p$ la somme des produits combinatoires de la $p^{\text{ième}}$ classe, formés des éléments $(m+1)$, $(m+2)$, ... γ sans répétition, la dite propriété donne la formule

$$\overset{0,\gamma}{H}_p + \sum_{m=1}^{m=\gamma}(-1)^m m\binom{\gamma+1}{m+1}\overset{m,\gamma}{H} = 0,$$

pourvu que p soit plus petit que $\frac{1}{2}\gamma$ ou $\frac{1}{2}(\gamma+1)$. D'ailleurs, $\overset{0\gamma}{H}_p$ est la même quantité que nous avons désigné auparavant par $\overset{\gamma+1}{A}_p$. J'observe encore, en passant que de (37) il suit pour $u=\gamma$: $\overset{\gamma}{D}_\gamma = \frac{\gamma^\gamma}{\Pi(\gamma-1)}$: formule qui peut être utile pour la vérification numérique des expressions de $\overset{u}{D}_\gamma$ calculées pour des valeurs déterminées de γ.

Bien que le raisonnement qui nous a conduit à l'équation (37), ne soit rigoureux qu'autant que u est une fraction assez petite, pour que toutes les transformées intermédiaires restent convergentes, néanmoins la liaison identique entre les équations de condition (13) et l'expression (37) entière et finie, une fois établie avec rigueur, subsiste sans restriction. Puisqu' il n' y a donc plus de raison qui nous empêche d'admettre la justesse de l'expression (37), même dans le cas primitif où $u=\alpha-\beta+1$ était un nombre entier et positif, nous pourrons la substituer sans hésiter dans les formules principales qui l'ont précédées, et dont voici le résumé, avec un léger changement de notation:

$$\overset{i}{B}_\alpha = \sum_{u=1}^{u=\alpha+1} \frac{(-1)^{\alpha-u+1}}{\Pi(u-1)} u^{i+u-1}\left\{\binom{i+\alpha+u+1}{\alpha-u+1} + u\sum_{\gamma=0}^{\gamma=\alpha-u-1}\frac{\overset{u}{D}_\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)}\binom{i+\alpha+u-\gamma}{\alpha-u-\gamma-1}\right\},$$

$$\overset{n}{A}_i = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=i-1}\overset{i}{B}_\alpha\binom{-n+i}{i+\alpha+1}.$$

On ne peut pas espérer de pousser plus loin les réductions des sommes multiples. Tout ce que nous avons pu obtenir, est d'avoir répresenté $\overset{n}{A}_i$ par une somme *quadruple,* tandis qu'elle paraissait d'abord être *sextuple.*

Je joins ici quelques remarques qui doivent nous dispenser de noter encore expressément les valeurs que prennent quelques quantités sommatoires dans certains cas limites, où leurs expressions paraissent insignifiantes. Une somme qui s'étend depuis $m = a$ jusqu' à $m = n$, s'évanouit pour $m = a-1$. De même, un produit qui s'étend depuis $m = a$ jusqu' à $m = n$, se réduit à l'unité, lorsqu'on y fait $m = a-1$. Cela bien saisi, la signification qu' il faut attacher à l'expression (37) de $\overset{u}{D}_\gamma$, lorsque γ est égal à zéro, n'est plus douteuse. Quant à la somme, s'étendant depuis $\gamma = 0$ jusqu' à $\gamma = \alpha-u-1$, qui se trouve dans l'expression de $\overset{i}{B}_\alpha$ entre les crochets, il faut observer qu'on peut en accroître la limite supérieure tant qu'on voudra, parceque tous les termes ultérieurs s'annulent. Donc la somme en question a zéro pour valeur, soit qu'on y fasse $u = \alpha$, ou $u = \alpha+1$.

Plus haut nous avons observé que $\overset{i}{B}_i$ s'évanouit, tant que i est un nombre entier, différent de zéro. (Le cas $i = 0$ en fait une exception; car on a généralement $\overset{i}{B}_0 = 1$.) Par cette raison on peut fixer la limite supérieure de la somme (expression de $\overset{n}{A}_i$) à $\alpha = i$; mais la formule ne s'applique de cette manière non plus au cas $i=0$. Du reste, il parait être très difficile, de donner une expression pour $\overset{n}{A}_i$ qui comprend la valeur particulière $\overset{n}{A}_0 = 1$.

En posant $\alpha = i$ dans l'expression précédente de $\overset{i}{B}_\alpha$, ce qu'on vient de dire, conduit à la proposition remarquable:

$$(38.)\quad 0 = \sum_{u=1}^{u=i+1} \frac{(-1)_{i-u+1}}{\Pi(u-1)} u^{i+u-1} \left\{ \binom{2i+u+1}{i-u+1} + u \sum_{\gamma=0}^{\gamma=\infty} \frac{\overset{u}{D}_\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)} \binom{2i+u-\gamma}{i-u-\gamma-1} \right\},$$

dont la démonstration directe serait très difficile.

Aussi celle de l'équation identique (32) paraît-elle offrir des difficultés insurmontables. Elle exigerait qu'on eût prouvé d'avance l'identité

$$(39.)\quad \Sigma \frac{(-1)^\varkappa}{\Pi(\varkappa)} \left(\frac{1}{2}\right)^\lambda \left(\frac{1}{3}\right)^\mu \cdots \left(\frac{1}{n+\varkappa}\right)^\psi \left(\frac{1}{n+\varkappa+1}\right)^\omega = \overset{m}{T}_n ,$$

où la somme à gauche doit s'étendre à toutes les valeurs entières et positives, zéro y compris, qu'on pourra donner aux exposants $\varkappa$, λ, μ, ... ψ, ω, sans que leur somme surpasse le nombre m.

7.

Je vais exposer encore quelques théorèmes remarquables sur les fonctions trancendantes $\overset{m}{T}_n$. En partant des trois équations suivantes qui renferment la définition:

$$\overset{0}{T}_n = 1\,, \quad \overset{m}{T}_n - \overset{m}{T}_{n-1} = \frac{1}{1+n}\overset{m-1}{T}_{n-1}\,, \quad \overset{m}{T}_0 = 0, [m > 0]$$

je mets d'abord l'équation générale sous la forme

$$\frac{\overset{m}{T}_n}{\Pi(n)} - \frac{\overset{m-1}{T}_{n+1}}{\Pi(n+1)} = \frac{\overset{m}{T}_{n-1}}{\Pi(n)}\,,$$

forme qui, par le changement de m en $m-n$, entre dans celle ci:

$$(40.) \quad \frac{\overset{m-n}{T}_n}{\Pi(n)} - \frac{\overset{m-n-1}{T}_{n+1}}{\Pi(n+1)} = \frac{\overset{m-n}{T}_{n-1}}{\Pi(n)}\,. \; [m > n]$$

On aura une suite d'équations pareilles, en y remplaçant successivement n par $n+1, n+2, n+3, \ldots\ldots m-2, m-1$. Si on les ajoute ensemble, après avoir changé $\frac{\overset{0}{T}_m}{\Pi(m)}$ en $\frac{\overset{0}{T}_{m-1}}{\Pi(m)}$, ce qui est permis, on trouvera

$$(41.) \quad \frac{\overset{m-n}{T}_n}{\Pi(k)} = \sum_{k=n}^{k=m} \frac{\overset{m-k}{T}_{k-1}}{\Pi(k)}\,, \; [m \geqq n > 0]$$

ce qui rentre dans la formule (25). En y mettant pour n successivement les valeurs $1, 2, 3, \ldots\ldots m-1, m$, et prennant la somme, on aura après une légère réduction:

$$\sum_{n=1}^{n=m} \frac{\overset{m-n}{T}_n}{\Pi(k)} = \sum_{k=0}^{k=m-1} \frac{\overset{m-k-1}{T}_k}{\Pi(k)}\,,$$

où le premier terme de la somme à droite est zéro, toutes les fois que $m-1$ est plus grand que zéro; et dans le cas de $m=1$, ce premier terme, auquel la somme se réduit alors, sera égal à l'unité. D'ailleurs, des deux membres de l'équation précédente, le premier se transformant dans le second par le simple changement de m en $m-1$, il en suit que sa valeur est indépendante du nombre m. On a donc, d'après ce qu'on vient de remarquer pour le cas de $m=1$, la formule générale

$$(42.) \quad \sum_{k=0}^{k=m} \frac{\overset{m-k}{T}}{\Pi(k)} = 1\,, \; [m \geqq 0]$$

comme on devait s'y attendre, vu que la formule (24) donne, pour le cas de $\gamma=1$,

$$\overset{1}{F}_\delta = \overset{\delta}{a}_{\delta+1} + \overset{\delta}{a}_\delta + \overset{\delta}{a}_{\delta-1} \cdots\cdots + \overset{\delta}{a}_3 + \overset{\delta}{a}_2\,,$$

et qu'en même temps on a $\overset{1}{F}_\delta = 1$. On aurait pu se servir plus haut de cette formule pour démontrer qu'il existe des valeurs de u assez petites pour que la série $\Sigma \overset{m}{T}_n u^m$ soit convergente. Car elle fait voir que $\overset{m}{T}_n < \Pi(n)$, et par conséquent que $\Sigma T_n u^m < \Pi(n) . \Sigma u^m = \frac{\Pi(n)}{1-u}$. Donc, si $u < 1$, la série $\Sigma \overset{m}{T}_n u^m$ est convergente.

Les deux équations suivantes sont comprises dans la formule de définition:

$$\frac{1}{\lambda+1}\overset{m-1}{T}_{\lambda+1} = \overset{m}{T}_{\lambda} - \overset{m}{T}_{\lambda-1},$$

$$\frac{1}{\lambda+1}\overset{n-1}{T}_{\lambda+1} = \overset{n}{T}_{\lambda} - \overset{n}{T}_{\lambda-1}.$$

Multiplions la première par $\overset{n}{T}_{\lambda}$, la seconde par $\overset{m}{T}_{\lambda}$, puis retranchons l'une de l'autre, et divisons le résultat par $\Pi(\lambda)$, il viendra après une simple transposition de termes:

$$(43.)\qquad \frac{\overset{m}{T}_{\lambda}\,\overset{n}{T}_{\lambda-1}}{\Pi(\lambda)} - \frac{\overset{m-1}{T}_{\lambda+1}\,\overset{n}{T}_{\lambda}}{\Pi(\lambda+1)} = \frac{\overset{m}{T}_{-1}\,\overset{n}{T}_{\lambda}}{\Pi(\lambda)} - \frac{\overset{m}{T}_{\lambda}\,\overset{n-1}{T}_{\lambda+1}}{\Pi(\lambda+1)}.$$

Pour intégrer cette équation de sorte que tous les termes à droite se détruisent mutuellement, sauf les deux extrèmes, changeons-y l'exposant n en $a+n-\lambda$ et sommons ensuite, depuis $\lambda = a$ jusqu'à $\lambda = a+n$; il viendra:

$$\sum_{\lambda=a}^{\lambda=a+n} \frac{\overset{m}{T}_{\lambda}\,\overset{a+n-\lambda}{T}_{\lambda-1}}{\Pi(\lambda)} - \sum_{\lambda=a}^{\lambda=a+n} \frac{\overset{m-1}{T}_{\lambda+1}\,\overset{a+n-\lambda}{T}_{\lambda}}{\Pi(\lambda+1)} = \frac{\overset{m}{T}_{a-1}\,\overset{n}{T}_{a}}{\Pi(a)}.$$

Si, dans la seconde somme, on change λ en $\lambda-1$, et que l'on retranche des deux membres la quantité $\frac{\overset{m-1}{T}_{a}\,\overset{n+1}{T}_{a-1}}{\Pi(a)}$, l'équation précédente prend la forme:

$$(44.)\qquad \sum_{\lambda=a}^{\lambda=a+n} \frac{\overset{m}{T}_{\lambda}\,\overset{a+n-\lambda}{T}_{\lambda-1}}{\Pi(\lambda)} - \sum_{\lambda=a}^{\lambda=a+n+1} \frac{\overset{m-1}{T}_{\lambda}\,\overset{a+n+1-\lambda}{T}_{\lambda-1}}{\Pi(\lambda)} = \frac{\overset{m}{T}_{a-1}\,\overset{n}{T}_{a} - \overset{m-1}{T}_{a}\,\overset{n+1}{T}_{a-1}}{\Pi(a)}.$$

Pour abrèger, désignons la première somme par $f(a, m, n)$, la seconde sera $f(a, m-1, n+1)$. On voit que, des trois arguments de ces fonctions, les deux derniers ont la même somme. Cela nous porte à changer m, n en $m-i, n+i$, et à intégrer depuis $i=0$ jusqu'à $i = m-n-1$, en supposant que m est le plus grand des deux nombres m et n. Il résulte de là:

$$f(a, m, n) - f(a, n, m) = \frac{1}{\Pi(a)} \sum_{i=0}^{i=m-n-1} \left(\overset{m-i}{T}_{a-1}\,\overset{n+i}{T}_{a} - \overset{m-i-1}{T}_{a}\,\overset{n+i+1}{T}_{a-1}\right).$$

En rapportant le signe sommatoire séparément à chacun des deux termes à droite, et renversant ensuite la seconde somme, on la trouvera égale à la première. Il y aura donc déstruction entre ces deux sommes, ce qui nous offre une belle proposition dont voici l'énoncé:

La somme $\sum_{\lambda=a}^{\lambda=a+n} \frac{\overset{m}{T}_{\lambda}\,\overset{a+n-\lambda}{T}_{\lambda-1}}{1.2.3.4.\ldots\ldots\lambda}$, *regardée comme fonction des trois arguments a, m, n, ne subit pas aucun changement de valeur par la permutation des deux nombres m et n.*

Dans le cas particulier de $a = 1$, le membre à droite de la formule (44) se réduit à zéro. On a donc: $f(1, m, n) = f(1, m-1, n+1)$. Par consé-

quent, si la somme $m+n$ reste la même, la fonction $f(1, m, n)$ conservera également sa valeur, de manière qu'il sera permis d'y changer par exemple m et n respectivement en $m+n$ et 0. En d'autres termes, on a l'équation:

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=1+n} \frac{\overset{m}{T}_\lambda \; \overset{1+n-\lambda}{T}_{\lambda-1}}{\Pi(\lambda)} = \overset{m+n}{T}_1 ,$$

ou plus simplement

$$(45.) \quad \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{\overset{m}{T}_\lambda \; \overset{n-\lambda}{T}_{\lambda-1}}{1.2.3.\ldots\ldots\lambda} = \overset{m+n-1}{T}_1 .$$

D'après les formules (14 et 18) on a

$$\overset{u}{\Phi}_\gamma = 1 + \overset{\gamma}{F}_1 u + \overset{\gamma}{F}_2 u_2 \ldots\ldots = \frac{1 + \overset{\gamma}{E}_1 u + \overset{\gamma}{E}_2 u^2 \ldots\ldots}{\left(1-\frac{u}{1}\right)\left(1-\frac{u}{2}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{u}{\gamma}\right)} .$$

Développons le membre à droite suivant les puissancesa scendantes de u, en faisant usage de la méthode connue de la décomposition des fractions rationnelles, nous obtiendrons sans difficulté: $\overset{\gamma}{F}_\delta = \sum_{m=1}^{m=\gamma} (-1)^{m-1} \binom{\gamma}{m} \cdot \overset{m}{D}_\gamma \cdot \left(\frac{1}{m}\right)^\delta .$

En combinant la formule (37) avec celle-ci, le calcul nous fournit pour les premiers valeurs de γ les expressions suivantes de la fonction F (dans le cas où le nombre δ y est regardé comme variable principale):

$$\overset{1}{F}_\delta = 1 ,$$

$$\overset{2}{F}_\delta = 5 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\delta-2} ,$$

$$\overset{3}{F}_\delta = \frac{31}{2} - 7\left(\frac{1}{2}\right)^{\delta-2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{\delta-3} ,$$

$$\overset{4}{F}_\delta = \frac{229}{6} - 29\left(\frac{1}{2}\right)^{\delta-2} + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{\delta-3} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{\delta-4} ,$$

$$\overset{5}{F}_\delta = \frac{1961}{24} - \frac{277}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{\delta-2} + \frac{93}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{\delta-3} - \frac{11}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{\delta-4} + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{5}\right)^{\delta-5} , \text{ etc.}$$

En égalant à ces expressions celles empruntées à la formule (24), on pourra joindre à la formule (42) les expressions analogues:

$$\sum_{k=0}^{k=m} \frac{\overset{m-k}{T}_k}{\Pi(k)} \binom{k+3}{1} = 5 - 1\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} ,$$

$$\sum_{k=0}^{k=m} \frac{\overset{m-k}{T}_k}{\Pi(k)} \binom{k+4}{2} = \frac{31}{2} - 7\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{m-2} ,$$

$$\sum_{k=0}^{k=m} \frac{\overset{m-k}{T}_k}{\Pi(k)} \binom{k+5}{3} = \frac{229}{6} - 29\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{m-2} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-3} ,$$

$$\sum_{k=0}^{k=m} \frac{\overset{m+k}{T}_k}{\Pi(k)} \binom{k+6}{4} = \frac{1961}{24} - \frac{277}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} + \frac{93}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{m-2} - \frac{11}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-3} + \frac{1}{24}\left(\frac{1}{5}\right)^{m-4} , \text{ etc.}$$

Nous ne nous arrêterons pas à démontrer directement cette sorte de formules, ce qui, du reste, se ferait de la même manière que pour la formule (42). Ce n'était que pour complèter celle-là par d'autres analogues que j'ai cru devoir en faire mention ici.

8.

En terminant ce Mémoire, dont l'object principal ont été les coefficients $\overset{n}{A}_i$, je dirai encore quelques mots sur une nouvelle signification qu'on peut y attacher dans le cas où n est un nombre entier et négatif.

Après avoir changé n en $-n$ dans la formule (4), nous aurons, en vertu de la formule (3):

$$(46.)\quad \frac{1}{(1-x)(1-2x)\ldots\ldots(1-nx)} = 1 + \overset{-n}{A}_1 x + \overset{-n}{A}_2 x^2 \ldots\ldots + \overset{-n}{A}_i x^i \ldots\ldots,$$

où, dans le cas présent, la sèrie à droite se continue à l'infini. Pour qu'elle soit convergente, il faudra qu'on ait $x < \frac{1}{n}$. Décomposons, par le procéde connu, la fraction à gauche en fractions partielles, puis développons suivant les puissances ascendantes de x; en comparant les termes correspondants, nous aurons

$$(47.)\quad \frac{1}{\Pi(n)} \sum_{m=0}^{m=n} (-1)^{n-m} \binom{n}{m} m^{n+i} = \overset{-i}{A}_i .$$

Par là on parvient à complèter essentiellement la formule connue

$$(48.)\quad \sum_{m=0}^{m=n} (-1)^{n-m} \binom{n}{m} m^{\alpha} = 0 ,$$

qui a lieu toutes les fois où l'exposant α est un des nombres entiers $0, 1, 2, \ldots\ldots n-1$. En opérant sur l'équation

$$\frac{x^{n-1}}{(1-x)(1-2x)\ldots\ldots(1-nx)} = 0 + 0 . x + 0 . x^2 \ldots\ldots + 0 . x^{n-2} + x^{n-1} + \overset{-n}{A}_1 x^n + \overset{-n}{A}_2 x^2 + \ldots\ldots$$

de la même manière que sur celle (46), on parviendra simultanément aux deux formules (47 et 48).

Il y a encore une autre méthode de démontrer les équations (47 et 48). En désignant par $\varphi(n, \alpha)$ la somme finie

$$\frac{1}{\Pi(n)} \sum_{m=0}^{m=n} (-1)^{n-m} \binom{n}{m} m^{\alpha} ,$$

et en observant que l'on a $\binom{n}{m} m = n\binom{n-1}{m-1} = n\binom{n}{m} n - \binom{n-1}{m}$, on obtient la relation

$$(49.)\quad \varphi(n, \alpha) = n\varphi(n, \alpha-1) + \varphi(n-1, \alpha-1).$$

Or il est clair que $\varphi(n,0)$ sera **1**, ou **0**, selon que n est zéro, ou un nombre entier et positif, et que $\varphi(0,\alpha)$ sera **0**, tant que l'exposant α sera un entier positif. Ainsi, en posant dans cette relation, $\alpha = 1$, on aura: $\varphi(n,1) = 1$ ou $= 0$, selon que n est égal à **1**, ou à un entier plus grand. Cela posé, faisons, dans la même formule $\alpha = 2$, il viendra $\varphi(n,2) = 1$, ou $= 0$, suivant que n est égal à **2**, ou à un entier plus grand. En continuant cette marche, il en résultera généralement: $\varphi(n,\alpha) = 1$, ou $= 0$, suivant que n est égal à l'exposant α, entier et positif, ou à un nombre plus grand. Voilà démontré la formule (48). Quant à l'autre formule (47), il suffit de rapprocher la relation (49) de la relation générale du système (5) qui, par le changement de n, i en $-n$, $\alpha - n$, prend la forme

$$\overset{-n+1}{A}_{\alpha-n} = \overset{-n}{A}_{\alpha-n} - n\overset{-n}{A}_{\alpha-1-n}, \quad \text{ou bien:} \quad \overset{-n}{A}_{\alpha-n} = n\overset{-n}{A}_{(\alpha-1)-n} + \overset{-(n-1)}{A}_{(\alpha-1)-(n-1)},$$

pour se convaincre de l'identité

$$(50.) \quad \varphi(n,\alpha) = \overset{-n}{A}_{\alpha-n}.$$

Il y a pourtant à remarquer que ces deux fontions φ et A ne coïncident que dans les cas particuliers que nous venons de considérer; dans d'autres cas, elles font voir une nature diverse. L'une $\varphi(n,\alpha)$ se prête à une variation continuelle de α, mais cesse d'être signifiante, dès que n a une valeur quelconque. L'autre $\overset{-n}{A}_{\alpha-n}$ n'a plus aucun sens lorsqu' on y suppose $\alpha - n$ quelconque, mais elle se comporte bien avec la variation de n.

En suivant la marche que nous avons observée jusqu' ici, on tire de la formule (32) l'expression

$$\overset{m}{T} = \frac{(-1)^m}{\Pi(m)} + (-1)_n \Pi(n+1) \cdot \sum_{k=0}^{k=m-1} \binom{n+k+1}{k} \varphi(n+k+1, -(m-k)),$$

où l'on suppose $\varphi(n,-\alpha) = \frac{1}{\Pi(n)} \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{i}\right)^{\alpha}$. Lorsqu'on y fait $n=0$, on obtient la formule

$$\frac{(-1)^m}{\Pi(m)} + \sum_{0=k}^{k=m-1} (k+1)\varphi(k+1, -(m-k)) = 0. \quad [m>0].$$

Supplément du §. VI.

Je ne veut pas passer sous silence une transformation dont la formule (37) est susceptible. En voici le résultat:

$$\overset{u}{D}_{\gamma} = (\gamma+1)\left\{\sum_{m=0}^{m=\gamma} \frac{u^m}{\Pi(m)} \binom{\gamma-u}{\gamma-m} - \frac{1}{u} \cdot \sum_{m=0}^{m=\gamma+1} \frac{u^m}{\Pi(m)} \binom{\gamma-u}{\gamma+1-m}\right\}.$$

Autrement: $\overset{u}{D}_\gamma$ *est égal au coefficient de* z^0 *dans le développement de*

$$(-1)^\gamma\ \gamma+1)\left(\frac{z}{u}+1\right)e^{-\frac{u}{z}}\left(\frac{z}{z-1}\right)^u(z-1)^\gamma$$

suivant les puissances descendantes de z. Par conséquent, la somme qui se trouve dans la dernière expression de $\overset{i}{B}_\alpha$ entre les crochets et que l'on avait désignée d'abord par $\overset{\alpha}{Q}_\beta$, est égale au coefficient de z^0 dans le développement de

$$(-1)^{\alpha-u+1}\left(\frac{z}{u}+1\right)\frac{z^u e^{-\frac{u}{z}}}{(z-1)^{u+2}}\int_1^z(z-1)^{\alpha-u}\sum_{\mu=0}^{\mu=\alpha-u-1}\binom{-(i+2u+2)}{\mu}\left(\frac{1}{z-1}\right)^\mu dz$$

suivant les puissances descendantes de z. Quant au facteur composé qui précède l'intégrale définie, le premier terme de son développement est $(-1)^{\alpha-u+1}\frac{1}{uz}$, et tous les termes suivants seront d'un ordre inférieur à z^{-1}. De l'autre côté, si l'on étend la somme finie, comprise sous le signe d'intégration, au delà de sa limite supérieure et qu'on fait abstraction de la limite inférieure $z=1$ de l'intégrale, pour éviter des quantités infiniment grandes, les premiers termes qui en resultent de plus dans la même intégrale, mais conçue dans un sens plus large, séront

$$\binom{-(i+2u+2)}{\alpha-u}(z-1)+\text{Const}+\binom{-(i+2u+2)}{\alpha-u+1}\log(z-1)-\binom{-(i+2u+2)}{\alpha-u+2}\frac{1}{z-1}\ \text{etc.}$$

Or la constante arbitraire, le terme logarithmique, et tous les termes fractionnaires suivants, sont hors de considération, parcequ'ils ne contribuent à la formation du terme en z^0 dans le développement total. Il ne reste donc, dans ladite intégrale, que le terme $\binom{-(i+2u+2)}{\alpha-u}z$, qui ne doit pas être négligé. Donc, si l'ou veut etendre l'intégrale plus largement que celle qui a été presentée primitivement, il faut en retrancher d'abord le terme mentionné, ou, ce qui revient au même, il faut retrancher du total le terme $(-1)^{\alpha-u-1}\frac{1}{u}\binom{-(i+2u+2)}{\alpha-u}$.

Maintenant rappelons-nous la formule (10*b*) qui, suivant la notation actuelle prend la forme

$$(-1)^\beta\frac{\overset{\alpha}{C}_\beta}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot\beta}=\binom{-(i+2u+1)}{\alpha-u+1}+u\,.\,\overset{\alpha}{Q}_\beta\,.$$

D'après ce qu'on vient de dire, elle se changera en

$$(-1)^\beta\frac{\overset{\alpha}{C}_\beta}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot\beta}=\binom{-(i+2u+2)}{\alpha-u+1}+\left[\frac{(z+u)z^u e^{-\frac{u}{z}}}{(z-1)^{u+2}}\int\frac{(z-1)^{i+\alpha+u+2}}{z^{i+2u+2}}dz\right],$$

où il ne faut prendre, au lieu de l'expression mise entre les crochets [ ], que le seul terme en z^0, provenant de son développement suivant les puissances descendantes de z. Ce développement contiendra en outre, comme on le sait déjà, un terme logarithmique qui devra être négligè de même.

Berne, Avril 1849.

2.

Ueber das Minimum des Integrals $\int \sqrt{(dx_1^2 + dx_2^2 \cdots\cdots + dx_n^2)}$, wenn die Variabeln $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ durch eine Gleichung zweiten Grades gegenseitig von einander abhängig sind.

(Von Herrn Dr. *Schlaeffli*, Privatdocent an der Universität zu Bern.)

Im 19ten Bande dieses Journals steht eine Abhandlung von Herrn *C. G. J. Jacobi*, in welcher die Fruchtbarkeit einer verallgemeinerten Betrachtung der confocalen Flächen zweiten Grades für die Theorie der *Abel*schen Integrale, zugleich mit der Bestimmung der geodätischen Linie auf dem Ellipsoid, gezeigt wird. Da nun dort nur kurz erwähnt ist, dass auch diese letztere Aufgabe, der geodätischen Linie, der Ausdehnung auf eine beliebige Zahl von Variabeln fähig sei, so sei es mir vergönnt, dieselbe hier zu behandeln; wobei ich mich möglichst der geometrischen Einfachheit zu nähern trachten werde.

Die gegebene quadratische Gleichung zwischen den Variabeln $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ kann von den Gliedern ersten Grades befreit werden, indem man neue Variabeln einführt, die sich von den vorigen um gewisse constante Grössen unterscheiden; dadurch werden die Differentiale $dx_1, dx_2, \cdots\cdots dx_n$ nicht geändert. Nun ersetze man die einzelnen Variabeln durch lineare homogene Functionen eben so vieler neuer Variabeln und bestimme die Coefficienten durch die Bedingung, dass der Ausdruck $x_1^2 + x_2^2 \cdots\cdots + x_n^2$ seine Form nicht ändere und dass in der quadratischen Gleichung alle Glieder, welche Producte verschiedener Variabeln enthalten, verschwinden. Dann wird diese Gleichung durch

$$\frac{x_1^2}{A_1} + \frac{x_2^2}{A_2} \cdots\cdots \frac{x_n^2}{A^n} = 1$$

dargestellt und das zu integrirende Element

$$ds = \sqrt{(dx_1^2 + dx_2^2 \cdots\cdots + dx_n^2)}$$

behält die unveränderte Form seines ursprünglichen Ausdrucks. Ist die ursprünglich gegebene quadratische Gleichung von reeller Form, so haben auch sämmtliche lineare Verwandlungsformeln eine reelle Form. Ihre n^2 Coefficienten hangen nämlich in linearer Weise, je n und n, von den einzelnen Wurzeln einer algebraischen Gleichung $n$ten Grades ab, und es lässt sich streng beweisen, dass die Wurzeln $\frac{1}{A_1}$, $\frac{1}{A_2}$, ... $\frac{1}{A}$ dieser Gleichung sämmtlich reel sind.

Sieht man nun die zu irgend einem Elemente des Integrals $\int ds$ gehörenden Grössen x_1, x_2, ... x_n als gegeben an und setzt $dA_1 = dA_2 = \ldots\ldots dA_n$, so dass alle Grössen A_1, A_2, ... A_n als eine und dieselbe Variable erscheinen, so ist leicht zu sehen, dass die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{A_1} + \frac{x_2^2}{A_2} \ldots\ldots + \frac{x_n^2}{A_n} = 1$$

vom $n$ten Grade ist und lauter reelle Wurzeln hat. Bezeichnet man diese, nach ihrer abnehmenden Grösse geordnet, durch $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, ... $\overset{n}{A}$, so ergiebt sich folgendes System von Gleichungen:

$$(1.)\quad \begin{cases} \frac{x_1^2}{\overset{1}{A}_1} + \frac{x_2^2}{\overset{1}{A}_2} \ldots\ldots + \frac{x_n^2}{\overset{1}{A}_n} = 1, \\ \frac{x_1^2}{\overset{2}{A}_1} + \frac{x_2^2}{\overset{2}{A}_2} \ldots\ldots + \frac{x_n^2}{\overset{2}{A}_n} = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{x_1^2}{\overset{n}{A}_n} + \frac{x_2^2}{\overset{n}{A}_2} \ldots\ldots + \frac{x_n^2}{\overset{n}{A}_n} = 1, \end{cases}$$

Nimmt man an, dass die Grössen $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ eine abnehmende Reihe bilden, so ist $\overset{1}{A}_n > 0$, $\overset{2}{A}_{n-1} > 0 > \overset{2}{A}_n$, $\overset{3}{A}_{n-2} > 0 > \overset{3}{A}_{n-1}, \ldots\ldots, \overset{n}{A}_1 > 0 > \overset{n}{A}_2$; überhaupt ist jede Grösse A negativ, wenn die Summe ihres obern und ihres untern Zeigers die Zahl $n+1$ übertrifft; sonst positiv.

Die Gleichung

$$(2.)\quad \frac{\overset{2}{x}_1}{A_1} + \frac{\overset{2}{x}_2}{A_2} \ldots\ldots + \frac{\overset{2}{x}_n}{A_n} = 1 - \frac{(A-\overset{1}{A})(A-\overset{2}{A}) \ldots\ldots (A-\overset{n}{A})}{A_1 A_2 \ldots\ldots\ldots A_n}$$

ist in Beziehung auf die freie Grösse A vom $(n-1)$ten Grade und hat in Folge des Systems (1) die n Lösungen

$$A = \overset{1}{A}, \quad A = \overset{2}{A}, \ldots\ldots\ldots A = \overset{n}{A}.$$

Da aber diese Zahl von Lösungen den Grad übersteigt, so muss die Gleichung (2) in Beziehung auf die freie Grösse A identisch sein. Multiplicirt man sie

mit A_1 und lässt dann A_1 verschwinden, so verwandeln sich A_2, A_3, ... A_n in die gegebenen Unterschiede $A_2 - A_1$, $A_3 - A_1$, ... $A_n - A_1$, und man erhält

$$(3.) \quad \overset{2}{x}_1 = \frac{\overset{1}{A}_1 \overset{2}{A}_1 \overset{2}{A}_1 \ldots\ldots \overset{n}{A}_1}{(A_1 - A_2)(A_1 - A_3)\ldots\ldots(A_1 - A_n)}, \text{ etc.}$$

Differentiirt man die Gleichung (2) nach der freien Grösse A und setzt $A = \overset{1}{A}$, so ergiebt sich

$$(4.) \quad \frac{\overset{2}{x}_1}{\overset{1}{A}_1^2} + \frac{\overset{2}{x}_2}{\overset{1}{A}_2^2} \ldots\ldots + \frac{\overset{2}{x}_n}{\overset{1}{A}_n^2} = \frac{(\overset{1}{A} - \overset{2}{A})(\overset{1}{A} - \overset{3}{A}) \ldots\ldots (\overset{1}{A} - \overset{n}{A})}{\overset{1}{A}_1 \overset{1}{A}_2 \overset{1}{A}_3 \ldots\ldots \overset{1}{A}_n} = \frac{1}{\overset{1}{p}^2}, \text{ etc.}$$

Der Ausdruck für $\overset{1}{v}^2$ unterscheidet sich von demjenigen für x_1^2 nur durch Vertauschung der obern und untern Zeiger; folglich werden alle Formeln, welche x_1, x_2, ... x_n enthalten, in eben so viele neue übergehen, wenn man x mit p und die obern mit den untern Zeigern vertauscht.

Setzt man $\frac{\overset{1}{p}\, x_m}{\overset{1}{A}_m} = \overset{1}{\alpha}_m$, $\frac{\overset{2}{p}\, x_m}{\overset{2}{A}_m}, = \overset{2}{\alpha}_m$, u. s. f.,

so verwandeln sich die Gleichungen (4) in

$$\overset{1}{\alpha}_1^2 + \overset{1}{\alpha}_2^2 \ldots\ldots + \overset{1}{\alpha}_n^2 = 1, \quad \overset{2}{\alpha}_1^2 + \overset{2}{\alpha}_2^2 \ldots\ldots + \overset{2}{\alpha}_n^2 = 1, \text{ u. s. f.}$$

Diese Gleichungen bestehen auch noch, wenn man die obern und untern Zeiger vertauscht. Zieht man die zwei ersten Gleichungen (1) von einander ab und multiplicirt mit $\frac{\overset{1}{p}\,\overset{2}{p}}{\overset{1}{A} - \overset{2}{A}}$, so ergiebt sich

$$\overset{1}{\alpha}_1 \overset{2}{\alpha}_1 + \overset{1}{\alpha}_2 \overset{2}{\alpha}_2 \ldots\ldots + \overset{1}{\alpha}_n \overset{2}{\alpha}_n = 0, \text{ u. s. f.;}$$

wo auch die obern und untern Zeiger mit einander vertauscht werden dürfen.

Durch die Gleichungen (3) sind die Grössen $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, ... $\overset{n}{A}$ gegeben. Differentiirt man diese Gleichungen, so erhält man

$$2\,\frac{dx_1}{x_1} = \frac{d\overset{1}{A}}{\overset{1}{A}_1} + \frac{d\overset{2}{A}}{\overset{2}{A}_1} \ldots\ldots + \frac{d\overset{n}{A}}{\overset{n}{A}_1},$$

oder auch

$$dx_1 = \overset{1}{\alpha}_1 \frac{d\overset{1}{A}}{2\overset{1}{p}} + \overset{2}{\alpha}_1 \frac{d\overset{2}{A}}{2\overset{2}{p}} \ldots\ldots + \overset{n}{\alpha}_1 \frac{d\overset{n}{A}}{2\overset{n}{p}}, \text{ u. s. f.}$$

Hieraus folgt vermöge der zwischen den Grössen $\overset{1}{\alpha}_1$, $\overset{1}{\alpha}_2$, ... $\overset{2}{\alpha}_1$, ... bestehenden Relationen:

$$ds^2 = \left(\frac{dA^{1}}{2p}\right)^2 + \left(\frac{dA^{2}}{2p}\right)^2 \cdots\cdots + \left(\frac{dA^{n}}{2p}\right)^2.$$

In diesem Ausdrucke fällt das erste Glied weg, sobald man

$$\frac{x_1^2}{A_1} + \frac{x_2^2}{A_2} \cdots\cdots + \frac{x_n^2}{A_n} = 1$$

als die ursprünglich gegebene Bedingung ansieht, welcher die im Integral $\int \sqrt{(dx_1^2 + dx_2^2 \cdots\cdots + dx_n^2)}$ vorkommenden Variabeln unterworfen sind; denn dann wird A^{1} constant, und es bleiben nur noch $A^{2}, A^{3}, \ldots\ldots A^{n-1}, A^{n}$ als unter sich unabhängige Variabeln übrig, deren Werthe innerhalb der oben angegebenen Gränzen enthalten sind. Für A_1^{2} z. B. sind diese Gränzen durch

$$A_i^{1} - A_{n-1}^{1} < A_1^{2} < A_1^{1} - A_n^{1}$$

bezeichnet. Setzt man jetzt

$$(5.) \quad \frac{dA^{2}}{2p} = \lambda^{2}\, ds\,, \quad \frac{dA^{3}}{2p} = \lambda^{3}\, ds\,, \ldots\ldots \frac{dA^{n}}{2p} = \lambda^{n}\, ds\,,$$

so folgt

$$(6.) \quad \lambda^{2^2} + \lambda^{3^2} \cdots\cdots + \lambda^{n^2} = 1\,,$$

$$(7.) \quad ds^2 = \left(\lambda^{2} \frac{dA^{2}}{2p} + \lambda^{3} \frac{dA^{3}}{2p} \cdots\cdots + \lambda^{n} \frac{dA^{n}}{2p}\right)^2 + \left(\lambda^{2} \frac{dA^{3}}{2p} - \lambda \frac{dA^{2}}{2p}\right)^2 + \text{etc.}$$

Gelingt es nun, für $\lambda^{2}, \lambda^{3}, \cdots\cdots \lambda^{n}$ solche Werthe zu finden, dass $\frac{\lambda^{2}}{p}$ nur A^{2}, $\frac{\lambda^{3}}{p}$ nur A^{3}, u. s. f. als Variable enthält, und dass zugleich der Gleichung (6) genügt wird, so ist die Aufgabe gelöset. In der That, wenn man sich irgend ein zwischen zwei festen Gränzen genommenes Integral $\int ds$ vorstellt, dessen Elemente den Bedingungen (5) nicht unterworfen sind, und beachtet, dass die Gleichung (7), vereint mit (6), auch dann noch richtig bleibt, so folgt aus derselben:

$$\int ds > \int \lambda^{2} \frac{dA^{2}}{2p} + \int \lambda^{3} \frac{dA^{3}}{2p} \cdots\cdots + \int \lambda^{n} \frac{dA^{n}}{2p}\,.$$

Sind hingegen die Elemente des zwischen denselben festen Gränzen genommenen Integrals $\int ds$ so aneinander gereiht, dass die Bedingungen (5) erfüllt werden, so folgt aus (7):

$$\int ds = \int \overset{2}{\lambda} \frac{d\overset{2}{A}}{2p} + \int \overset{3}{\lambda} \frac{d\overset{3}{A}}{2p} \cdots\cdots + \int \overset{n}{\lambda} \frac{d\overset{n}{A}}{2p} .$$

Da nun die Integrale rechts, wegen der vorausgesetzten Trennung der Variabeln, einzig von den festen Gränzen des Integrals $\int ds$ abhangen, so darf man mit Recht schliessen, dass jedes Integral $\int ds$, dessen Elemente den Bedingungen **(5)** nicht genügen, grösser ist, als dasjenige, für welches diese Bedingungen Statt finden. Also kommt die Aufgabe, $\int ds$ zu einem Minimum zu machen, darauf zurück, für $\overset{2}{\lambda}$, $\overset{3}{\lambda}$, $\cdots\cdots$ $\overset{n}{\lambda}$ solche der Bedingung (6) genügende Ausdrücke zu finden, dass die Quotienten

$\frac{\overset{2}{\lambda}}{\overset{2}{p}}$, $\frac{\overset{3}{\lambda}}{\overset{3}{p}}$, $\cdots\cdots$ $\frac{\overset{n}{\lambda}}{\overset{n}{p}}$ resp. nur die Variabeln $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$, $\cdots\cdots$ $\overset{n}{A}$ enthalten.

Da nach (4)

$$\overset{2}{p}{}^2 = \frac{\overset{2}{A}_1 \overset{2}{A}_2 \overset{2}{A}_3 \cdots\cdots \overset{2}{A}_n}{(\overset{2}{A} - \overset{1}{A})(\overset{2}{A} - \overset{3}{A}) \ldots\ldots (\overset{2}{A} - \overset{n}{A})}$$

ist, so muss der Ausdruck für $\overset{2}{\lambda}{}^2$ das Product $(\overset{2}{A} - \overset{3}{A}) \cdots\cdots (\overset{2}{A} - \overset{n}{A})$ zum Nenner haben, und ausserdem nur die Variable $\overset{2}{A}$ enthalten. Beachtet man aber den Zusammenhang zwischen den Gleichungen (1) und (3), so sieht man bald, dass der Zweck erreicht wird, wenn man

$$\frac{\overset{2}{\lambda}{}^2}{1 + \omega \overset{2}{A}} + \frac{\overset{3}{\lambda}{}^2}{1 + \omega \overset{3}{A}} \cdots\cdots + \frac{\overset{n}{\lambda}{}^2}{1 + \omega \overset{n}{A}} = 1 ,$$

$$\frac{\overset{2}{\lambda}{}^2}{\omega(\overset{2}{A} - \overset{2}{C})} + \frac{\overset{3}{\lambda}{}^2}{\omega(\overset{3}{A} - \overset{2}{C})} \cdots\cdots + \frac{\overset{n}{\lambda}{}^2}{\omega(\overset{n}{A} - \overset{2}{C})} = 1 ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\overset{2}{\lambda}{}^2}{\omega(\overset{2}{A} - \overset{n-1}{C})} + \frac{\overset{3}{\lambda}{}^2}{\omega(\overset{3}{A} - \overset{n-1}{C})} \cdots\cdots + \frac{\overset{n}{\lambda}{}^2}{\omega(\overset{n}{A} - \overset{n-1}{C})} = 1 ,$$

setzt, insofern daraus

$$\overset{2}{\lambda}{}^2 = \frac{(1 + \omega \overset{2}{A})(\overset{2}{A} - \overset{2}{C})(\overset{2}{A} - \overset{3}{C}) \ldots\ldots (\overset{2}{A} - \overset{n-1}{C})}{(\overset{2}{A} - \overset{3}{A})(\overset{2}{A} - \overset{4}{A}) \ldots\ldots (\overset{2}{A} - \overset{n}{A})} , \text{ etc.}$$

folgt, und dann, um die Bedingung (6) zu erfüllen, ω verschwinden lässt. Die Gleichung

$$(8.) \qquad \frac{\overset{2}{\lambda}{}^2}{\overset{2}{A} - C} + \frac{\overset{3}{\lambda}{}^2}{\overset{3}{A} - C} + \frac{\overset{n}{\lambda}{}^2}{\overset{n}{A} - C} = 0 ,$$

wenn darin für $\overset{2}{\lambda}$, u. s. f. die aus (5) sich ergebenden Werthe substituirt werden, ist also als eine erste Integralgleichung derjenigen $n-2$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung anzusehen, auf welche die Variationsrechnung unsere Aufgabe zurückführen würde; und da diese Gleichung (8) in Beziehung auf die Integrationsconstante C vom $(n-2)$ten Grade ist, so gilt sie auch für $n-2$ Integralgleichungen, die sich durch $n-2$ besondere Werthe der Constante C unterscheiden.

Setzt man der Kürze wegen

$$(9.) \qquad \left(\frac{p}{\overset{2}{\lambda}}\right)^2 = \overset{2}{q}{}^2 = \frac{\overset{2}{A}_1 \overset{2}{A}_2 \overset{2}{A}_3 \overset{2}{A}_4 \ldots\ldots \overset{2}{A}_n}{(\overset{2}{A} - \overset{1}{A})(\overset{2}{A} - \overset{2}{C})(\overset{2}{A} - \overset{3}{C}) \ldots\ldots (\overset{2}{A} - \overset{n-1}{C})}, \quad \text{etc.},$$

so sind die Ausdrücke $\overset{2}{q}, \overset{3}{q}, \ldots\ldots \overset{n}{q}$ ähnlich gebildet, wie $\overset{1}{p}, \overset{2}{p}, \ldots\ldots \overset{n}{p}$; mit dem Unterschiede, dass hier die Parameter $\overset{1}{A}, \overset{2}{C}, \overset{3}{C}, \ldots\ldots \overset{n-1}{C}$ constant sind und nur zuweilen ein variables $\overset{2}{A}$ oder $\overset{3}{A}, \ldots\ldots$ oder $\overset{n}{A}$ hinzutritt. Wenn wir daher, um irgend zwei zusammengehörige Variabeln $\overset{2}{A}, \overset{2}{q}$, oder $\overset{3}{A}, \overset{3}{q}$, u. s. f. zu bezeichnen, die obern Zeiger weglassen und die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\frac{y_1^2}{\overset{1}{A}_1} + \frac{y_2^2}{\overset{1}{A}_2} \ldots\ldots + \frac{y_n^2}{\overset{1}{A}_n} = 1, \\
&\frac{y_1^2}{\overset{2}{C}_1} + \frac{y_2^2}{\overset{2}{C}_2} \ldots\ldots + \frac{y_n^2}{\overset{2}{C}_n} = 1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{y_1^2}{\overset{n-1}{C}_1} + \frac{y_2^2}{\overset{n-1}{C}_2} \ldots\ldots + \frac{y_n^2}{\overset{n-1}{C}_n} = 1, \\
&\frac{y_1^2}{A_1} + \frac{y_2^2}{A_2} \ldots\ldots + \frac{y_n^2}{A^n} = 1,
\end{aligned}$$

annehmen, wo $C_1 - C_2 = A_1 - A_2$, u. s. w. sein soll, so folgt aus dem Früheren:

$$\sqrt{(dy_1^2 + dy_2^2 \ldots\ldots + dy_n^2)} = \frac{dA}{2q};$$

wodurch die Bedeutung des Integrals $\int \frac{dA}{2q}$ in ein helleres Licht tritt.

Bezeichnen wir den Werth des Minimums des Integrals $\int ds$ mit s, so ist

$$(10.) \qquad s = \int \frac{d\overset{2}{A}}{2\overset{2}{q}} + \int \frac{d\overset{3}{A}}{2\overset{3}{q}} \ldots\ldots + \int \frac{d\overset{n}{A}}{2\overset{n}{q}}.$$

Die Gleichungen (5) erhalten die Form:

$$\frac{d\overset{2}{A}}{\overset{2}{2q}} = \overset{2}{\lambda^2} ds\,, \quad \frac{d\overset{3}{A}}{\overset{3}{2q}} = \overset{3}{\lambda^2} ds\,, \quad \ldots\ldots \quad \frac{d\overset{n}{A}}{\overset{n}{2q}} = \overset{n}{\lambda^2} ds\,;$$

folglich, wenn man hier mittels (8) die Hülfsgrössen λ wegschafft:

$$(11.) \quad \begin{cases} \int \frac{1}{\overset{2}{A} - \overset{2}{C}} \frac{d\overset{2}{A}}{\overset{2}{2q}} + \int \frac{1}{\overset{3}{A} - \overset{2}{C}} \frac{d\overset{3}{A}}{\overset{3}{2q}} \ldots\ldots + \int \frac{1}{\overset{n}{A} - \overset{2}{C}} \frac{d\overset{n}{A}}{\overset{n}{2q}} = c_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \int \frac{1}{\overset{2}{A} - \overset{n-1}{C}} \frac{d\overset{2}{A}}{\overset{2}{2q}} + \int \frac{1}{\overset{3}{A} - \overset{n-1}{C}} \frac{d\overset{3}{A}}{\overset{3}{2q}} \ldots\ldots + \int \frac{1}{\overset{n}{A} - \overset{n-1}{C}} \frac{d\overset{n}{A}}{\overset{n}{2q}} = c_{n-1}\,. \end{cases}$$

Hier bezeichnen c_2, c_3, ... c^{n-1} die $n-2$ willkührlichen Integrationsconstanten. Diese Gleichungen (11), vereint mit (1) und (9), lösen nun die gestellte Aufgabe, $\int V(dx_1^2 + dx_2^2 \ldots\ldots + dx_n^2)$ zu einem Minimum zu machen, wenn $\frac{x_2^{\,1}}{\overset{1}{A_1}} \ldots\ldots + \frac{x_n^{\,2}}{\overset{1}{A^n}} = 1$ ist, vollständig; denn sie enthalten $2(n-2)$ willkührliche Integrationsconstanten, wie es die $n-2$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$d\,\frac{dx_1}{ds} : d\frac{dx_2}{ds} : \ldots\ldots : d\frac{dx_n}{dx} = \frac{x_1}{\overset{1}{A_1}} : \frac{x_2}{\overset{1}{A_2}} : \ldots\ldots : \frac{x_n}{\overset{1}{A_n}}\,,$$

auf welche die Variationsrechnung die Aufgabe zurückführt, erfordern. Endlich giebt noch die Gleichung (10) den Werth des verlangten Minimums.

Durch die Gleichungen (3, 9, 10, 11) sind die ursprünglichen Variabeln x_1, x_2, ... x_n als Functionen der einzigen Variabeln s gegeben. Sollen jene sämmtlich reel sein, so müssen die Variabeln $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$, ... $\overset{n}{A}$ resp. innerhalb der bei (1) angegebenen Spielräume sich bewegen, und die Grössen $\overset{2}{q}$, $\overset{3}{q}$, ... $\overset{n}{q}$ müssen alle reel sein. Damit dieses Letztere sein könne, muss das aus $n-2$ Factoren (die wir uns in wachsender Reihe geordnet vorstellen wollen) zusammengesetzte Product $(A - \overset{2}{C})(A - \overset{3}{C}) \ldots\ldots (A - \overset{n-1}{C})$ zuerst positiv sein, und dann immer Zeichen wechseln, während über A nach und nach die Zeiger 2, 3, ... n gesetzt werden. Diese Bedingung kann aber dadurch erfüllt werden, dass

$$\overset{2}{A} > \overset{2}{C} > \overset{3}{A} > \overset{3}{C} > \overset{4}{A} > \overset{4}{C} \ldots\ldots > \overset{n-1}{A} > \overset{n-1}{C} > \overset{n}{A}$$

ist. Da es demnach freisteht, die Constante $\overset{2}{C}$ im Spielraume von $\overset{2}{A}$ oder in demjenigen von $\overset{3}{A}$ zu nehmen, u. s. f., so sind 2^{2-n} Hauptgattungen von Gesetzen zu unterscheiden, nach denen das Argument s die zugehörigen Systeme abhängiger Functionen x_1, x_2, ... x_n beherrscht.

Die Gleichungen (11), welche das so eben genannte Gesetz darstellen, sind nichts anders, als

$$\frac{ds}{dC^{2}} = c_2\,, \quad \frac{ds}{dC^{3}} = c_3\,, \ldots\ldots\ldots \frac{ds}{dC^{n-1}} = c_{n-1}\,.$$

Wenn man aber die untern Gränzen sämmtlicher Integrale dahin versetzt, wo s verschwindet, so müssen auch diese zweiten Integrationsconstanten c_2, c_3 ..... verschwinden; d. h. der zwischen beliebig gegebenen Gränzen genommene Ausdruck (10) für s, als Function der darin enthaltenen ersten Integrationsconstanten $\overset{2}{C}$, $\overset{3}{C}$, ... $\overset{n-1}{C}$ betrachtet, muss in Beziehung auf die Variation dieser Constanten stets ein Maximum oder Minimum sein. Was übrigens den Sinn der Wurzelgrössen q betrifft, so zeigen die unmittelbar auf (10) folgenden Gleichungen, dass sämmtliche Elemente $\frac{dA}{2q}$ zugleich mit ds positiv sein müssen.

Die allgemeine Formel (7) ist einer identischen Verwandlung fähig, aus welcher die erst erwähnte Natur der Gleichungen (11) sogleich hervorleuchtet. Um Verwechslung zu vermeiden, wollen wir das erste Glied des dortigen Ausdrucks für ds^2 mit dS^2 bezeichnen. Dann ist nach der bereits in (10) vollzogenen Umwandlung:

$$dS = \frac{d\overset{2}{A}}{2\overset{2}{q}} + \frac{d\overset{3}{A}}{2\overset{3}{q}} \ldots\ldots + \frac{d\overset{n}{A}}{2\overset{n}{q}}\,,$$

und wir haben es nur noch mit der schwierigen Umwandlung von $\overset{2}{\lambda}\frac{d\overset{3}{A}}{2\overset{3}{p}} - \overset{3}{\lambda}\frac{d\overset{2}{A}}{2\overset{2}{p}}$ zu thun. Dieser Ausdruck (2, 3) giebt zunächst, nach (9):

$$(2,\,3) = \overset{2}{\lambda}\,\overset{3}{\lambda}\left(\frac{1}{\overset{3}{\lambda}\,\overset{2}{\lambda}}\,\frac{d\overset{3}{A}}{2\overset{3}{q}} - \frac{1}{\overset{2}{\lambda}\,\overset{2}{\lambda}}\,\frac{d\overset{2}{A}}{2\overset{2}{q}}\right).$$

Setzt man mit Rücksicht auf (8):

$$\left(\frac{\overset{2}{\lambda}}{\overset{2}{A}-C}\right)^2 + \left(\frac{\overset{3}{\lambda}}{\overset{3}{A}-C}\right)^2 \ldots\ldots + \left(\frac{\overset{n}{\lambda}}{\overset{n}{A}-C}\right)^2 = \frac{1}{\mu^2}\,,$$

wo über C und μ nach und nach die Zeiger $2, 3, \ldots\ldots n-1$ zu schreiben sind, so folgt

$$\text{(12.)} \quad \overset{2}{\mu}\,\overset{2}{\mu} = -\frac{(\overset{2}{A}-\overset{2}{C})(\overset{3}{A}-\overset{2}{C}) \ldots\ldots (\overset{n}{A}-\overset{2}{C})}{(\overset{3}{C}-\overset{2}{C})(\overset{4}{C}-\overset{2}{C}) \ldots\ldots (\overset{n-1}{C}-\overset{2}{C})}\,, \text{ etc.}$$

$$\Sigma\,\frac{\mu\,\mu}{(\overset{2}{A}-C)(\overset{3}{A}-C)} = -1\,, \quad \frac{1}{\overset{2}{\lambda}\,\overset{2}{\lambda}} = 1 + \Sigma\,\frac{\mu\,\mu}{(\overset{2}{A}-C)^2}\,;$$

also

$$(2,3) = \overset{2}{\lambda}\overset{3}{\lambda}\Big\} \Sigma \frac{\mu\mu}{\overset{3}{A}-C}\left(\frac{1}{\overset{2}{A}-C}\frac{d\overset{2}{A}}{\overset{2}{2q}} + \frac{1}{\overset{3}{A}-C}\frac{d\overset{3}{A}}{\overset{3}{2q}}\right)$$
$$- \Sigma \frac{\mu\mu}{\overset{2}{A}-C}\left(\frac{1}{\overset{2}{A}-C}\frac{d\overset{2}{A}}{\overset{2}{2q}} + \frac{1}{\overset{3}{A}-C}\frac{d\overset{3}{A}}{\overset{3}{2q}}\right)\Big\} .$$

Es lässt sich aber die innerhalb der Klammern ( ) mit zwei Gliedern angefangene Reihe vervollständigen, weil z. B.

$$\Sigma \frac{\mu\mu}{(\overset{3}{A}-C)(\overset{4}{A}-C)} - \Sigma \frac{\mu\mu}{(\overset{2}{A}-C)(\overset{4}{A}-C)} = 0$$

ist. Die vollständige Reihe

$$\frac{1}{\overset{2}{A}-C}\frac{d\overset{2}{A}}{\overset{2}{2q}} + \frac{1}{\overset{3}{A}-C}\frac{d\overset{3}{A}}{\overset{3}{2q}} \ldots\ldots + \frac{1}{\overset{n}{A}-C}\frac{d\overset{n}{A}}{\overset{n}{2q}}$$

ist aber nichts anders als $-2\frac{\delta dS}{\delta C} = -2d\frac{\delta S}{\delta C}$: also wird

$$(2,3) = -2\overset{2}{\lambda}\overset{3}{\lambda}(\overset{2}{A}-\overset{3}{A})\Sigma \frac{\mu\mu}{(\overset{2}{A}-C)(\overset{3}{A}-C)} d\frac{\delta S}{\delta C};$$

wo das Summenzeichen sich auf die über C und μ zu setzenden Zeiger $2, 3, \ldots\ldots n-1$ erstreckt. Demnach verwandelt sich die allegmeine Formel (7) in

$$(13.) \quad ds^2 = dS^2 + 4\sum_{2,3}(\overset{2}{\lambda}\overset{3}{\lambda})^2(\overset{2}{A}-\overset{3}{A})^2\left(\Sigma \frac{\mu\mu}{(\overset{2}{A}-C)(\overset{3}{A}-C)} d\frac{\delta S}{\delta C}\right)^2;$$

wo die mit $\sum_{2,3}$ bezeichnete Summe sich auf alle Combinationen, zu zweien, der obern Zeiger von A und λ erstreckt, und wo die Bedeutungen von λ und μ aus (8) und (12) zu entnehmen sind. Dieser mit $dx_1^2 + dx_2^2 \ldots\ldots + dx_n^2$ vollkommen identische Ausdruck enthält schon in seiner Form die Lösung unserer Aufgabe. Denn er zeigt unmittelbar, dass s zu einem Minimum wird, sobald die $n-2$ Bedingungen $d\frac{\delta S}{\delta C} = 0$ erfüllt sind. Wären nun schon die $n-2$ Constanten C richtig bestimmt, so würden diese Bedingungen, vereint mit der Gleichung $\frac{x_1^2}{\overset{1}{A}_1} \ldots\ldots + \frac{x_n^2}{\overset{1}{A}_n} = 1$, gerade hinreichen, um den Verlauf des Systems $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ in Function *einer* Variabeln anzugeben. Integrirt man aber die genannten Bedingungen zwischen den gegebenen Gränzen, so erhält man die $n-2$ Gleichungen $\frac{\delta S}{\delta C} = 0$, welche ausser $\overset{2}{C}, \overset{3}{C} \ldots\ldots \overset{n-1}{C}$ nichts Unbekanntes enthalten; denn, da die Gränzen bekannt sind, so ist offenbar

$$S = \int \frac{dA^{(2)}}{2q^{(2)}} + \int \frac{dA^{(3)}}{2q^{(3)}} \ldots\ldots + \int \frac{dA^{(n)}}{2q^{(n)}}$$

eine *gegebene* Function von $C^{(2)}, C^{(3)}, \ldots\ldots C^{(n-1)}$. Diese Constanten werden daher durch die Forderung, dass die Variation jener Function verschwinde, gerade bestimmt. Dass dieses aber immer in reeller Weise geschehe, sobald überhaupt die beiden gegebenen Gränzen continuirlich durch reelle Variabelnsysteme $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ verbunden werden können, folgt daraus, dass alsdann alle möglichen, zwischen den gegebenen Gränzen genommenen Integrale $\int \sqrt{(dx_1^2 + dx_2^2 \ldots\ldots + dx_n^2)}$ positiv sind und es daher unter denselben wenigstens *ein* kleinstes geben muss. Giebt es aber ein solches, so werden durch ein einziges Element desselben, vermöge der Gleichungen (1, 4, 5, 8), die Constanten in reeller Weise bestimmt.

Die ersten Integrale der unserer Aufgabe entsprechenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(14.) \quad d\frac{dx_1}{ds} : d\frac{dx_2}{ds} : \ldots\ldots : d\frac{dx_n}{ds} = \frac{x_1}{A_1} : \frac{x_2}{A_2} : \ldots\ldots : \frac{x_n}{A_n}$$

können auch auf folgendem directem Wege gefunden werden. Die Unterschiede der Constanten $C_1, C_2, \ldots\ldots C_n$, von denen eine unbestimmt bleibt, seien resp. denjenigen der gegebenen Grössen $A_1, A_2, \ldots\ldots A_n$ gleich, so ist

$$(A-C)\Sigma\frac{x^2}{AC} = \Sigma\frac{x^2}{C} - 1, \quad (A-C)\Sigma\frac{x\,dx}{AC} = \Sigma\frac{x\,dx}{C}.$$

Wenn man nun die beiden Reihen proportionaler Grössen in (14) das einemal mit $\frac{x_1}{C_1}, \frac{x_2}{C_2} \ldots\ldots \frac{x_n}{C_n}$, das andremal mit $\frac{dx_1}{C_1 ds}, \frac{dx_2}{C_2 ds}, \ldots\ldots \frac{dx_n}{C_n ds}$ multiplicirt und addirt, so erhält man die Proportion

$$\Sigma\frac{x}{C}\,d\frac{dx}{ds} : \Sigma\frac{dx}{C ds}\,d\frac{dx}{ds} = \Sigma\frac{x^2}{AC} : \Sigma\frac{x\,dx}{AC ds}$$

oder

$$\frac{d\Sigma\frac{x\,dx}{C ds} - \Sigma\frac{dx^2}{C ds}}{\Sigma\frac{x^2}{C} - 1} = \frac{\frac{1}{2}\,d\Sigma\frac{dx^2}{C ds^2}}{\Sigma\frac{x\,dx}{C ds}}$$

und nach geschehener Reduction:

$$d\left\{\left(\Sigma\frac{x\,dx}{C ds}\right)^2 - \left(\Sigma\frac{x^2}{C} - 1\right)\Sigma\frac{dx^2}{C ds^2}\right\} = 0.$$

Sieht man das Gesetz, nach welchem das System $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ von einer einzigen Variabeln abhängt, als gegeben an, so ist der eingeklammerte Ausdruck als gebrochene Function von C zu betrachten, die zugleich mit C constant ist, wäh-

rend jene Unabhängige sich verändert, und deren Zähler vom Grade $n-1$ ist. Also wird es im Ganzen auch $n-1$ bestimmte Werthe von C geben, für welche die genannte Function verschwindet. Einer derselben, nämlich A, ist schon durch die Gleichung $\Sigma \frac{x^2}{A} = 1$ gegeben; folglich können noch $n-2$ Werthe von C nach Belieben angenommen werden, für welche die Gleichung

$$(8_2) \qquad \left(\Sigma \frac{x\,dx}{C}\right)^2 - \left(\Sigma \frac{x^2}{C} - 1\right)\Sigma \frac{dx^2}{C} = 0$$

besteht. Dadurch bekommt man gerade die volle Zahl erster Integralgleichungen.

Die bisher gewonnenen Ergebnisse sind durchaus nicht auf den Fall beschränkt, wo die ursprünglichen Variabeln $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ einer einzigen quadratischen Bedingungsgleichung unterworfen sind, sondern sie gelten auch dann noch, wenn entweder alle ursprünglichen Variabeln $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ unter sich unabhängig sind, oder wenn dieselben mehreren quadratischen Gleichungen von der Natur der Gleichungen (1) genügen müssen.

Der erste dieser beiden Fälle ist, wie Herr Prof. *Jacobi* in der erwähnten Abhandlung bemerkt, dadurch besonders merkwürdig, dass für denselben zwei äquivalente Lösungen Statt finden. Bei der einen sind die ursprünglichen Variabeln $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ lineare Functionen irgend einer aus ihnen; die andere beruht auf ähnlichen Gleichungen wie (11), also auf Abelschen Integralen.

Wird die identische Formel (13) für den unbedingten Fall eingerichtet, was n Variabeln $\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \ldots\ldots \overset{n}{A}$ und $n-1$ willkührliche Constanten $\overset{1}{C}, \overset{2}{C}, \ldots\ldots \overset{n-1}{C}$ erfordert: so enthält sie die Lösung der Minimumsaufgabe, zugleich für den unbedingten und für alle bedingten Fälle. Sind z. B. die drei Bedingungen $\overset{1}{A} = \text{const}$, $\overset{2}{A} = \text{const}$, $\overset{3}{A} = \text{const}$ gegeben, so lasse man nur drei arbiträre Constanten eingehen, indem man $\overset{1}{C} = \overset{1}{A}$, $\overset{2}{C} = \overset{2}{A}$, $\overset{3}{C} = \overset{3}{A}$ setzt. Dann bleibt die Formel (13) immer noch richtig, und man wird die Bedingungsgleichungen für das Minimum und den Werth desselben eben so gut daraus entnehmen können, als es vorhin bei der einzigen Bedingung $\overset{1}{A} = \text{const}$ geschah, welche die Setzung $\overset{2}{C} = \overset{1}{A}$ nach sich zog.

Wenn die beiden Systeme von n unabhängigen Variabeln (x_1, x_2, x_n) und $(\overset{1}{A}, \overset{2}{A}, \ldots\ldots \overset{n}{A})$ durch die Gleichung (1) oder (3) verknüpft sind und man setzt

$$qq = \frac{A_1 A_2 A_3 \ldots\ldots A_n}{(A-\overset{1}{C})(A-\overset{2}{C})\ldots\ldots(A-\overset{n-1}{C})},$$

wo A und q nach und nach mit den obern Zeigern $1, 2, 3, \ldots\ldots n$ zu versehen sind; ferner

$$S=\int\frac{dA}{2q}+\int\frac{dA}{2q}+\int\frac{dA}{2q}\ldots\ldots+\int\frac{dA}{2q},$$

$$\lambda\lambda=\frac{(A-C)(A-C)\ldots\ldots(A-C)}{(A-C)(A-A)\ldots\ldots(A-A)}, \quad \lambda\lambda=\frac{(A-C)(A-C)\ldots\ldots(A-C)}{(A-A)(A-A)\ldots\ldots(A-A)}, \quad \text{u. s. w.},$$

$$\mu\mu=-\frac{(A-C)(A-C)\ldots\ldots(A-C)}{(C-C)(C-C)\ldots\ldots(C-C)}, \quad \mu\mu=-\frac{(A-C)(A-C)\ldots\ldots(A-C)}{(A-C)(A-C)\ldots\ldots(A-C)}, \quad \text{u. s. w.},$$

so ist

$$dx_1^2+dx_2^2\ldots\ldots dx_n^2$$
$$=dS^2+4\sum_{1,2}(\lambda\lambda)^2(A-A)^2\left(\Sigma\frac{\mu\mu}{(A-C)(A-C)}\,d\frac{\delta S}{\delta C}\right)^2; \quad (13_2)$$

wo die eingeschlossene Summe sich auf die obern Zeiger $1, 2, \ldots\ldots n-1$ über C und μ, die Summe $\sum_{1,2}$ dagegen auf alle Combinationen, wie $(1, 2)$, die aus den Zeigern $1, 2, \ldots\ldots n$ über A und λ gebildet werden können, sich bezieht. Soll nun das Integral $\int(dx_1^2+dx_2^2\ldots\ldots+dx_n^2)$ zu einem Minimum werden, so müssen $\lambda, \lambda, \ldots\ldots \lambda$ reel, d. h. es muss $A>C>A>C>A>C\ldots\ldots>A>C>A$ sein und die Variabeln $A, A, \ldots\ldots A$ müssen durch die $n-1$ hyperelliptischen Differentialgleichungen mit getrennten Variabeln $d\frac{\delta S}{\delta C}=0$, $d\frac{\delta S}{\delta C}=0$, $\ldots\ldots\ldots$ $d\frac{\delta S}{\delta C}=0$ als Functionen *einer* Variabeln gesetzt sein. Dann ist S der Werth des verlangten Minimums. Vergleicht man die Differentialgleichungen

$$\frac{dA}{2q}+\frac{dA}{2q}\ldots\ldots+\frac{dA}{2q}=dS,$$

$$\frac{1}{A-C}\cdot\frac{dA}{2q}+\frac{1}{A-C}\cdot\frac{dA}{2q}\ldots\ldots+\frac{1}{A-C}\cdot\frac{dA}{2q}=0 \quad [C, C, \ldots\ldots C]$$

mit den identischen Relationen

$$\lambda\lambda+\lambda\lambda\ldots\ldots+\lambda\lambda=1,$$

$$\frac{\lambda\lambda}{A-C}+\frac{\lambda\lambda}{A-C}\ldots\ldots+\frac{\lambda\lambda}{A-C}=0,$$

so ergiebt sich

$$\frac{dA}{2q}=\lambda\lambda\,.\,dS, \quad \frac{dA}{2q}=\lambda\lambda\,.\,dS, \quad \ldots\ldots \quad \frac{dA}{2q}=\lambda\lambda\,.\,dS.$$

Da nun oben für das Minimum die Forderung der Realität der Grössen λ aufgestellt worden ist, so folgt, das beim Wachsen von S die Incremente $\frac{dA}{2q}$ sämmtlich positiv zu nehmen sind.

Setzt man jetzt, wie in (3), $x_1 = V\left(\frac{\overset{1}{A}_2\overset{2}{A}_1\overset{3}{A}_1 \ldots\ldots \overset{n}{A}_1}{(A_1 - A_2) \ldots\ldots (A_1 - A_n)}\right)$ u. s. w.

und bezeichnet die Anfangswerthe dieser Grössen mit a_1, u. s. w., so haben die obigen hyperellyptischen Differentialgleichungen folgende algebraische Integralgleichungen: $x_1 - a_1 = \beta_1 S$, $x_2 - a_2 = \beta_2 S$, $\ldots\ldots$ $x_n - a_n = \beta_n S$,

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 \ldots\ldots + \beta_n^2 = 1,$$

$$\beta_1 = x_1\left(\frac{\overset{1}{\lambda}\overset{1}{\lambda}\overset{1}{q}}{\overset{1}{A}_1} + \frac{\overset{2}{\lambda}\overset{2}{\lambda}\overset{2}{q}}{\overset{2}{A}_1} \ldots\ldots + \frac{\overset{n}{\lambda}\overset{n}{\lambda}\overset{n}{q}}{\overset{n}{A}_1}\right), \quad \text{u. s. w.}$$

Werden die n letzten Gleichungen auf den Anfang des Integrals S bezogen, so sind dadurch die Constanten β_1, β_2, $\ldots\ldots$ β_n in Functionen der Constanten C und der Anfangswerthe der Variabeln A bestimmt.

Setzt man $n = 3$ und betrachtet die ursprünglichen Variabeln x als rechtwinklige Coordinaten eines Puncts im Raume, und die Variabeln A als Parameter der drei durch diesen Punct gehenden confocalen Flächen, so gehören die continuirlich auf einander folgenden Variabelnsysteme (x_1, x_2, x_3), für welche das Integral $\int(V\, dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$ zu einem Minimum wird, einer Geraden an; die Constanten $\overset{1}{C}, \overset{2}{C}$ sind die Parameter der beiden confocalen Flächen, welche diese Gerade berühren, und das Integral $\int \frac{dA}{2q}$ ist ein Stück der durch den Durchschnitt der beiden Flächen $\overset{1}{C}$ und $\overset{2}{C}$ gebildeten Krümmungslinie, enthalten zwischen den beiden Flächen A, welche den Grenzen des Integrals entsprechen. Diese Krümmungslinie wird freilich imaginär, wenn die Flächen $\overset{1}{C}$ und $\overset{2}{C}$ beide zugleich einfache Hyperboloïden sind, oder, wenn sie auch reel ist, kann sie doch von den beiden Flächen A, wofern diese mit einer der beiden C zur gleichen Gattung gehören, nur imaginär geschnitten werden. Dessenungeachtet haben die drei Integrale $\int \frac{dA}{2q}$ immer reelle Werthe, obgleich höchstens nur eines derselben reel angeschaut werden kann. Schliesst man nun das Imaginäre der Lage von der räumlichen Betrachtung nicht aus, so folgt aus dem Vorigen nachstehender geometrische Satz:

Eine Gerade im Raume und ein System confocaler Flächen sind gegeben. Diejenigen zwei von diesen, welche jene berühren, schneiden sich in

einer Krümmungslinie K. Durch zwei beliebige Puncte M, N jener Geraden lege man zwei Elipsoïden A, zwei einfache Hyperboloïden A' und zwei doppelte A", welche auf K resp. die Stücke mn, m'n', m"n" abschneiden: so ist das Stück MN der Geraden, gleich der Summe $mn + m'n' + m"n"$. *Variirt man jene Krümmungslinie, so verschwindet die Variation dieser Summe.*

In einem ganz besondern Falle können alle drei Stücke mn, $m'n'$, $m"n"$ reel angeschaut werden.

Es sei, um mit einer beliebigen Zahl von Variabeln anzufangen:

$$\overset{1}{C}_n = 0\,,\ \overset{2}{C}_{n-1} = 0\,,\ \ldots\ \overset{n-2}{C}_3 = 0\,,\ \overset{n-1}{C}_2 = 0\,,\ \text{so folgt } qq = A_1\,,\ \frac{dA}{2q} = d\sqrt{A_1}\,,$$

$$dS = d\sqrt[1]{A_1} + d\sqrt[2]{A_1} \ldots + d\sqrt[n]{A_1}\,,\ 0 = \frac{d\sqrt[1]{A_1}}{\overset{1}{A_m}} + \frac{d\sqrt[2]{A_2}}{\overset{2}{A_m}} \ldots + \frac{d\sqrt[n]{A_1}}{\overset{n}{A_m}}\,.\ [m=2,3,..n].$$

Die Integrale dieser Differentialgleichungen sind

$$\frac{\beta_1 x_1}{\overset{i}{A_1}} + \frac{\beta_2 x_2}{\overset{i}{A_2}} \ldots + \frac{\beta_n x_n}{\overset{i}{A_n}} = \frac{1}{\sqrt[i]{A_1}},\ [i = 1, 2, \ldots n],$$

wo β_1, β_2, $\ldots$ β_n der Bedingung $\beta_1^2 + \beta_2^2 \ldots + \beta_n^2 = 1$ unterworfene Integrationsconstanten bezeichnen. Wenn man aber die vorliegenden Differentialgleichungen direct integrirt, so ergeben sich die Gleichungen

$$\prod_{i=1}^{i=n} \frac{\sqrt[i]{(A_1 - \sqrt{(A_1 - A_m)})}}{\sqrt[i]{(A_1 + \sqrt{(A_1 - A_m)})}} = \gamma_m\,,\ [m = 2, 3, \ldots n],$$

wo $\sqrt[i]{A_1}$ positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem $\overset{i}{A}$ im Wachsen oder Abnehmen begriffen ist. Das gleichzeitige Bestehen beider Systeme von Integralgleichungen ist um so merkwürdiger, je verwickelter der Zusammenhang zwischen den Constanten β und γ ist, von denen doch die einen Functionen der andern sein müssen.

Derselbe besondere Fall bietet sich im Raume dar, wenn die Gerade durch die beiden Focallinien geht. Die Krümmungslinie K ist dann der Durchschnitt der Ebene der beiden Focallinien und fällt also mit der grössten Axe der confocalen Flächen zusammen. Da nun diese von jeder der drei Gattungen confocaler Flächen geschnitten wird, so haben alle drei Stücke mn, $m'n'$, $m"n"$ reelle Lagen. Liegt insbesondere der Punct M auf der Focalellipse und N auf der Focalhyperbel, so lege man durch M, in der Ebene der ersten, eine mit ihr confocale Hyperbel, welche die grösste Axe in $m"$ schneidet, und durch N, in der Ebene der letzten, eine mit ihr confocale Ellipse, welche die grösste Axe in n schneidet: dann ist $MN = m"n$.

Bern, im April 1849.

3.

Eine eigenthümliche Eliminations-Rechnung.

(Vom *Herausgeber.*)

In einer Abhandlung *Lagrangés* über die Theorie des *Schalles*, im ersten Bande der Turiner Miscell. phil. math. vom Jahre 1769, kommt die Aufgabe vor:

Aus den $m-1$ Gleichungen

$$(1.)\quad \begin{cases} y_1 \sin\varphi + y_2 \sin 2\varphi + y_3 \sin 3\varphi \;\cdots\; + y_{m-1}\sin(m-1)\varphi = s_1, \\ y_1 \sin 2\varphi + y_2 \sin 4\varphi + y_3 \sin 6\varphi \;\cdots\; + y_{m-1}\sin 2(m-1)\varphi = s_2, \\ y_1 \sin 3\varphi + y_2 \sin 6\varphi + y_3 \sin 9\varphi \;\cdots\; + y_{m-1}\sin 3(m-1)\varphi = s^3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1\sin(m-1)\varphi + y_2\sin 2(m-1)\varphi + y_3\sin 3(m-1)\varphi \cdots + y_{m-1}\sin(m-1)^2\varphi = s_{m-1}, \end{cases}$$

wo φ der $m$te Theil von zwei rechten Winkeln, also

$$(2.)\qquad m\varphi = \pi$$

ist, die unbekannten Coefficienten y_1, y_2, y_3 ····· y_{m-1} durch die gegebenen Grössen s_1, s_2, s_3 ····· s_{m-1} auszudrücken.

Da man zwischen den $m-1$ Gleichungen $m-2$ von den $m-1$ Grössen y zu eliminiren haben würde, um eine einzelne Gleichung zu finden, die nur noch die eine, nicht eliminirte Grösse enthält und aus welcher diese dann genommen werden könnte, so ist die Aufgabe wesentlich eine *Eliminations-Aufgabe.* Da aber die Zahl der Gleichungen *unbestimmt ist*, also *sehr* gross sein kann, so würde die Rechnung sehr weitläuftig und bald unausführbar sein.

Lagrange bedient sich deshalb, um die Aufgabe zu lösen, eines eigenthümlichen Verfahrens. Dasselbe ist zwar sehr sinnreich, aber ungemein weitläufig; es nimmt, nächst unbestimmten Coefficienten, goniometrische Rechnungen, den Cotesischen Lehrsatz, Sätze aus der Theorie der Gleichungen und der rücklaufenden Reihen, und Differentialrechnung zu Hülfe.

Folgendes Verfahren ist einfacher und bedarf nur allein goniometrischer Rechnungen. Der Herausgeber dieses Journals hat es zwar schon vor **23** Jahren niedergeschrieben; auch mögen einzelne Mathematiker schon selber darauf gekommen sein: da es indessen, so viel dem Herausgeber bekannt, noch nicht öffentlich mitgetheilt worden ist und wenig Raum einnimmt, so möge es hier eine kleine Stelle finden.

1.

Es bedeute φ einstweilen einen *beliebigen* Winkel und es sei

$$(3.)\quad \beta_1 = \tfrac{1}{2}\varphi\ ,\ \beta_2 = \tfrac{3}{2}\varphi\ ,\ \beta_3 = \tfrac{5}{2}\varphi\ ,\ \beta_4 = \tfrac{7}{2}\varphi = \ldots\ \beta_m = \frac{2m-1}{2}\varphi\ ,$$

so ist

$$(4.)\quad \beta_2-\beta_1 = \varphi\ ,\ \beta_3-\beta_2 = \varphi\ ,\ \beta_4-\beta_3 = \varphi\ \ldots\ \beta_m-\beta_{m-1} = \varphi\ ,$$
$$\beta_1-\beta_m = \frac{1-2m+1}{2}\varphi = -(m-1)\varphi \quad \text{und}$$

$$(5.)\quad \beta_2+\beta_1 = 2\varphi\ ,\ \beta_3+\beta_2 = 4\varphi\ ,\ \beta_4+\beta_3 = 6\varphi\ \ldots\ \beta_m+\beta_{m-1} = 2(m-1)\varphi\ ,$$
$$\beta_1+\beta_m = \frac{1+2m-1}{2}\varphi = m\varphi\ .$$

Nun ist für zwei beliebige Winkel $\varkappa$ und λ:

$$\begin{aligned}\cos(\varkappa+\lambda)\sin(\varkappa-\lambda) &= (\cos\varkappa\cos\lambda - \sin\varkappa\sin\lambda)(\sin\varkappa\cos\lambda - \cos\varkappa\sin\lambda)\\ &= \cos\varkappa\sin\varkappa\cos\lambda^2 - \cos\varkappa^2\sin\lambda\cos\lambda - \sin\varkappa^2\sin\lambda\cos\lambda + \cos\varkappa\sin\varkappa\sin\lambda^2\\ &= \cos\varkappa\sin\varkappa - \cos\lambda\sin\lambda\end{aligned}$$

oder auch

$$(6)\quad \cos(\varkappa+\lambda)\sin(\varkappa-\lambda) = \tfrac{1}{2}\sin 2\varkappa - \tfrac{1}{2}\sin 2\lambda.$$

Setzt man hierin der Reihe nach, $\varkappa = \beta_2, \beta_3, \beta_4 \ldots\ldots \beta_m, \beta_1$, und zugleich $\lambda = \beta_1, \beta_2, \beta_3 \ldots\ldots \beta_m$ und dann die obigen Werthe der β aus (4 u. 5), so erhält man

$$(7.)\quad \begin{cases}
\cos(\beta_2+\beta_1)\sin(\beta_2-\beta_1) \text{ oder } \cos 2\varphi\sin\varphi = \tfrac{1}{2}\sin 2\beta_2 - \tfrac{1}{2}\sin 2\beta_1\ ,\\
\cos(\beta_3+\beta_2)\sin(\beta_3-\beta_2) \text{ oder } \cos 4\varphi\sin\varphi = \tfrac{1}{2}\sin 2\beta_3 - \tfrac{1}{2}\sin 2\beta_2\ ,\\
\cos(\beta_4+\beta_3)\sin(\beta_4-\beta_3) \text{ oder } \cos 6\varphi\sin\varphi = \tfrac{1}{2}\sin 2\beta_4 - \tfrac{1}{2}\sin 2\beta_3\ ,\\
\ldots\ldots\ldots

Die *Summe* aller dieser Gleichungen giebt, weil rechts Alles sich aufhebt:

$$[\cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \cos 6\varphi \ldots\ldots + \cos 2(m-1)\varphi]\sin\varphi - \cos m\varphi \sin(m-1)\varphi = 0$$

und daraus folgt

$$(8.)\quad \cos 2\varphi + \cos 4\varphi + \cos 6\varphi \ldots\ldots + \cos 2(m-1)\varphi = \frac{\cos m\varphi \sin(m-1)\varphi}{\sin\varphi},$$

oder auch, weil $\cos 2\varphi = \cos\varphi^2 - \sin\varphi^2 = 1 - 2\sin\varphi^2$, $\cos 4\varphi = 1 - 2\sin 2\varphi^2$ u. s. w. ist:

$$1-2\sin\varphi^2+1-2\sin 2\varphi^2+1-2\sin 3\varphi^2 \ldots\ldots +1-2\sin(m-1)\varphi^2 = \frac{\cos m\varphi \sin(m-1)\varphi}{\sin\varphi}$$

oder

$$(9.)\quad \sin\varphi^2+\sin 2\varphi^2+\sin 3\varphi^2 \ldots\ldots + \sin(m-1)\varphi^2 = \tfrac{1}{2}(m-1) - \frac{\cos m\varphi \sin(m-1)\varphi}{2\sin\varphi}.$$

Schreibt man in diesem letzten Ausdrucke $\frac{1}{2}n\varphi$ statt φ, wo n eine *beliebige ganze* Zahl sein mag, so ergiebt sich

$$(10.)\quad \sin\tfrac{1}{2}n\varphi^2+\sin n\varphi^2+\sin\tfrac{3}{2}n\varphi^2 \ldots\ldots +\sin\tfrac{1}{2}n(m-1)\varphi^2 = \tfrac{1}{2}(m-1) - \frac{\cos\frac{1}{2}nm\varphi \sin\frac{1}{2}n(m-1)\varphi}{2\sin\frac{1}{2}n\varphi}.$$

2.

Nun sei der *willkührliche* Winkel φ, wie in (2),

$$(11.)\quad \varphi = \frac{\pi}{m},$$

so ist

$$\tfrac{1}{2}nm\varphi = \tfrac{1}{2}n\pi \text{ und } \tfrac{1}{2}n(m-1)\varphi = \tfrac{1}{2}n\pi - \tfrac{1}{2}n\varphi, \text{ also}$$

$$(12.)\quad \cos\tfrac{1}{2}nm\varphi = \cos\tfrac{1}{2}n\pi \text{ und}$$

$$(13.)\quad \sin\tfrac{1}{2}n(m-1)\varphi = \sin\tfrac{1}{2}n\pi\cos\tfrac{1}{2}n\varphi - \cos\tfrac{1}{2}n\pi\sin\tfrac{1}{2}n\varphi;$$

folglich ist in (10):

$$(14.)\quad \frac{\cos\frac{1}{2}nm\varphi \sin\frac{1}{2}n(m-1)\varphi}{2\sin\frac{1}{2}n\varphi} = \frac{\cos\frac{1}{2}n\pi \sin\frac{1}{2}n\pi\cos\frac{1}{2}n\varphi - \cos\frac{1}{4}n\pi^2\sin\frac{1}{2}n\varphi}{2\sin\frac{1}{2}n\varphi}$$
$$= \frac{\frac{1}{2}\sin n\pi\cos\frac{1}{2}n\varphi}{2\sin\frac{1}{2}n\varphi} = \tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}n\pi^2,$$

oder, weil $\sin n\pi$ für *jedes* ganzzalige n gleich Null ist:

$$(15.)\quad \frac{\cos\frac{1}{2}nm\varphi \sin\frac{1}{2}n(m-1)\varphi}{2\sin\frac{1}{2}n\varphi} = -\tfrac{1}{2}\cos\tfrac{1}{2}n\pi^2.$$

Mithin ist in (10) für jedes ganzzalige n, welches *nicht Null* ist,

(16.) $\sin\frac{1}{2}n\varphi^2+\sin n\varphi^2+\sin\frac{3}{2}n\varphi^2\ldots\ldots+\sin\frac{1}{2}n(m-1)\varphi^2=\frac{1}{2}(m-1)+\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}n\pi^2.$

Für $n=0$ gilt dieser Ausdruck *nicht*; denn dann ist in (14) zwar $\sin n\pi$ gleich Null, aber auch $2\sin\frac{1}{2}n\varphi$ ist gleich Null; also ist dann rechts in (14) $\frac{\frac{1}{2}\sin n\pi\cos\frac{1}{2}n\varphi}{2\sin\frac{1}{2}n\varphi}$ nicht Null, sondern $=\frac{0}{0}$.

Ist in (16) *n gerade* so ist $\cos\frac{1}{2}n\pi=\pm1$, also $\cos\frac{1}{2}n\pi^2=1$; ist *n ungerade*, so ist $\cos\frac{1}{2}n\pi=0$. Also giebt (16)

(17.) $\sin\frac{1}{2}n\varphi^2+\sin n\varphi^2+\sin\frac{3}{2}n\varphi^2\ldots\ldots+\sin\frac{1}{2}n(m-1)\varphi^2\begin{cases}=\frac{1}{2}m, & \text{wenn } n \textit{ gerade} \text{ und}\\ =\frac{1}{2}(m-1) & \text{wenn } n \textit{ ungerade} \text{ ist.}\end{cases}$

3.

Es ist ferner für zwei *beliebige* Winkel $\varkappa$ und λ:

$$\sin\tfrac{1}{2}(\varkappa+\lambda)^2-\sin\tfrac{1}{2}(\varkappa-\lambda)^2$$
$$=(\sin\tfrac{1}{2}\varkappa\cos\tfrac{1}{2}\lambda+\cos\tfrac{1}{2}\varkappa\sin\tfrac{1}{2}\lambda)^2-(\sin\tfrac{1}{2}\varkappa\cos\tfrac{1}{2}\lambda-\cos\tfrac{1}{2}\varkappa\sin\tfrac{1}{2}\lambda)^2$$
$$=4\sin\tfrac{1}{2}\varkappa\cos\tfrac{1}{2}\varkappa\sin\tfrac{1}{2}\lambda\cos\tfrac{1}{2}\lambda \quad \text{oder}$$

(18.) $\sin\frac{1}{2}(\varkappa+\lambda)^2-\sin\frac{1}{2}(\varkappa-\lambda)^2=\sin\varkappa\sin\lambda.$

Man setze

(19.) $\varkappa=\varepsilon\varphi$ und $\lambda=\mu\varphi$,

wo ε und μ *beliebige* ganze Zahlen sind, so giebt (18)

(20.) $\sin\varepsilon\varphi\sin\mu\varphi=\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\mu)\varphi^2-\sin\frac{1}{2}(\varepsilon-\mu)\varphi^2.$

Setzt man nun in (17) zuerst $n=\varepsilon+\mu$, so ergiebt sich für $\varphi=\frac{\pi}{m}$:

(21.) $\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\mu)\varphi^2+\sin(\varepsilon+\mu)\varphi^2+\sin\frac{3}{2}(\varepsilon+\mu)\varphi^2\cdots+\sin\frac{1}{2}(\varepsilon+\mu)(m-1)\varphi^2\begin{cases}=\frac{1}{2}m, & \text{wenn } \varepsilon+\mu \textit{ gerade} \text{ und}\\ =\frac{1}{2}(m-1) & \text{wenn } \varepsilon+\mu \textit{ ungerade} \text{ ist.}\end{cases}$

Dieser Ausdruck gilt für *jedes* $n=\varepsilon+\mu$, welches *nicht Null* ist; also auch für $\varepsilon=\mu$.

Setzt man $n=\varepsilon-\mu$, so ergiebt sich

(22.) $\sin\frac{1}{2}(\varepsilon-\mu)\varphi^2+\sin(\varepsilon-\mu)\varphi^2+\sin\frac{3}{2}(\varepsilon-\mu)\varphi^2\cdots+\sin\frac{1}{2}(\varepsilon-\mu)(m-1)\varphi^2\begin{cases}=\frac{1}{2}m, & \text{wenn } \varepsilon-\mu \textit{ gerade} \text{ und}\\ =\frac{1}{2}(m-1) & \text{wenn } \varepsilon-\mu \textit{ ungerade} \text{ ist.}\end{cases}$

Dieser Ausdruck gilt ebenfalls für *jedes* $n=\varepsilon-\mu$, welches *nicht Null* ist, aber *nicht* für $n=0$, also *nicht* für $\varepsilon=\mu$.

Die beiden Ausdrücke (21 und 22) gelten demnach *zugleich* zwar sonst

für *jeden* Werth von ε und μ, aber *nicht* für ε *gleich* μ. Für $\varepsilon = \mu$ gilt *nur* der Ausdruck (21) allein.

Nun sind $\varepsilon + \mu$ und $\varepsilon - \mu$ immer *zugleich* gerade, oder ungerade, was auch ε und μ sein mögen; dann sind ε und μ *beide* gerade, oder *beide* ungerade, so sind $\varepsilon + \mu$ und $\varepsilon - \mu$ *beide* gerade; sind ε und μ, das eine gerade, das andere ungerade, so sind $\varepsilon + \mu$ und $\varepsilon - \mu$ *beide* ungerade. Also giebt (22) von (21) abgezogen, für *alle* Werthe von ε und μ, die einander *nicht gleich* sind, *immer* Null, nemlich entweder $\frac{1}{2}m - \frac{1}{2}m = 0$, oder $\frac{1}{2}(m-1) - \frac{1}{2}(m-1) = 0$. Demnach ist immer

$$(23.)\quad \left\{\begin{array}{l} +\sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\mu)\varphi^2 + \sin(\varepsilon+\mu)\varphi^2 + \sin\tfrac{3}{2}(\varepsilon+\mu)\varphi^2 \cdots\cdots + \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\mu)(m-1)\varphi^2 \\ -\sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\mu)\varphi^2 - \sin(\varepsilon-\mu)\varphi^2 - \sin\tfrac{3}{2}(\varepsilon-\mu)\varphi^2 \cdots\cdots - \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\mu)(m-1)\varphi^2 \end{array}\right\} = 0,$$

für alle ε und μ, die einander nicht gleich sind.

Zufolge (20) ist

$$(24.)\quad \left\{\begin{array}{l} \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\mu)\varphi^2 - \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\mu)\varphi^2 = \sin\varepsilon\varphi\ \sin\mu\varphi\,, \\ \sin\ (\varepsilon+\mu)\varphi^2 - \sin(\varepsilon-\mu)\varphi^2 = \sin 2\varepsilon\varphi \sin 2\mu\varphi\,, \\ \sin\tfrac{3}{2}(\varepsilon+\mu)\varphi^2 - \sin\tfrac{3}{2}(\varepsilon-\mu)\varphi^2 = \sin 3\varepsilon\varphi \sin 3\mu\varphi\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon+\mu)(m-1)\varphi^2 - \sin\tfrac{1}{2}(\varepsilon-\mu)(m-1)\varphi^2 = \sin(m-1)\varepsilon\varphi \sin(m-1)\mu\varphi\,; \end{array}\right.$$

also giebt (23)

$$(25.)\quad \begin{aligned} &\sin\varepsilon\varphi \sin\mu\varphi + \sin 2\varepsilon\varphi \sin 2\mu\varphi + \sin 3\varepsilon\varphi \sin 3\mu\varphi \\ &\qquad \cdots\cdots + \sin(m-1)\varepsilon\varphi \sin(m-1)\mu\varphi = 0\,, \end{aligned}$$

für *alle* ε und μ, die einander *nicht gleich* sind. Für ε *gleich* μ gilt nur der Ausdruck (21), und derselbe giebt, da für $\varepsilon = \mu$, $\varepsilon + \mu$ eine *gerade* Zahl ist, zufolge (21):

$$(26.)\quad \sin\mu\varphi^2 + \sin 2\mu\varphi^2 + \sin 3\mu\varphi^2 \cdots\cdots + \sin(m-1)\mu\varphi^2 = \tfrac{1}{2}m$$

für jedes beliebige $\mu > 0$ und $< m$.

4.

Vermittels der beiden allgemeinen Ausdrücke (25 und 26) lässt sich nun die Auflösung der Aufgabe unmittelbar wie folgt lösen.

Man multiplicire nemlich die gegebenen Gleichungen (1) der Reihe nach mit $\sin\mu\varphi$, $\sin 2\mu\varphi$, $\sin 3\mu\varphi \cdots\cdots \sin(m-1)\mu\varphi$, wo μ eine beliebige Zahl zwischen 0 und m ist, nehme die *Summe* von Allem, schreibe aber jedesmal die

gerade *unter einander* stehenden Glieder je in eine horizontale Reihe, so erhält man:

$$
\left\{\begin{array}{l}
y_1\ [\sin\ \varphi \sin \mu\varphi + \sin 2\varphi \sin 2\mu\varphi + \sin 3\varphi \sin 3\mu\varphi \\
\qquad \cdots\cdots + \sin(m-1)\varphi \sin(m-1)\mu\varphi] \\
+y_2\ [\sin 2\varphi \sin \mu\varphi + \sin 4\varphi \sin 2\mu\varphi + \sin 6\varphi \sin 3\mu\varphi \\
\qquad \cdots\cdots + \sin 2(m-1)\varphi \sin(m-1)\mu\varphi] \\
+y_3\ [\sin 3\varphi \sin \mu\varphi + \sin 6\varphi \sin 2\mu\varphi + \sin 9\varphi \sin 3\mu\varphi \\
\qquad \cdots\cdots + \sin 3(m-1)\varphi \sin(m-1)\mu\varphi] \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+y_\mu\ [\sin \mu\varphi^2 \qquad\qquad + \sin 2\mu\varphi^2 \qquad + \sin 3\mu\varphi^2 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots\cdots \sin(m-1)\mu\varphi^2 \qquad\qquad] \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
+y_{m-1}[\sin(m-1)\varphi \sin \mu\varphi + \sin 2(m-1)\varphi \sin 2\mu\varphi + \sin 3(m-1)\varphi \sin 3\mu\varphi \\
\qquad \cdots\cdots \sin(m-1)^2\varphi \sin(m-1)\mu\varphi] \\
=\quad s_1 \sin \mu\varphi + s_2 \sin 2\mu\varphi + s_3 \sin 3\mu\varphi \quad \cdots\cdots \quad + s_{m-1} \sin(m-1)\mu\varphi.
\end{array}\right. \tag{27.}
$$

Nun giebt die Gleichung (25), wenn man darin der Reihe nach $\varepsilon = 1, 2, 3 \ldots\ldots m-1$ setzt, (mit Ausnahme von $\varepsilon = \mu$, für welchen Werth von ε die Gleichung (25) *nicht* gilt) grade die Factoren von $y_1, y_2, y_3 \ldots\ldots y_{m-1}$ in (27) (mit Ausnahme von y_μ). Alle diese Factoren sind demnach zufolge (25) *gleich Null.* Der Factor von y_μ in (27) seinerseits ist nach (26) gleich $\frac{1}{2}m$. Also bleibt von (27) nichts weiter übrig als

$$
y_\mu \cdot \tfrac{1}{2}m = s_1 \sin \mu\varphi + s_2 \sin 2\mu\varphi + s_3 \sin 3\mu\varphi \cdots\cdots + s_{m-1} \sin(m-1)\mu\varphi\,, \tag{28.}
$$

und daraus folgt

$$
y_\mu = \frac{2}{m}\left[s_1 \sin \mu\varphi + s_2 \sin 2\mu\varphi + s_3 \sin 3\mu\varphi \cdots\cdots + s_{m-1} \sin(m-1)\mu\varphi\right]. \tag{29.}
$$

Dies ist der gesuchte Ausdruck *aller* y in (1); denn es kann darin $\mu = 1, 2, 3, 4 \cdots\cdots m-1$ gesetzt werden.

Das Ergebniss (29) stimmt genau mit dem, welches *Lagrange* findet, überein.

4.

Ueber die Reste, welche bei der Anwendung des Sturmschen Satzes vorkommen.

(Von dem Herrn Dr. *Heilermann* zu Cöln.)

---

§. 1.

Durch den *Sturm*schen Satz hat die Bestimmung der realen Wurzeln höherer Gleichungen theoretisch jene Vollendung erreicht, welcher sie fähig ist, und eine Arbeit von *Cauchy* hat für die imaginären Wurzeln Dasselbe geleistet. Dagegen hat die practische Auflösung der Gleichungen keinen ähnlichen Gewinn aus den erwähnten Leistungen dieser berühmten Mathematiker gezogen, weil die Berechnung der zahlreichen Coefficienten, welche in den Resten vorkommen, eine zu ausgedehnte Arbeit ist und der eigentlichen Bestimmung der Wurzeln vorangehen muss; auch giebt der *Sturm*sche Satz keinen Aufschluss über den unmittelbaren Zusammenhang der Coefficienten der Gleichung mit denen der Reste, und noch weniger über die Beziehungen jener Coefficienten zu den Wurzeln der Gleichung. Letzterer Mangel rührt namentlich von dem bisher allein angewendeten Verfahren des grössten gemeinsamen Theilers her. In dem Folgenden theile ich ein anderes mit, welches in dieser Beziehung mehr zu befriedigen und auch für die practische Berechnung dem üblichen nicht nachzustehen scheint.

In einer frühern Arbeit, (Band 33 dieses Journals) habe ich gezeigt, wie der Quotient $\dfrac{\sum\limits_0^m A_\alpha \cdot x^\alpha}{\sum\limits_0^n B_\alpha \cdot x^\alpha}$ in den Kettenbruch $F(a_0, a_r) = 1 : (a_0 + x : (a_1 + x : (a_2 + \ldots + x : a_r)$

$$= \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{x}{a_1 + \cfrac{x}{a_2 + \cdots + \cfrac{x}{a_r}}}}$$

entwickelt werden kann. Es ist a. a. O. dargethan, dass:

$$\frac{\sum_0^m A_\alpha \cdot x^\alpha}{\sum_0^n B_\alpha \cdot x^\alpha} = F(a_0, a_{2m}) \text{ cond } m \geqq n, \text{ und } \frac{\sum_0^m A_\alpha \cdot x^\alpha}{\sum_0^n B_\alpha \cdot x^\alpha} = F(a_0, a_{2n-1}) \text{ cond } m < n$$

Für den *Sturm*schen Satz ist $m = n - 1$, also

$$(1.) \qquad \frac{\sum_0^{n-1} A_\alpha \cdot x^\alpha}{\sum_0^n B_\alpha \cdot x^\alpha} = F(a_0, a_{2n-1}) .$$

Mit Anwendung der dort eingeführten Zeichen ist dann:

$$(2.) \quad \frac{\sum_0^{n-1} A_\alpha \cdot x^\alpha}{\sum_0^n B_\alpha \cdot x^\alpha} = \frac{(a_1, a_\mu)_0 + (a_1, a_\mu)_2 \cdot x + \cdots + (a_1, a_\mu)_{2\alpha} \cdot x^\alpha + \cdots + (a_1, a_\mu)_{\mu-1} \cdot x^{n-1}}{(a_0, a_\mu)_0 + (a_0, a_\mu)_2 \cdot x + \cdots + (a_0, a_\mu)_{2\alpha} \cdot x^\alpha + \cdots + (a_0, a_\mu)_{\mu-1} \cdot x^{n-1} + (a_0, a_\mu)_{\mu+1} \cdot x};$$

wo der Kürze wegen $2n - 1 = \mu$ gesetzt ist.

Offenbar wird diese Gleichung befriedigt, wenn $(a_1, a_\mu)_{2s} = A_s$ und $(a_0, a_\mu)_{2s} = B_s$ für alle Werthe von $s = 0$ bis $s = n - 1$ in der ersten Bestimmung und bis $s = n$ in der andern ist; denn es werden dadurch beide Quotienten identisch. Es liesse sich aber auch leicht zeigen, dass, abgesehen von einem, allen Coefficienten A und B gemeinsamen Factor, nur auf die angeführte Weise der Gleichung (1) Genüge geschehen kann. Aber auch dieser gemeinsame Factor kommt zu Statten. Es ist nämlich, seiner Entstehung nach, der Coefficient $(a_0, a_\mu)_{\mu+1} = 1$: also muss auch $B_{\frac{1}{2}(\mu+1)} = B_n = 1$ gesetzt werden. Nach Abzug dieser Gleichung, bleiben zur Berechnung der $\mu + 1 = 2n$ Theilnenner a des Kettenbruchs noch folgende:

$$(3.) \quad \begin{cases} (a_0, a_\mu) = B_0; \ (a_0, a_\mu)_2 = B_1; \cdots (a_0, a_\mu)_{2s} = B_s; \cdots (a_0, a_\mu)_{\mu-3} = B_{n-2}; \\ \qquad\qquad (a_0, a_\mu)_{\mu-1} = B_{n-1}; \\ (a_1, a_\mu)_0 = A_0; \ (a_1, a_\mu)_2 = A_1; \cdots (a_1, a_\mu)_{2s} = A_s; \cdots (a_1, a_\mu)_{\mu-3} = A_{n-2}; \\ \qquad\qquad (a_1, a_\mu)_{\mu-1} = A_{n-1}. \end{cases}$$

Gesetzt nun durch die Auflösung dieser Gleichungen, deren Anzahl $2n$ für die Bestimmung der $2n$ Theilnenner nöthig und hinreichend ist, wären diese sämmtlich gefunden, so wäre damit scheinbar für die Anwendung des *Sturm*schen Satzes noch wenig geschehen; denn einmal unterscheidet sich der Kettenbruch von dem, welchen *Sturm* anwandte, schon seiner allgemeinen Form nach, und dann sind es auch gar nicht die Theilnenner, welche bei der Auflösung numeri-

scher Gleichungen in Betracht kommen, sondern die Reste, welche bei den verschiedenen Divisionen bleiben.

§. 2.

Die Form des Kettenbruchs, welche Sturm anwendet, geht aus der obigen hervor, wenn man in (1) x^{-1} statt x setzt. Dadurch erhält man zunächst

$$\frac{\sum_0^{n-1} A_\alpha \cdot x^{-\alpha}}{\sum_0^{n} B_\alpha \cdot x^{-\alpha}} = 1 : (a_0 + x^{-1} : (a_1 + x^{-1} : (a_2 + \cdots + x^{-1} : a_\mu)\,.$$

Multiplicirt man noch links und rechts mit x^{-1} und schafft dann rechts die negativen Exponenten durch Multiplication weg, so erhält man nach einander:

$$\frac{\sum_0^{n-1} A_\alpha \cdot x^{-\alpha-1}}{\sum_0^{n} B_\alpha \cdot x^{-\alpha}} = x^{-1} : (a_0 + x^{-1} : (a_1 + x^{-1} : (a_2 + x^{-1} : (a_3 + \cdots + x^{-1} : (a_{\mu-1} + x^{-1} : a^\mu)$$

$$= 1 : (a_0 x + 1 : (a_1 + 1 : (a_2 x + 1 : (a_3 + \cdots + 1 : (a_{\mu-1} \,.\, x + 1 : a_\mu)\,.$$

Bezeichnet man diesen Kettenbruch, von dem Theilbruche $1 : a_{2r-1}$ an bis zum Ende, mit R_{2r-1}, so ist

$$R_{2r-1} = \frac{1}{a_{2r-1} + \dfrac{1}{a_{2r} \,.\, x + R_{2r+1}}}$$

und eine leichte Entwicklung giebt

$$R_{2r-1} = \frac{1}{a_{2r-1}} - \frac{1 : a_{2r-1}^2}{a_{2r} \cdot x + 1 : a_{2r-1} + R_{2r-1}}\,.$$

Wenn man in die Gleichung für r der Reihe nach die ganzen Zahlen von 1 bis $n-1$ setzt und die erhaltenen Relationen mit einander verbindet so ergiebt sich

(4.)
$$\begin{cases} \dfrac{\sum_0^{n-1} A_\alpha \cdot x^{-\alpha-1}}{\sum_0^{n} B_\alpha \, x^{-\alpha}} = \dfrac{1}{a_0 \cdot x + 1 : a_1 - \dfrac{1 : a_1^{\,2}}{a_2 \cdot x + 1 : a_1 + 1 : a_3 - \dfrac{1 : a_3^{\,2}}{a_4 \cdot x + 1 : a_3 + 1 : a_5 - \cdots - \dfrac{1 : a^2_{\mu-2}}{a_{\mu-1} \cdot x + 1 : a_{\mu-2} + 1 : a_\mu}}}} \\[2ex] \dfrac{\sum_0^{n-1} A_\alpha \cdot x^{n-\alpha-1}}{\sum_0^{n} B_\alpha \cdot x^{n-\alpha}} = \dfrac{a_1}{a_0 a_1 \cdot x + 1 - \dfrac{a_3}{a_1 a_2 a_3 \cdot x + a_1 + a_3 - \dfrac{a_1 a_5}{a_3 a_4 a_5 x + a_3 + a_5 - \cdots - \dfrac{a_{\mu-4} \cdot a_\mu}{a_{\mu-2} \cdot a_{\mu-1} \cdot a_\mu \cdot x + a_{\mu-2} + a_\mu}}}} \end{cases}$$

$$= \cfrac{a_1 : x}{a_5 a_1 + 1 : x - \cfrac{a_3 : x^2}{a_1 a_2 a_3 + (a_1 + a_3 : x - \cfrac{a_1 a_5 : x^2}{a_3 a_4 a_5 + (a_3 + a_5) : x - \ddots}}}$$

$$\ddots - \cfrac{a_{\mu-4} \cdot a_\mu : x^2}{a_{\mu-2} \cdot a_{\mu-1} \cdot a_\mu + (a_{\mu-2} + a_\mu) : x} .$$

Wenn man noch hinzufügt, dass

$$a_{2r-1} \cdot a_{2r} \cdot a_{2r+1} + (a_{2r-1} + a_{2r+1}) x^{-1} = \Sigma\,(a_{2r-1}) a_{2r+1})_{2\alpha} \cdot x^{-\alpha}$$

ist und in die letzte Darstellung des hergeleiteten Kettenbruchs wieder x^{-1} statt x setzt, so geht sie in

$$\frac{\sum_0^{n-1} A_\alpha \cdot x^\alpha}{\sum_0^n B_\alpha \cdot x^\alpha} = a_1 : [\Sigma(a_0, a_1)_{2\alpha} \cdot x^\alpha - a_3 x^2 : [\Sigma(a_1, a_3)_{2\alpha} \cdot x^\alpha - a_1 a_5 x^2 : [\Sigma(a_3, a_5)_{2\alpha} \cdot x^\alpha -$$
$$\cdots\cdots - a_{\mu-4} \cdot a_\mu x^2 : \Sigma(a_{\mu-2)} a_\mu)_{2\alpha} \cdot x^\alpha] .$$

über. Da $\dfrac{\sum_0^{n-1} A_\alpha \cdot x^\alpha}{\sum_0^n B_\alpha \cdot x_\alpha} = \dfrac{\Sigma(a_1, a_\mu)_{2\alpha} \cdot x^\alpha}{\Sigma(a_0, a_\mu)_{2\alpha} \cdot x_\alpha}$ nach Gleichung **(2)** ist, so zeigt die letzte Darstellung, dass die Theilnenner dieses Kettenbruchs nach derselben Bildungsregel aus drei auf einander folgenden Theilnennern hervorgehen, wie der Divisor des gegeben Quotienten aus allen.

Der Kettenbruch in (4) ist nun zwar nicht gleich dem gegebenen Quotienten (1) selbst, aber doch einem von derselben Allgemeinheit, der sich von jenem nur durch den entgegengesetzten Potenzenfortschritt unterscheidet, und hat die Form, wie sie für den *Sturm*schen Satz verlangt wird. Dies Alles freilich gilt nur unter der Voraussetzung, dass die Gleichungen (3) nach den Theilnennern a aufgelöset, oder diese auf irgend einem andern Wege berechnet sind. Es werden aber gerade bei dem *Sturm*schen Satze die Theilnenner, deren Form hier $a_{2r-1} \cdot a_{2r} \cdot a_{2r+1} \cdot x + a_{2r-1} + a_{2r+1}$ ist, nicht benutzt, und nur die Reste, welche bei der beiläufigen Entwicklung eines Kettenbruchs entstehen, kommen in Betracht. Diese jedoch können aus dem obigen Kettenbruch nicht unmittelbar erkannt werden.

§. 3.

Wie einerseits die Theilnenner durch fortgesetzte Division der Reste in einander entstehen, so lassen sich auch umgekehrt diese aus jenen wieder zusammensetzen. Es ist dazu nur nöthig, vom Ende des Kettenbruchs anfangend, zwei, drei, vier u. s. w. Theilbrüche in ihrem Zusammenhange aufzufassen und das Ganze in die Form eines Quotienten zu bringen. Dividend und Divisor die-

ses Quotienten sind dann zwei aufeinander folgende Reste, und die ganze algebraische Function von x, welche bei einem Quotienten als Divisor vorkommt, muss bei dem folgenden als Dividend erscheinen; höchstens mit einem Factor, welcher auf das Zeichen keinen Einfluss hat. Indess die Entwicklung des Kettenbruchs (4) aus der Form (1) giebt im Allgemeinen über die Bildung der Reste Aufschluss und macht jene weitläufigen Rechnungen überflüssig. Es ist nach dem vorigen Paragraph

$$\textbf{(5.)}\quad R_{2r-1} - \frac{1}{a_{2r-1}} = -\frac{1 : a^2_{2r-1}}{a_{2r}\cdot x + 1 : a_{2r-1} + R_{2r+1}}\ ,$$

und da die rechte Seite den Kettenbruch (4) vom Theilbruche $\dfrac{1 : a^2_{2r-1}}{a_{2r}\cdot x + 1 : a_{2r-1} + 1 : a_{2r+1}}$ an bis zu Ende darstellt und also, in einen Quotienten verwandelt, einen Rest als Dividenden und den vorhergehenden als Divisor enthält, so giebt auch die linke Seite dieselben Reste. Es ist aber

$$\begin{aligned} R_{2r-1} &= 1 : (a_{2r-1} + 1 : (a_{2r} x + \ldots\ldots + 1 : (a_{\mu-1} \,.\, x + 1 : a_\mu) \\ &= 1 : (a_{2r-1} + x^{-1} : (a_{2r} + x^{-1} : (a_{2r+1} + \ldots\ldots + x^{-1} : a_\mu) \\ &= \frac{\Sigma(a_{2r})\, a_\mu)_{2\alpha} \cdot x^{-\alpha}}{\Sigma(a_{2r-1}) a_\mu)_{2\alpha} \cdot x^{-\alpha}} \end{aligned}$$

und $(a_{2r-1})\, a_\mu)_{2\alpha} = a_{2r-1} \cdot (a_{2r})\, a_\mu)_{2\alpha} + (a_{2r+1})\, a_\mu)_{2\alpha-2}$,

also $(a_{2r})\, a_\mu)_{2\alpha} = \dfrac{(a_{2r-1})\, a_\mu)_{2\alpha}}{a_{2r-1}} - \dfrac{(a_{2r+1})\, a_\mu)_{2\alpha-2}}{a_{2r-1}}$

Demnach ist $\Sigma(a_{2r}, a_\mu)_{2\alpha} . x^{-\alpha} = \dfrac{\Sigma(a_{2r-1}, a_\mu)_{2\alpha} \cdot x^{-\alpha}}{a_{2r-1}} - \dfrac{\Sigma(a_{2r+1}, a_\mu)_{2\alpha-2} \cdot x^{-\alpha}}{a_{2r-1}}$

und $$R_{2r-1} = \frac{1}{a_{2r-1}} - \frac{1}{a_{2r-1}} \cdot \frac{\Sigma(a_{2r+1}, a_\mu)_{2\alpha-2} \cdot x^{-\alpha}}{\Sigma(a_{2r-1}, a_\mu)_{2\alpha} \cdot x^{-\alpha}}$$

$$\textbf{(6.)}\quad \text{oder} \qquad R_{2r-1} - \frac{1}{a_{2r-1}} = \frac{-1}{a_{2r-1}} \cdot \frac{\Sigma(a_{2r+1}, a_\alpha)_{2\alpha} \cdot x^{-\alpha-1}}{\Sigma(a_{2r-1}, a_\mu)_{2\alpha} \cdot x^{-\alpha}}\ ,$$

wo im Dividenden noch $\alpha + 1$ statt a gesetzt ist, weil vorher $\alpha \geqq 1$ sein musste.

Wir hätten nun nur nöthig, den Dividenden und Divisor mit x^{n-r} zu multipliciren, um zwei aufeinander folgende Reste, den einen im Dividenden, den andern im Divisor zu erhalten, wenn der Factor $\dfrac{1}{a_{2r-1}}$ nicht dastände, oder derselbe immer positiv wäre. Um den Einfluss dieses Factors im Allgemeinen zu beurtheilen, gehen wir von der Gleichung (5) oder von der gleichbedeutenden aus, nämlich von:

$$\frac{1}{R_{2r-1}-\frac{1}{a_{2r-1}}} = -\frac{a_{2r}\cdot x+1:a_{2r-1}+R_{2r+1}}{1:a_{2r-1}^2}$$

$$= -\frac{a_{2r}\cdot x+1:a_{2r-1}+1:a_{2r+1}}{1:a_{2r-1}^2} - \frac{R_{2r+1}-1:a_{2r+1}}{1:a_{2r-1}^2}$$

und setzen in dieselbe die Ausdrücke, welche die Formel (6) giebt. So erhält man:

$$-a_{2r-1}\cdot\frac{\Sigma(a_{2r-1},a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{-\alpha}}{\Sigma(a_{2r+1},a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{-\alpha-1}} = -\frac{a_{2r-1}\cdot a_{2r}\cdot a_{2r+1}\cdot x+a_{2r-1}+_{2r+1}}{a_{2r+1}:a_{2r+1}}$$

$$+\frac{a_{2r-1}^2}{a_{2r+1}}\cdot\frac{\Sigma(a_{2r+3},a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{-\alpha-1}}{\Sigma(a_{2r+1},a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{-\alpha}}$$

und daraus:

$$\frac{\Sigma(a_{2r-1},a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{-\alpha}}{\Sigma(a_{2r+1},a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{-\alpha-1}} = \frac{\Sigma(a_{2r-1},a_{2r+1})_{2\alpha}\cdot x^{-\alpha}}{a_{2r+1}:x} - \frac{a_{2r-1}}{a_{2r+1}}\cdot\frac{\Sigma(a_{2r+3},a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{-\alpha-1}}{\Sigma(a_{2r+1},a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{-\alpha}};$$

oder wenn man in dem Quotienten links den Dividenden und Divisor mit x^{n-r} und im Subtrahenden rechts mit x^{n-r-1} multiplicirt, so ist:

(7.) $$\frac{\Sigma(a_{2r-1},a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{n-r-\alpha}}{\Sigma(a_{2r-1},a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{n-r-\alpha-1}} = \frac{\Sigma(a_{2r-1},a_{2r+1})_{2\alpha}\cdot x^{-\alpha}}{a_{2r+1}:x} - \frac{a_{2r-1}}{a_{2r+1}}\cdot\frac{\Sigma(a_{2r+3},a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{n-r-\alpha-2}}{\Sigma(a_{2r+1},a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{n-r-\alpha-1}}.$$

Wenn also $\Sigma(a_{2r-1},a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{n-r-\alpha}$ und $\Sigma(a_{2r+1},a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{n-r-\alpha-1}$ zwei auf einander folgende Reste sind, so ist der nächste Rest: $\frac{a_{2r-1}}{a_{2r+1}}\cdot\Sigma(a_{2r+3},a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{n-r-\alpha-2}$.

In ähnlicher Weise lässt sich nun noch die besondere Gleichung

$$\frac{\sum_0^n B_\alpha\cdot x^{n-\alpha}}{\sum_0^{n-1} A_\alpha\cdot x^{n-\alpha-1}} = a_0x+R_1 = \frac{a_0a_1x+1}{a_1} - \frac{1}{a_1}\cdot\frac{\Sigma(a_3,a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{n-\alpha-2}}{\sum_0^{n-1} A_\alpha\cdot x^{n-\alpha-1}},$$

herleiten, welche zeigt, dass der erste Rest $\frac{1}{a_1}\cdot\Sigma(a_3,a_\alpha)_{2\alpha}\cdot x^{n-\alpha-1}$ ist. Setzt man in die Gleichung (7) der Reihe nach $r=1,2,\ldots$ bis $(n-2)$ und multiplicirt ausserdem links und rechts noch mit den bereits gefundenen Factoren der Reste, so findet man die wirklichen Reste, welche beim *Sturm*'schen Satze vorkommen. Auch geht aus der Gleichung (7) als Regel hervor, dass jeder Rest $\Sigma(a_{2r+3},a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{n-r-\alpha-2}$ zu dem das Zeichen mitbestimmendem Factor des zweitvorhergehenden Restes $\Sigma(a_{2r-1},a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{n-r-\alpha}$ noch den Quotienten $a_{2r-1}:a_{2r+1}$ hinzufügt; und diese Regel genügt zur Bestimmung dieser Factoren. Einige der ersten Reste sind daher:

(8.)
$$\begin{cases} \frac{1}{a_1}\cdot\Sigma(a_3,a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{n-\alpha-2};\ \frac{1\cdot a_3}{a_1\cdot a_5}\cdot\Sigma(a_7,a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{n-\alpha-4};\ \frac{1\cdot a_3\cdot a^7}{a_1\cdot a_5\cdot a_9}\cdot\Sigma(a_{11},a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{n-\alpha-6} \\ \text{u. s. w.} \\ \frac{a_1}{a_3}\cdot\Sigma(a_5,a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{n-\alpha-3};\ \frac{a_1\cdot a_5}{a_3\cdot a_7}\cdot\Sigma(a_9,a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{n-\alpha-5};\ \frac{a_1\cdot a_5\cdot a_9}{a_3\cdot a_7\cdot a_{11}}\cdot\Sigma(a_{13},a_\mu)_{2\alpha}\cdot x^{n-\alpha-7} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Das Zeichen, welches der hergeleitete Factor hat, ist das des Products aus allen vorhergehenden Theilnennern a mit ungeradem Zeiger; dieses Zeichen allein muss beachtet werden; der absolute Werth des Factors ist für den *Sturm*schen Satz gleichgültig.

§. 4.

Die Anwendung des *Sturm*schen Satzes hangt nach dem Vorhergehenden von der leichten Berechnung der Coefficienten der Reste $\Sigma(a_{2r-1}, a_\mu)_{2a} . x^{n-r-a}$ und von der Bestimmung des Zeichens der Theilnenner a mit ungeradem Zeiger ab. Jene aus den Theilnennern des Kettenbruchs $F(a_0, a_\mu)$ zusammenzusetzen, wäre nicht durchzuführen, weil diese selbst nur mittels grosser Rechnungen gefunden werden, schon wenn man das bekannte recurrirende und noch mehr, wenn man das unabhängige Verfahren anwendete. Aber eine Auflösung der Gleichungen (3) giebt auch recurrirend nicht nur die Coefficienten $(a_{2r-1}, a_\mu)_{2s}$, für alle hier möglichen Werthe von r und s, sondern auch zugleich die Theilnenner a.

Es ist $$(a_r, a_\mu)_{2s+2} = a_r(a_{r+1}, a_\mu)_{2s+2} + (a_{r+2}, a_\mu)_{2s};$$

folglich

$$(9.) \qquad (a_{r+2}, a_\mu)_{2s} = (a_r, a_\mu)_{2s+2} - a_r(a_{r+1}, a_\mu)_{2s+2}$$

Die Anwendung dieser analytischen Relation entwickelt aus den Gleichungen (3) Alles, was oben erwähnt ward.

Ohne alle Rechnung ergiebt sich aus (3) $a_0 = \dfrac{(a_0, a_\mu)_0}{(a_1, a_\mu)_0} = \dfrac{B_0}{A_0}$, und setzt man in (9) $r = 0$, so ergeben sich in der Form

$$(a_2, a_\mu)_{2s} = (a_0, a_\mu)_{2s+2} - a_0(a_1, a_\mu)_{2s} = B_{s+1} - a_0 A_{s+1}$$

für die Werthe von $s = 0$ bis $s = n-2$ eine Reihe von $n-1$ Ausdrücken, welche zwar nicht zu den verlangten Coefficienten gehören, aber die Berechnung derselben erleichtern. Sie sind die Coefficienten von $\Sigma(a_2, a_\mu)_{2a} . x^{n-a-1}$. Diese ganze Function $(n-1)$ten Grades ist, ohne selbst einer der Reste des Kettenbruchs (4) zu sein, denselben ganz ähnlich, und möge *Hülfsrest* genannt werden. Wenn die Coefficienten B und A in zwei horizontalen Reihen untereinander stehen, so ist das Schema der Berechnung dieses Hülfsrestes äusserst einfach: man multiplicire A_{s+1} mit a_0 und ziehe das Product von B_{s+1} ab, so findet sich $(a_2, a_\mu)_{2s}$, welches unter A_s zu setzen ist. So findet sich zuerst

$$(a_2, a_\mu)_0 = B_1 - a_0 A_1, \text{ und daraus}$$

$$a_1 = \frac{(a_1, a_\mu)_0}{(a_2, a_\mu)_0}.$$

Auf ganz gleiche Weise berechnet man nun aus dem ersten Hülfsrest und dem gegebenen Dividenden $\sum_{0}^{n-1} A_a . x^{n-a-1}$ den ersten Rest mit Hülfe des gefundenen Theilnenners a, nach der Formel, welche aus (9) hervorgeht, indem man $r = 1$ setzt. So wird abwechselnd Hülfsrest und eigentlicher Rest gefunden, und jedesmal aus den Anfangsgliedern einer neuen Coefficientenreihe und der vorhergehenden durch Division ein neuer Theilnenner a berechnet.

Ehe ich das angedeutete Schema an einigen Beispielen vollständig darstelle, leite ich noch eine Formel her, welche zeigen wird, wie die Coefficienten der Reste aus den gegebenen Coefficienten B und A und den vorangehenden Theilnennern zusammengesetzt sind. Wir fanden oben

$$(a_2 , a_\mu)_{2s} = B_{s+1} - a_0 A_{s+1}$$

und erhalten nun durch Einsetzung des gefundenen Werthes in $(a_3 , a_\mu)_{2s} = (a_1, a_\mu)_{2s+2} - a_1(a_2 , a_\mu)_{2s+2}$ weiter:

$$(a_3 , a_\mu)_{2s} = -[a_1 B_{s+2} - a_0 a_1 A_{s+2} - A_{s+1}].$$

Die neue Einsetzung in $(a_4 , a_\mu)_{2s} = (a_2 , a_\mu)_{2s+2} - a_2(a_3 , a_\mu)_{2s+2}$ giebt:

$$(a_4 , a_\mu)_{2s} = a_1 a_2 B_{s+3} + B_{s+2} - a_0 a_1 a_3 A_{s+3} - (a_0 + a_2) A_{s+2}.$$

In ähnlicher Weise erhält man weiter:

$$\begin{aligned}(a_5 , a_\mu)_{2s} = -[&a_1 a_2 a_3 B_{s+4} + (a_1 + a_3) B_{s+3} - a_0 a_1 a_2 a_3 A_{s+4} \\ &- (a_0 a_1 + a_0 a_3 + a_2 a_3) A_{s+3} - A_{s+2}].\end{aligned}$$

Durch Anwendung des Summenzeichens gehen diese Ausdrücke in folgende über:

$$\begin{aligned}
(a_5 , a_\mu)_{2s} &= -\Sigma[(a_1 , a_3)_{2\alpha} . B_{s+\beta} - (a_0 , a_3)_{2\alpha} . A_{s+\beta}] \text{ cond } \alpha + \beta = 4 \\
(a_4 , a_\mu)_{2s} &= +\Sigma[(a_1 , a_2)_{2\alpha} . B_{s+\beta} - (a_0 , a_2)_{2\alpha} . A_{s+\beta}] \qquad \alpha + \beta = 3 \\
(a_3 , a_\mu)_{2s} &= -\Sigma[(a_1 , a_1)_{2\alpha} . B_{s+\beta} - (a_0 , a_1)_{2\alpha} . A_{s+\beta}] \qquad \alpha + \beta = 2 \\
(a_2 , a_\mu)_{2s} &= +\Sigma[(a_1 , a_0)_{2\alpha} . B_{s+\beta} - (a_0 , a_0)_{2\alpha} . A_{s+\beta}] \qquad \alpha + \beta = 1 ;
\end{aligned}$$

wo dann der Gleichförmigkeit wegen statt 1 das Zeichen $(a_1, a_0)_0$, welches eigentlich keinen Sinn hat, gesetzt ist. Als allgemeine Form stellt sich auf den ersten Blick heraus:

(10.) $(a_r , a_\mu)_{2s} = (-1)^r \Sigma[(a_1, a_{r-2})_{2\alpha} . B_{s+\beta} - (a_0, a_{r-2})_{2\alpha} . A_{s+\beta}]$ cond. $\alpha + \beta = r - 1$.

Um allgemein die Richtigkeit dieser Darstellung nachzuweisen, nehmen wir einstweilen an, dass sie gültig sei für $(a_r , a_\mu)_{2s}$ und für $(a_{r+1} , a_\mu)_{2r}$, und thun dar, dass sie auch gelten müsse für $(a_{r+2} , a_\mu)_{2s}$. Es ist:

$$(a_{r+2} , a_\mu)_{2s} = (a_r , a_\mu)_{2s+2} - a_r(a_{r+1} , a_\mu)_{2s+2}.$$

Wird rechts nach Formel (10) substituirt, so entsteht:

$$(a_{r+2}\,,\,a_\mu)_{2s} = (-1)\,\Sigma[(a_1\,,\,a_{r-2})_{2\alpha}\,.\,B_{s+\beta+1} - (a_0\,,\,a_{r-2})_{2\alpha}\,.\,A_{s+\beta+1}]$$
$$\alpha+\beta = r-1$$
$$-(-1)^{r+1}\,.\,a_r\,.\,\Sigma[(a_1\,,\,a_{r-1})_{2\alpha}\,.\,B_{s+\beta+1} - (a_0\,,\,a_{r-1})_{2\alpha}\,.\,A_{s+\beta+1}]$$
$$\alpha+\beta = r$$

$$= (-1)^{r+2}\,.\,[\Sigma(a_1\,,\,a_{r-2})_{2\alpha}\,.\,B_{s+\beta+1} + \Sigma a_r\,(a_1, a_{r-1})_{2\alpha}\,.\,B_{s+\beta+1} - \Sigma(a_0, a_{r-2})_{2\alpha}\,.\,A_{s+\beta+1}$$
$$\alpha+\beta = r-1 \qquad \alpha+\beta = r \qquad \alpha+\beta = r-1$$
$$-\Sigma a_r(a_0\,,\,a_{r-1})_{2\alpha}\,.\,A_{s+\beta+1}]$$
$$\alpha+\beta = r.$$

Es ist ferner $(a_1\,,\,a_r)_{2\alpha} = a_r(a_1\,,\,a_{r-1})_{2\alpha} + (a_1\,,\,a_{r-2})_{2\alpha-2}$, also

$$\Sigma(a_1\,,\,a_r)_{2\alpha}\,.\,B_{s+\beta} = \Sigma a_r(a_1\,,\,a_{r-1})_{2\alpha}\,.\,B_{s+\beta} + \Sigma(a_1\,,\,a_{r-2})_{2\alpha-\beta}\,.\,B_{s+\beta}$$
$$\alpha+\beta = r+1 \qquad \alpha+\beta = r+1 \qquad \alpha+\beta = r+1.$$

Rechts ist $\beta \geqq 1$, weil $\alpha = r+1$ die Coefficienten $(a_1\,,\,a_{r-1})_{2r+2}$ und $(a_1\,,\,a_{r-2})_{2r} = 0$ macht; man darf also rechts $\beta+1$ statt β setzen: in der zweiten Summe rechts ist zudem $\alpha \geqq 1$; daher darf hier auch $\alpha+1$ statt α geschrieben werden. Nach diesen Aenderungen ist:

$$\Sigma(a_1\,,\,a_r)_{2\alpha}\,.\,B_{s+\beta} = \Sigma a_r(a_1\,,\,a_{r-1})_{2\alpha}\,.\,B_{s+\beta+1} + \Sigma(a_1\,,\,a_{r-2})_{2\alpha}\,.\,B_{s+\beta+1}$$
$$\alpha+\beta = r+1 \qquad \alpha+\beta = r \qquad \alpha+\beta = r-1.$$

Durch dieselben Schlüsse findet man:

$$\Sigma(a_0\,,\,a_r)_{2\alpha}\,.\,A_{s+\beta} = \Sigma a_r(a_0\,,\,a_{r-1})_{2\alpha}\,.\,A_{s+\beta+1} + \Sigma(a_0\,,\,a_{r-2})_{2\alpha}\,.\,A_{s+\beta+1}$$
$$\alpha+\beta = r+1 \qquad \alpha+\beta = r \qquad \alpha+\beta = r-1.$$

Beides addirt und dann mit Dem was oben rechts von $(a_{r+2}\,,\,a_\mu)_{2s}$ steht verglichen, zeigt, dass

$$(a_{r+2}\,,\,a_\mu)_{2s} = (-1)^{r+2}\,.\,\Sigma[(a_1\,,\,a_r)_{2\alpha}\,.\,B_{s+\beta} - (a_0\,,\,a_r)_{2\alpha}\,.\,A_{s+\beta}] \text{ cond } \alpha+\beta = r+1;$$

welches sich von (10) nur dadurch unterscheidet, dass $r+2$ statt r vorkommt.

Wenn also (10) für r und $r+1$ gültig ist, so ist auch eben das für $r+2$ der Fall. Nun ist (10) oben für $r = 2, 3, 4$ und 5 bewiesen worden. Die Gleichung ist demnach allgemein richtig.

§. 5.

Aus dem vorigen Paragraphen ergiebt sich folgendes allgemeine Schema für die Berechnung der Coefficienten der Reste:

	$s=0$	$s=1$	$s=2$	$s=n-3$	$s=n-2$	$s=n-1$	$s=n$
$r=0$	B_0	B_1	B_2	B_{n-3}	B_{n-2}	B_{n-1}	$B_n=1$
$r=1$	A_0	A_1	A_2	A_{n-3}	A_{n-2}	A_{n-1}	
$r=2$	$(a_2, a_\mu)_0$	$(a_2, a_\mu)_2$	$(a_2, a_\mu)_4$	$(a_2, a_\mu)_{2n-6}$	$(a_2, a_\mu)_{2n-4}$	1	
$r=3$	$(a_3, a_\mu)_0$	$(a_3, a_\mu)_2$	$(a_3, a_\mu)_4$	$(a_3, a_\mu)_{2n-6}$	$(a_3, a_\mu)_{2n-4}$		
$r=4$	$(a_4, a_\mu)_0$	$(a_4, a_\mu)_4$	$(a_4, a_\mu)_4$	$(a_4, a_\mu)_{2n-6}$	1		

Hat man die Reste berechnet und will wissen, wie viele Wurzeln der Gleichung zwischen a und b liegen, wo $a<b$, so setze man a und b nacheinander in die gegebene Gleichung, ihre Ableitung und alle Reste, und bemerke nach jeder Einsetzung das Zeichen; die Gleichung hat dann zwischen a und b so viele Wurzeln, als die Zeichenreihe für a Wechsel mehr zeigt, als die für b. Dies ist der *Sturm*sche Satz. Als kleines Beispiel diene die Gleichung $6x^3+11x^2+6x+1=0$, deren Ableitung $9x^2+11x+3$ ist. Unser Schema enthält also folgende Zahlen:

0)	6	11	6	1	$a_0=\frac{2}{3}$
1)	9	11	3		$a_1=\frac{27}{11}$
2)	$\frac{11}{3}$	4	1		$a_2=\frac{121}{39}$
3)	$\frac{13}{11}$	$\frac{6}{11}$			$a_3=\frac{169}{330}$
4)	$\frac{30}{13}$	1			$a_4=\frac{900}{13}$
5)	$\frac{1}{30}$				

Da es jedoch nicht auf den absoluten Werth der Reste, sondern nur auf ihre Zeichen ankommt, so multiplicire man, sobald ein Theilnenner a ein Bruch ist, mit dem Zähler den letzten und mit dem Nenner den vorletzten Rest und subtrahire. Dann ist:

0)	6	11	6	1	$a_0=\frac{2}{3}$
1)	9	11	3		$a_1=\frac{9}{11}$
2)	11	12	3		$a_2=\frac{11}{13}$
3)	13	6			$a_3=\frac{13}{30}$
4)	30	13			$a_4=\frac{30}{11}$
5)	11				

Die Theilnenner a_1 und a_3 sind positiv, also haben die Reste unter (3) und (5) das richtige Zeichen. Für $x=0$ finden sich in

(0, 1, 3, 5) die Zeichen
\+ + + + ohne Wechsel;
für $x=-2$ sind dieselben − + − + mit drei Wechseln;

es liegen deshalb die drei Wurzeln der Gleichung zwischen -2 und 0.

Als zweites Beispiel diene eine Gleichung, durch welche, wie *Gauss* dargethan hat, bei der mechanischen Quadratur möglichst vortheilhaft die Abscissen bestimmt werden. Wenn 7 Abscissen angewandt werden sollen, so nimmt sie die Form

$$-3432x^7+12012x^6-16632x^5+11550x^4-4200x^3+756x^2-56x+1=0$$

an; wo, wie es die Gleichung (2) eigentlich verlangt, das absolute Glied den Werth +1 haben soll. In dem folgenden Schema sind die Reste entwickelt, deren Coefficienten, so oft es anging, durch Entfernung eines gemeinsamen Factors verkleinert sind:

0)	−3432	+12012	−16632	+11550	−4200	+756	−56	+1 = 0	$a_0 = +8$
1)	−429	+1287	−1485	+825	−225	+27	−1		$a_2 = -\frac{1}{4}$
2)	+1716	−4752	+4950	−2400	+540	−48	+1		$a_1 = +13$
3)	+132	−330	+300	−120	+20	−1			$a_3 = -\frac{2}{7}$
4)	−462	+1050	−840	+280	−35	+1			$a_4 = +11$
5)	−42	+84	−56	+14	−1				$a_5 = -\frac{1}{3}$
6)	+126	−224	+126	−24	+1				$a_6 = +9$
7)	+14	−21	+9	−1					$a_7 = -\frac{2}{5}$
8)	−35	+45	−15	+1					$a_8 = +7$
9)	−5	+5	−1						$a_9 = -\frac{1}{2}$
10)	+10	−8	+1						$a_{10} = +5$
11)	+2	−1							$a_{11} = -\frac{2}{3}$
12)	−3	+1							$a_{12} = +3$
13)	−1								$a_{13} = -1$

Sollen nun die Wurzeln aufgesucht werden, so hat man zunächst auf das Zeichen der Theilnenner mit ungeradem Zeiger zu achten. Da diese sämmtlich negativ sind, so ist das Zeichen des Restes (3, 7, und 11) umzukehren.

Nun hat für $x = 0$ die Reihe der Zeichen: + − + − + − + −

7 Wechsel; für $x = \infty$ hat dieselbe − − − − − − − −

keine Wechsel; also sind alle 7 Wurzeln positiv.

Für $x = 1$ sind − − − − − − − −

die Zeichen und bilden keinen Wechsel, also liegen alle Wurzeln zwischen 0 und 1.

Diese Gleichung zeigt, dass selbst Gleichungen von hohem Grade und grossen Coefficienten unter günstigen Umständen eine leichte Anwendung des *Sturm*schen Satzes zulassen; dagegen wachsen aber auch wohl bei andern Glei-

chungen, deren Grad und Coefficienten viel kleinere Zahlen sind, die Coefficienten der Reste rasch zu schwerfälligeren Zahlen an Zu einem Beispiele wähle ich die Gleichung: $2x^4+6x^3-11x^2-2x+1=0$, deren Ableitung, nach Abwerfung des Factors 2, $4x^3+9x^2-11x-1$ ist. Nachstehendes Schema giebt die Uebersicht der berechneten Zahlen:

0)	$+2$	$+6$	-11	-2	$+1$	$a_0=\frac{1}{2}$
1)	$+2$	$+9$	-11	-1		$a_1=\frac{4}{3}$
2)	$+3$	-11	-3	$+2$		$a_2=\frac{3}{71}$
3)	$+71$	-21	-11			$a_3=-\frac{71}{359}$
4)	-359	-90	$+71$			$a_4=\frac{359}{4643}$
5)	-4643	$+364$				$a_5=\frac{4643}{548546}$
6)	-548546	$+329653$				$a_6=\frac{548546}{1330908131}$
7)	-1330908135					

Es ist hier a_3 negativ und somit, dem Früheren zufolge, das Zeichen der Reste (5) und (7) in das entgegengesetzte zu verändern. Setzt man darauf $x=0$, so entstehen die Zeichen: $+----+$, und wenn $x=\infty$ genommen wird, erhält man die Reihe: $++++++$; woraus nach dem *Sturm*schen Satze ersichtlich ist, dass zwei Wurzeln positiv sind. Wenn noch $x=-\infty$ gesetzt wird, so erhalten die gefundenen Functionen die Zeichen:

$+-+-+$, zwischen welchen 4 Wechsel vorkommen; was zeigt dass die beiden andern Wurzeln der Gleichung negativ sind.

Ich habe für die Gleichungen hier eine von der üblichen etwas abweichende Form zum Grunde gelegt; es ist davon jedoch die Anwendung der gefundenen Regeln nicht durchaus abhängig; nur muss man bemerken, dass jeder Factor, welcher jene Form umgestaltet, und namentlich sein Zeichen, sich durch die ganze Rechnung hindurch zieht, in einer Weise, welche man nach Formel (9) verfolgen kann.

§. 6.

Will man nach Herleitung der Reste (8) die Anzahl der realen Wurzeln einer Gleichung $n$ten Grades suchen, so setze man nach einander $x=+\infty$

und $x = -\infty$ in die Gleichung, in ihre Ableitung und in die gefundenen $n-1$ Reste und nehme den Unterschied der Zahlen, welche für die bei den Substitutionen hervorgegangenen Zeichen die Wechsel angeben. Sollen nun alle Wurzeln real sein, also jener Unterschied n betragen, so darf, weil bei $n+1$ Zeichen überhaupt nur n Wechsel möglich sind, die eine Reihe Zeichen, und zwar die erste, keinen Wechsel haben, während in der andern n mal ein Wechsel, d. h. keine Folge vorkommt. Sobald aber die Hauptgrösse x in einer ganzen rationalen Function $+\infty$ wird, ist das Zeichen der Function mit dem Zeichen der Coefficienten ihrer höchsten Potenz dasselbe. Selbst der letzte Rest, obwohl er von x ganz unabhängig ist, macht hievon keine Ausnahme. Sollen also die $n+1$ Functionen für $x = +\infty$ gleiche Zeichen haben, so müssen ihre Anfangscoefficienten im Zeichen übereinstimmen. Dieselben Functionen bilden dann aber auch für $x = -\infty$, n Zeichenwechsel, weil dann jede gerade Potenz von x ein anderes Zeichen hat, als die benachbarten ungeraden. Da nun B_0 und $A_0 = nB_0$ immer dasselbe Zeichen haben, so sind die Wurzeln einer Gleichung alle real, wenn die Coefficienten

$$a_1(a_3, a_\mu)_0 ; a_1a_3(a_5, a_\mu)_0 ; a_1a_3a_5(a_7, a_\mu)_0 ; \cdots\cdots\cdots a_1a_3a_5\cdots\cdots a_{2n-3}\cdot(a_{2n-1}, a_{2n-1})_0$$

mit B_0 dasselbe Zeichen haben. Die Zahl dieser Bedingungen ist $n-1$. Es ist aber $B_0 = (a_0, a_\mu)_0$, also $(a_r, a_\mu)_0 = \frac{B_0}{(a_0, a_{r-1})_0}$. Demnach sind jene Coefficienten:

$$\frac{a_1 \cdot B_0}{(a_0, a_2)_0} ; \frac{a_1a_3B_0}{(a_0, a_4)_0} ; \frac{a_1a_3a_5B_0}{(a_0, a_6)_0} \cdots\cdots\cdots \frac{a_1a_3a_5 \cdots\cdots a_{2n-3}B_0}{(a_0, a_{2n-2})_0},$$

und da sie mit B_0 dasselbe Zeichen haben sollen, so müssen sie, durch B_0 dividirt, einen positiven Quotienten geben. Also sind jene $n-1$ Bedingungen: $\frac{a_1}{(a_0, a_2)_0} = +$; $\frac{a_1a_3}{(a_0, a_4)_0} = +$; $\frac{a_1a_3a_5}{(a_0, a_0)_0} = + \cdots\cdots \frac{a_1a_3\cdots\cdots a_{2n-3}}{(a_0, a_{2n-2})_0} = +$.

Werden die Theilnenner mit ungeradem Zeiger, welche sämmtlich im Dividenden und Divisor vorkommen, aufgehoben und (wodurch das Zeichen nicht geändert wird) die Quotienten umgekehrt, so ergiebt sich:

$$a_0a_2 = + ; a_0a_2a_4 = + ; a_0a_2a_4a_6 = + \cdots\cdots\cdots a_0a_2a_4\cdots\cdots a_{2n-2} = +.$$

Da nun $a_0 = \frac{B_0}{A_0} = \frac{B_0}{nB_0} = \frac{1}{n}$, so sind

$$(11.) \quad a_2 = + ; \quad a_4 = + ; \quad a_6 = + \cdots\cdots a_{2n-2} = +$$

obige $n-1$ Bedingungsgleichungen.

Um den Zusammenhang dieser Bedingungen mit den Coefficienten herauszustellen, gebe ich ihnen eine andere Gestalt. Benutzt man die Formel (10) der frühern Abhandlung, so sieht man, dass

$$a_0 a_2 a_4 \ldots\ldots a_{2r} = \left(\frac{\Delta_1 \cdot \Delta_3 \Delta_5 \ldots\ldots \Delta_{2r-1}}{\Delta_0 \quad \Delta_2 \Delta_4 \ldots\ldots \Delta_{2r-2}}\right)^2 \cdot \frac{B_0}{\Delta_{2r}}$$

ist und demnach die obigen Bedingungen auch folgende sind:

$$(12.) \quad \frac{\Delta_2}{B_0} = + \; ; \quad \frac{\Delta_4}{B_0} = + \; ; \quad \frac{\Delta_6}{B_0} = + \; ; \quad \ldots\ldots \frac{\Delta_{2n-2}}{B_0} = + \quad .$$

Die Division der Determinanten $\Delta_{2\mu}$ durch B_0 lässt sich schon an dem Coefficienten-Systeme (7), aus welchem sie zu bilden sind, ausführen. Es ist nur nöthig, eine horizontale Reihe, und zwar hier die unterste, durch B_0 zu theilen. Dadurch wird das Anfangsglied derselben $\frac{A_0}{B_0} = n$ und das Schlussglied $\frac{B_0}{B_1} = 1$. Im Uebrigen bleibt das System (7) der frühern Abhandlung ungeändert.

Gesetzt aber es entständen durch die Einsetzung von $x = +\infty$ nicht lauter Folgen, sondern es gäbe in dieser Zeichenreihe nur $n - r$ Folgen, also r Wechsel. Dies entsteht, wenn der Anfangscoefficient einer Function, deren höchster Exponent ein gerader ist, ein anderes Zeichen hat, als einer der beiden benachbarten Anfangscoefficienten, welche zu einer ungeraden Potenz von x gehören. Wird dann $x = -\infty$ gesetzt, so ändert die letztere Function ihr Zeichen, während die erste dasselbe beibehält; statt eines Wechsels entsteht eine Folge. Da nun die erste Zeichenreiche r Wechsel hat, so hat die zweite r Folgen, an denselben Stellen. Und umgekehrt: die Stellen, welche in der ersten Reihe mit Folgen bezeichnet sind, bilden in der andern Wechsel, weil von je zwei auf einander folgenden Zeichen eines geändert ist. Von diesen $n - r$ Wechseln für $x = -\infty$ müssen die r Wechsel für $x = +\infty$ abgezogen werden, um die Anzahl der realen Wurzeln, die zwischen den Gränzen $-\infty$ und $+\infty$ liegen, zu finden. Da die Gleichung somit $n - r - r = n - 2r$ reale Wurzeln hat, so genügen ihr auch noch $2r$ imaginäre. In Gleichungen mit realen Coefficienten kommen bekanntlich die imaginären Wurzeln paarweise vor; sie haben also so viele Paare imaginärer Wurzeln, als die Anfangscoefficienten Wechsel zeigen. Fügen wir zu diesem bekannten Gesetze noch die Bemerkung, dass, wie oben bewiesen, jene Coefficienten mit $\frac{\Delta_{2n}}{B_0}$ gleiche Zeichen haben, so erhalten wir einen Ausdruck desselben, welcher sich unmittelbar auf die Coefficienten der gegebenen Gleichung bezieht:

Eine Gleichung hat so viele Paare imaginärer Wurzeln, als zwischen den Determinanten:

$$(13.) \quad \frac{\Delta_0}{B_0} \; , \quad \frac{\Delta_2}{B_0} \; , \quad \frac{\Delta_4}{B_0} \ldots\ldots \frac{\Delta_{2n-2}}{B_0}$$ Zeichenwechsel Statt finden.

Es musste hier zu der Reihe der Determinanten unter (12) noch $\frac{\Delta_0}{B_0} = \frac{A_0}{B_0} = n$ aufgenommen werden, um einen möglichen Zeichenwechsel zwischen der Ableitung und dem ersten Reste nicht unbeachtet zu lassen. Es ist schon früher bewiesen worden und geht auch aus der Betrachtung des Kettenbruchs (4) hervor, dass die Gleichung und die Ableitung derselben, eine, zwei, drei u. s. w. Wurzeln gemeinsam haben, wenn die eine, zwei, drei u. s. w. letzten Determinanten aus obiger Reihe (12) Null sind. Durch diese Bestimmung, in Verbindung mit den Bedingungen (12) und dem Satze (13), ist der Zusammenhang zwischen den Wurzeln der Gleichung und den Determinanten mit geradem Zeiger aus den Coefficienten der Gleichung, welcher die Bedingungen für die Realität, Gleichheit und Imaginarität der Wurzeln enthält, aufgeklärt.

Ein Zeichenwechsel zwischen $\frac{\Delta_{2\mu-2}}{B_0}$ und $\frac{\Delta_{2\mu}}{B_0}$ macht $a_{2\mu}$ negativ. Es liesse sich somit für die Theilnenner der erwähnte Zusammenhang so darstellen: Eine Gleichung hat so viele Paare imaginärer Wurzeln, als Theilnenner mit geradem Zeiger negativ sind, und in gewissem Sinne so viele Paare gleicher Wurzeln, als unter denselben Theilnennern unendlich grosse vorkommen.

§. 7.

Ich benutze diese Gelegenheit, um noch einige Bemerkungen über Kettenbrüche mitzutheilen, welche entweder mit dem Vorangehenden nur in losem Zusammenhange stehen, oder deren Aufnahme doch wenigstens den Gang der Untersuchung über Gebühr in die Länge gezogen hätte.

Wenn ich blos den Kettenbruch (4) aus dem gegebenen Quotienten hätte entwickeln wollen, also nicht die Bedingungen von (§. 6) herzuleiten und die Behandlung der Kettenbrüche in den ersten Paragraphen beabsichtigt worden wäre, so hätte eine fortgesetzte Division genügt. Setzt man nämlich als Ergebniss einiger Theilungen:

$$\frac{\sum_0^n B_\alpha \cdot x^{n-\alpha}}{\sum_0^{n-1} A_\alpha \cdot x^{n-\alpha-1}} = a_0 x + \frac{U_{n-1}}{\sum_0^{n-1} A_\alpha \cdot x^{n-\alpha-1}}, \quad \frac{\sum_0^{n-1} A_\alpha \cdot x^{n-\alpha-1}}{U_{n-1}} = a_1 + \frac{V_{n-2}}{U_{n-1}} \text{ und } \frac{U_{n-1}}{V_{n-2}} = a_2 x + \frac{U_{n-2}}{V_{n-2}},$$

wo der Zeiger den Grad der Functionen angiebt, so ist

$$\frac{\sum_0^n B_\alpha \cdot x^{n-\alpha}}{\sum_0^{n-1} A_\alpha \cdot x^{n-\alpha-1}} = a_0 x + \frac{1}{\sum_0^{n-1} A_\alpha \cdot x^{n-\alpha-1} : U^{n-1}} = a_0 x + \frac{1}{a_1 + V_{n-2} : U_{n-1}} = a_0 x + \frac{1 : a_1}{1 + a_1^{-1} \cdot V_{n-2} : U_{n-1}}$$

$$= a_0 x + 1 : a_1 - \frac{(1 : a_1^2) \cdot V_{n-2} : U_{n-1}}{1 + a_1^{-1} \cdot V_{n-2} : U_{n-1}} = a_0 x + 1 : a_1 - \frac{1 : a_1^2}{1 : a_1 + U_{n-1} : V_{n-2}} .$$

Die Wiederholung der Schlüsse für den Quotienten $U_{n-1} : V_{n-2}$, welcher dem gegebenen ähnlich ist, führt einen Schritt weiter in den Kettenbruch, von welchem schon jetzt der Theilbruch $\frac{1}{a_0 x + 1 : a_1}$ entwickelt ist, hinein und giebt selbst wieder Gelegenheit zu einem neuen Schritt u. s. w.

Die Formeln der vorstehenden Paragraphen, welche dienen, den Quotienten zweier Reihen in einen Kettenbruch zu verwandeln, vereinfachen sich noch für den Fall, wo aus einer Reihe ein Kettenbruch entwickelt werden soll. Setzt man in (3) $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = A_4 = \cdots\cdots = A_{n-1} = 0$, so dienen zur Bestimmung der Theilnenner a die $2n$ Gleichungen

$$(14.) \quad \begin{cases} (a_0 , a_\mu)_0 = B_0 ; (a_0 , a_\mu)_2 = B_1 \cdots\cdots (a_0 , a_\mu)_{2r} = B_r \cdots\cdots (a_0 , a_\mu)_{n-1} = B_{n-1} \\ (a_1 , a_\mu)_0 = 1 ; \ (a_1 , a_\mu)_2 = 0 \ \cdots\cdots (a_1 , a_\mu)_{2r} = 0 \ \cdots\cdots (a_1 , a_\mu)_{n-1} = 0 , \end{cases}$$

und nach dieser Berechnung der Theilnenner ist

$$\frac{1}{\sum_0^n B_\alpha x^\alpha} = 1 : (a_0 + x : (a_1 + x : (a_2 + \cdots\cdots + a : a_\mu)$$

$$\text{oder } \sum_0^n B_\alpha \, x^\alpha = a_0 + x : (a_1 + x : (a_2 + \cdots\cdots + x : a_\mu) \ .$$

Und eben so ist nach den Entwicklungen in (§. 2) auch:

$$a_1 \cdot \sum_0^n B_\alpha \cdot x^\alpha = \Sigma(a_0, a_1)_{2\alpha} \cdot x^\alpha - a_3 x^2 : [\Sigma(a_1, a_3)_{2\alpha} \cdot x^\alpha - a_1, a_5 x^2 : [\Sigma(a_3, a_5)_{2\alpha} \cdot x^\alpha - \cdots\cdots$$
$$- a_{\mu-4} a_\mu x^2 : \Sigma(a_{\mu-2} , a_\mu)_{2\alpha} \cdot x^\alpha] .$$

Dabei nimmt dann die Formel (10), welche über die Zusammensetzung der Coefficienten der Reste Aufschluss giebt, eine einfachere Gestalt an; sie geht über in:

$$(a_r , a_\mu)_{2s} = (-1)^r \Sigma(a_1 , a_{r-2})_{2\alpha} \cdot B_{s+\beta} \text{ cond } \alpha + \beta = r - 1 .$$

Wollte man daraus nur die Theilnenner berechnen, so hätte man $s = 0$ zu setzen und r alle Werthe von 2 bis μ durchlaufen zu lassen, um dann $a_r = \frac{(a_r , a_\mu)_0}{(a_{r+1} , a_\mu)_0}$ anzuwenden. Die so berechneten μ Theilnenner sind nicht von einander unabhängig, da aus den $n = \frac{1}{2}(\mu+1)$ Coefficienten B zusammengesetzt sind; die Bedingungen, welchen sie genügen, sind die n Gleichungen der untern Reihe in (14).

In (§. 4) ist zu der bereits bekannten recurrirenden Berechnung der Theilnenner a noch ein zweites Verfahren derselben Art bei Gelegenheit der Bestimmung der Coefficienten der Reste hinzugefügt worden. Für den Theilnenner a_r ergiebt sich aus (10) leicht folgender Ausdruck:

$$a_r = -\frac{\Sigma[(a_1\ ,\ a_{r-2})\ \cdot B_\beta - (a_0\ ,\ a_{r-2})_{2\alpha}\cdot A_\beta]\ \text{cond}\ \alpha+\beta=r-1}{\Sigma[(a_1\ ,\ a_{r-1})_{2\alpha}\ B_\beta - (a_0\ ,\ a_{r-1})_\alpha\ A_\beta]\ \text{cond}\ \alpha+\beta=r}\ .$$

Setzt man noch im Dividenden, wo $\alpha < r-1$, $\alpha-1$ statt α, so ist

$$a_r = -\frac{\Sigma[(a_1\ ,\ a_{r-2})_{2\alpha-2}\cdot B_\beta - (a_0\ ,\ a_{r-2})_{2\alpha-2}\cdot A_\beta]}{\Sigma[(a_1\ ,\ a_{r-1})_{2\alpha}\cdot B_\beta - (a_0\ ,\ a_{r-1})_{2\alpha}\cdot A_\beta]}\ \text{cond}\ \alpha+\beta=r\ ,$$

und dieser Werth von a_r stimmt vollständig mit dem der Formel (4) in der frühern Abhandlung überein; er ist aber hier nur eine Anwendurg des besondern Falles der Formel (10) für $s=0$. Dazu ist nach den vorliegenden Untersuchungen durchaus nicht jener Ausdruck zur Berechnung von a_r zu empfehlen, sondern das reine Recursionsverfahren. Früher war der Divisor im Werthe von a_r der Quotient $\frac{B_0}{(a_0\ ,\ a_r)_0}$, welcher mit dem jetzigen $(a_{r+1}\ ,\ a_\mu)_0$ derselbe ist, weil nach den Gleichungen (3) $B_0 = (a_0\ ,\ a_\mu)_0$ ist.

Auch noch ein zweites unabhängiges Verfahren will ich hier kurz andeuten. Ich habe früher von den Systemen (7 und 9) nur vorausgesetzt, dass sie nach den Producten $(a_0\ ,\ a_{2\mu})_0$ und $(a_0\ ,\ a_{2\mu+1})_0$ aufgelöst seien, und daraus die Werthe der Theilnenner hergeleitet. Wenn aus denselben Systemen die Summen $(a_0\ ,\ a_{2\mu})_{2\mu}$ und $(a_1\ ,\ a_{2\mu+1})_{2\mu}$ gefunden werden, so lässt sich daraus eben so wohl jeder Theilnenner a finden; denn es ist $a_{2\mu} = (a_0\ ,\ a_{2\mu})_{2\mu} - (a_0\ ,\ a_{2\mu-2})_{2\mu-2}$

und $a_{2\mu+1} = (a_1\ ,\ a_{2\mu+1})_{2\mu} - (a_1\ ,\ a_{2\mu-1})_{2\mu-2}$.

Auch die Gleichungen (3) sind genau genommen nur die Auflösung des Systems (9) für $\mu = n-1$: des letzten, welches bei einer Gleichung $n$ten Grades vorkommt.

Die im Vorstehenden mehrmals angewandte Darstellung des Kettenbruchs durch $1:(a_0+x:(a_1+x:(a_2+\cdots\cdots+x:a_\mu)$ ist zwar etwas weniger übersichtlich als die gebräuchliche, giebt aber sogleich zu erkennen, dass derselbe in die Reihe $\sum_0^\mu a_\alpha x^\alpha$ übergeht, wenn man Multiplications-Zeichen an die Stelle der Divisions-Zeichen treten lässt. Dasselbe gilt von den Kettenbrüchen unter (4) nicht unmittelbar, sondern erst dann, wenn wieder $1:x$ statt x eingeführt und die entstehenden negativen Exponenten weggeschafft sind; nämlich von der Form:

$$1:[b_0+b_1x+x^2:[b_2+b_3x+x^2:[b_4+b_5x+\cdots\cdots+x^2:(b_{2n}+b_{2n+1}x)]\ .$$

Diese geht in die Reihe $\sum_0^{2n+1} b_\alpha x^\alpha$ über, wenn die Division mit der Multiplication vertauscht wird.

Cöln, den 2. Januar 1851.

5.

Mémoire sur les fonctions arbitraires exprimées par des intégrales doubles, et de séries de quantités périodiques.

(Par Mr. *A. Meyer*, prof. de math. à Liège.)

L'objet de ce mémoire consiste à faire dépendre d'une proposition unique la théorie des fonctions arbitraires de *Fourier*, rapportées à une seule variable. Je partagerai ce travail en deux parties. Dans la première je traiterai des fonctions arbitraires exprimées par des intégrales doubles; dans la seconde j'exposerai le développement des fonctions arbitraires en série, suivant les formules de *Lagrange* et de *Fourier*.

1ière PARTIE.

Des fonctions arbitraires exprimées par des intégrales doubles.

Théorême fondamental.

Si $f(t)$ est une fonction finie et continue pour toutes les valeurs de t, depuis $t = a$, jusqu'à $t = b$, en supposant $b > a > 0$, on aura:

$$\int_a^b f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}} = 0, \quad \text{pour } k = \infty.$$

Démons. on a, en effet

$$(a) \quad \int_a^b f(t) e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt = e^{-ka\sqrt{-1}}\, da\, [f(a) + f(a+da)\, e^{-kda\sqrt{-1}} + \ldots\ldots$$
$$+ f(a+(n-1)\,da)\, e^{-k(n-1)da\sqrt{-1}}].$$

Comme par hypothèse aucun des facteurs $f(a)$, $f(a+da)$, etc. n'est infini, ou discontinu, on a, à cause de $e^{-ka\sqrt{(-1)}}$,

$$(1.) \quad \int_a^b f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt = 0, \quad \text{pour } k = \infty$$

Cas particuliers.

1. Si $f(t)$ devient discontinu entre a et b, pour $t = \alpha$, alors, en supposant $b > \alpha > a > 0$, on écrira:

$$\int_a^b f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt = \int_a^{\alpha-da} f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt + \int_{\alpha+da}^b f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt\,;$$

et comme $f(t)$ reste fini et continu, entre a et $\alpha - da$, entre $\alpha + da$ et b, on aura

$$\int_a^{\alpha-da} f(t) e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt = 0\,, \quad \int_{\alpha+da}^b f(t) e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt = 0 \quad \text{pour } k = \infty\,,$$

et par suite $\int_a^b f(t) e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt = 0$, pour $k = \infty$.

2. Si $f(t)$ devient infini pour $t = a$, on pourra écrire la formule (a) de cette manière:

$$\int_a^b f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt = e^{-ka\sqrt{-1}}[da \times f(a)] + e^{-ka\sqrt{-1}}[da \times f(a+da) e^{-kda\sqrt{-1}} + \text{etc.}]\,;$$

d'où l'on voit que si, pour $da = 0$, on a

$$(2.) \qquad da \times f(a + da) = 0\,,$$

on aura encore $\int_a^b f(t) e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt = 0$, pour $k = \infty$.

3. Si $f(t)$ devenoit infini pour $t = b$, comme on a

$$a + n\,da = b\,,$$

et par suite $f(a + (n-1)da) = f(b - da)$, la formule (a) pourra s'écrire:

$$\int_a^b f(t) e^{-kt\sqrt{-1}} dt = e^{-ka\sqrt{-1}} da[f(a) + f(a+da) e^{-kda\sqrt{-1}} + \ldots\ldots] + e^{-ka\sqrt{-1}} da[(fb - da)],$$

donc si, en remplaçant da par zéro, on a

$$(3.) \qquad da \times f(b - da) = 0\,,$$

on aura encore: $\int_a^b f(t) e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt = 0$, pour $k = \infty$.

4. Si $f(t)$ devient infini pour $t = \alpha$, en supposant $b > \alpha > a > 0$, on pourra écrire

$$\int_a^b f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt = \int_a^{\alpha} f(t) e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt + \int_{\alpha}^b f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt\,;$$

or on a, à cause de la formule (2),

$$\int_{\alpha}^b f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt = 0\,, \quad \text{pour } k = \infty\,,$$

si l'on a: $da \times f(\alpha + da) = 0$;

et à cause de la formule (3), on aura aussi

$$\int_a^a f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}} dt = 0 \quad \text{pour } k = \infty \ ,$$

pourvu que l'on ait:

$$da \times f(a - da) = 0 \ .$$

Il suit de là, que l'on aura $\int_a^b f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}} dt = 0$, pourvu qu'en remplaçant da par zéro l'on ait en même temps:

$$(4.) \quad \begin{cases} da\, f(a + da) = 0 \\ da\, f(a - da) = 0 \end{cases}$$

5. Si l'on suppose $a = 0$, la form. (a) devient:

$$\int_0^b f(t) e^{-kt\sqrt{-1}} dt = da f(0) + e^{-kda\sqrt{-1}} [da f(da) + da f(2da) e^{-kda\sqrt{-1}} + \ldots\ldots] \ .$$
$$= da \times f(0) + (e^{-k\sqrt{-1}})^{da} [da \times f(da) + da f(2da) e^{-kda\sqrt{-1}} + \text{etc}] \ ;$$

donc 1° si $f(da)$, lorsqu'on remplace da par zéro, n'est pas infini, on aura, pour $k = \infty$,

$$(5.) \quad \int_0^b f(t) e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt = da \times f(0) = 0 \ .$$

2°. Si $f(da)$, lorsqu'on remplace da par zéro, devient infini, on aura encore

$$\int_0^b f(t) e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt = 0 \quad \text{pour } k = \infty \ ,$$

pourvu que l'on ait

$$(6.) \qquad da \times f(da) = 0 \ ,$$

en remplaçant da par zéro .

Problème fondamental.

c étant une quantité réelle et positive, chercher la valeur de l'intégrale

$$\int_0^c \frac{F(t)}{t}\, e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt \ , \quad \text{pour } k = \infty \ .$$

Solut. Si dans la formule

$$\int_0^c f(t) e^{-kt\sqrt{-1}} dt = 0 \ , \qquad \text{pour } k = \infty \ ,$$

on fait

$$f(t) = \frac{F(t) - F(0)}{t} \ ,$$

on aura:

$$f(0) = \frac{0}{0} \qquad \text{pour } t = 0 \ ,$$

ou $f(da) = \frac{0}{0}$, en remplaçant da par zéro. Donc **1°**, si la véritable valeur de cette expression indéterminée est zéro, ou une quantité finie, on aura, par la formule **(5)**,

$$\int_0^c f(t) e^{-kt\sqrt{-1}} dt = \int_0^c \frac{F(t)-F(0)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}} dt = 0 , \quad k = \infty .$$

2°. Si la vraie valeur de $\frac{0}{0}$ est au contraire l'infinie, on aura par la formule **(6)**,

$$\int_0^c f(t)\, e^{-kt\sqrt{-1}} dt = \int_0^c \frac{F(t)-F(0)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}} dt = 0 \quad \text{pour } k = \infty ,$$

pourvu que l'on ait $da \times f(da) = 0$, pour $da = 0$.

Or on a ici:

$$da \times f(da) = da \,.\, \frac{F(da)-F(0)}{da} = F(da) - F(0) \;;$$

or en remplaçant da par zéro, on a $F(da) - F(0) = F(0) - F(0) = 0$, donc la condition **(6)** est remplie, et par suite on a toujours:

$$(7.) \quad \int_0^c \frac{F(t)-F(0)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}} dt = 0 \quad \text{pour } k = \infty .$$

De la formule (7) on tire:

$$(8.) \quad \int_0^c \frac{F(t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}} dt = F(0) \int_0^c \frac{e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt}{t} .$$

Si l'on pose $kt = z$ dans le second membre de **(8)**, il vient

$$(9.) \quad \int_0^c \frac{F(t)}{t} e^{-kt\sqrt{(-1)}}\, dt = F(0) \int_0^{kc} \frac{e^{-z\sqrt{-1}}\, dz}{z} = F(0) \int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}}\, dz}{z} ,$$

à cause de $k = \infty$.

De **(9)** on tire

$$\int_0^c \frac{F(t)}{t} \cos kt\, dt = F(0) \int_0^\infty \frac{\cos z\, dz}{z} , \quad \int_0^c \frac{F(t)}{t} \sin kt\, dt = F(0) \int_0^\infty \frac{\sin z\, dz}{z} .$$

Donc, en multipliant la deuxième de ces égalités par $\sqrt{-1}$, on aura, en ajoutant:

$$\int_0^c \frac{F(t)}{t} \cos kt\, dt + \int_0^\infty \frac{F(t)}{t} \sqrt{-1} \sin kt\, dt = F(0) \left[\int_0^\infty \frac{\cos z\, dz}{z} + \int_0^\infty \sqrt{-1} \frac{\sin z\, dz}{z} \right] ,$$

d'où:

$$(10.) \quad \int_0^c \frac{F(t)}{t} e^{kt\sqrt{-1}}\, dt = F(0) \int_0^\infty \frac{e^{z\sqrt{-1}}\, dz}{z}$$

1re *Probléme. a et b étant des quantités réelles, chercher la valeur de l'intégrale*

$$\int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt\,, \qquad \text{pour} \quad k = \infty.$$

1°. *Soit* $b > a > 0$;

dans cette supposition on a:

$$\int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}dt = \int_0^b \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}dt - \int_0^a \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}dt\,.$$

donc, pour $k = \infty$, la formule (9) donnera

$$(11.)\quad \int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = \varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}}\,dz}{z} - \varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}}\,dz}{z} = 0\,.$$

2°. *Soit* $a > 0$, $b > 0$

on a alors:

$$\int_{-a}^{-b} \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}dt = \int_a^b \frac{\varphi(x-t)}{t} e^{kt\sqrt{-1}}dt = \int_0^b \frac{\varphi(x-t)}{t} e^{kt\sqrt{-1}}\,dt - \int_0^a \frac{\varphi(x-t)}{t} e^{kt\sqrt{-1}}\,dt\,.$$

donc, pour $k = \infty$, on aura, par la formule (10.),

$$(12.)\quad \int_{-a}^{-b} \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = \varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{z\sqrt{-1}}\,dz}{z} - \varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{z\sqrt{-1}}\,dz}{dz} = 0.$$

3°. $a < 0$, $b > 0$.

Dans ce cas on a:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{b} \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}dt &= \int_0^b \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt + \int_{-a}^0 \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt \\ &= \int_0^b \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}dt - \int_0^{-a} \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}dt \\ &= \int_0^b \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}dt - \int_0^a \frac{\varphi(x-t)}{t} e^{kt\sqrt{-1}}\,dt\,.\end{aligned}$$

donc pour $k = \infty$, on aura, à cause des formules (9 et 10):

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{b} \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}dt &= \varphi(x)\left[\int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}}dz}{z} - \int_0^\infty \frac{e^{z\sqrt{-1}}dz}{z}\right] \\ &= \varphi(x)\left[\int_0^\infty \frac{\cos z\,dz}{z} - \sqrt{(-1)}\int_0^\infty \frac{\sin z\,dz}{z} - \int_0^\infty \frac{\cos z\,dz}{z} - \sqrt{(-1)}\int_0^\infty \frac{\sin z\,dz}{z}\right]\end{aligned}$$

$$= \varphi(x) \times -\sqrt{-1}.2\int_0^\infty \frac{\sin z\,dz}{z}$$

$$= -\sqrt{-1} \times \pi\varphi(x). \qquad (13.)$$

$$4^0. \quad a > 0 \ , \ b < 0.$$

On a alors:

$$\int_a^{-b} \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = \int_{-a}^{b} \frac{\varphi(x-t)}{t} e^{kt\sqrt{-1}}\,dt$$

$$= \int_0^b \frac{\varphi(x-t)}{t} e^{kt\sqrt{-1}}\,dt - \int_0^{-a} \frac{\varphi(x-t)}{t} e^{kt\sqrt{-1}}\,dt$$

$$= \int_0^b \frac{\varphi(x-t)}{t} e^{kt\sqrt{-1}}\,dt - \int_0^a \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt.$$

donc, pour $k = \infty$, et à cause des formules (9 et 10), on a:

$$\int_a^{-b} \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = \varphi(x)\Big[\int_0^\infty \frac{\cos z\,dz}{z} + \sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{\sin z\,dz}{z} - \int_0^\infty \frac{\cos z\,dz}{z} + \sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{\sin z\,dz}{z}\Big]$$

$$= \sqrt{-1} \times \pi\varphi(x). \qquad (14.)$$

2me *Problême. Chercher la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^\infty du \int_a^b \varphi(x+t)\, e^{-ut\sqrt{-1}}\,dt.$$

Solut. En différentiant $e^{-kt\sqrt{-1}}$ par rapport à k, on a

$$d(e^{-kt\sqrt{-1}}) = -\sqrt{-1}\, t\, e^{-kt\sqrt{-1}}\,dk,$$

d'où:

$$\frac{e^{-kt\sqrt{-1}}}{t} = -\sqrt{-1}\int e^{-kt\sqrt{-1}}\,dk.$$

Pour $k = 0$, le premièr membre se réduit à $\frac{1}{t}$; on a donc

$$\frac{e^{-kt\sqrt{-1}} - 1}{t} = -\sqrt{-1}\int_0^k e^{-kt\sqrt{-1}}\,dk = -\sqrt{-1}\int_0^k e^{-ut\sqrt{-1}}\,du. \qquad (15.)$$

Si on multiplie les deux membres par $\varphi(x+t)\,dt$, et qu'on intégre entre les limites a et b, on a:

$$\int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt - \int_a^b \frac{\varphi(x+t)\,dt}{t} = -\sqrt{-1}\int_a^b \varphi(x+t)\,dt \int_0^k e^{-ut\sqrt{-1}}\,du$$

$$= -\sqrt{-1}\int_0^k du \int_a^b \varphi(x+t)\, e^{-ut\sqrt{-1}}\,dt.$$

Pour $k = \infty$, il vient:

$$(16.)\quad \left[\int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt - \int_a^b \frac{\varphi(x-t)dt}{t}\right]_{k=\infty} = -\sqrt{-1}\int_0^\infty du \int_a^b \varphi(x+t)\, e^{-ut\sqrt{-1}}\,dt.$$

Or si a et b sont positif, on aura par **(11)**,

$$\int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = 0 \quad , \quad \text{pour } k = \infty \ ;$$

et si $a < 0 \quad , \quad b > 0$, on aura par la formule **(13)**:

$$\int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = -\sqrt{-1} \times \pi\varphi(x);$$

on a donc, à la place de **(16)**, les deux formules

$$(17.)\quad \int_0^\infty du \int_a^b \varphi(x+t)\, e^{-ut\sqrt{-1}}\,dt = -\sqrt{-1}\int_a^b \frac{\varphi(x+t)}{t}\,dt \text{ et}$$

$$(18.)\quad \int_0^\infty du \int_0^b \varphi(x+t)\, e^{-ut\sqrt{-1}}\,dt = \pi\varphi(x) - \sqrt{-1}\int_{-a}^b \frac{\varphi(x+t)}{t}\,dt.$$

3e *Problème. Chercher la valeur des intégrales*

$$\int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t)\, e^{u(x-t)\sqrt{-1}}\,dt \quad , \quad \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t)\, e^{u(x+t)\sqrt{-1}}\,dt.$$

On suppose $\beta > \alpha > 0.$

Solut. 1°. Si, après avoir fait dans **(18)** $t = t' - x$, on supprime l'accent de t, on trouve:

$$(19.)\quad \pi\varphi(x) + \sqrt{-1}\int_{x-a}^{b+x} \frac{\varphi(t)dt}{x-t} = \int_0^\infty du \int_{x-a}^{b+x} \varphi(t) e^{+u(x-t)\sqrt{-1}}\,dt \ , \quad \text{où l'on a:}$$

$b + x > x > x - a$. Posons $\beta = b + x \quad , \quad \alpha = x - a \quad ,$ on a:

$$(A).\quad \pi\varphi(x) + \sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x-t} = \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) e^{u(x-t)\sqrt{-1}}\,dt \ , \quad \beta > x > \alpha > 0.$$

2°. Si, après avoir fait dans **(17)** $t = t' - x$, on supprime l'accent de t, on trouve:

$$(20.)\quad \sqrt{-1}\int_{a+x}^{b+x} \frac{\varphi(t)dt}{x-t} = \int_0^\infty du \int_{a+x}^{b+x} \varphi(t)\, e^{u(x-t)\sqrt{-1}}\,dt \ ; \quad x < a+x < b+x,$$

et si nous posons ici $a+x=\alpha$, $b+x=\beta$, on pourra écrire

$$(21.)\qquad \sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x-t}=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,e^{u(x-t)\sqrt{-1}}\,dt\,,\ x<\alpha<\beta\,.$$

Comme on a évidemment $-x<\alpha<\beta$, on peut changer dans **(21)**, x en $-x$, ce qui donne:

$$-\sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x+t}=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,e^{-u(x+t)\sqrt{-1}}dt\quad,\qquad -x<\alpha<\beta\,.$$

De celle-ci on tire:

$$-\sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x+t}=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cos u(x+t)\,dt$$

$$-\sqrt{-1}\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\sin\,u\,(x+t)\,dt\,,$$

ou:

$$0=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\cos\,u\,(x+t)\,dt\,,$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x+t}=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\sin\,u\,(x+t)\,dt\,;$$

donc, en multipliant la seconde par $\sqrt{-1}$, on a, en ajoutant:

$$(B.)\qquad \sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x+t}=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,e^{u(x+t)\sqrt{-1}}\,dt\,,\ -x<\alpha<b\,,$$

la condition $-x<\alpha<\beta$ étant toujours remplie quand x, α, β sont positifs. Il s'ensuit que les formules (*A* et *B*) subsistent simultanément, si x, α, β sont positifs et que l'on a $\beta>x>\alpha$.

Cas particuliers des formules (A et B).

1. Les formules (*A* et *B*) subsisteront encore pour $\alpha=0$ et $\beta=\infty$, car dans ce cas les conditions précédentes sont remplies.

2. Soit $x=\alpha=\begin{cases}x-a\\x+a\end{cases}$, d'où $a=0$. Dans ce cas la formule **(16)** devient:

$$\Big[\int_0^b \frac{\varphi(x+t)}{t}e^{-kt\sqrt{-1}}dt-\int_0^b \frac{\varphi(x+t)}{t}dt\Big]_{=\infty}=-\sqrt{-1}\int_0^\infty du\int^b \varphi(x+t)e^{-kt\sqrt{-1}}dt\,,$$

d'où, à cause de **(9)**,

$$\varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}}dz}{z}-\int_0^b \frac{\varphi(x+t)dt}{t}=-\sqrt{-1}\int_0^\infty du\int^b \varphi(x+t)\,e^{-ut\sqrt{-1}}dt\,,$$

ou,

$$\Pi\times\tfrac{1}{2}\varphi(x)+\sqrt{-1}\Big[\varphi(x)\int_0^\infty \frac{\cos z\,dz}{z}-\int_0^b \frac{\varphi(x+t)}{t}dt\Big]=\int_0^\infty du\int_0^b \varphi(x+t)e^{-ut\sqrt{-1}}dt.$$

Pour $t = t' - x$, on a:

$$\Pi \times \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \sqrt{-1}\left[\varphi(x)\int_0^\infty \frac{\cos z\,dz}{z} + \int_x^{b+x} \frac{\varphi(t)\,dt}{x-t}\right] = \int_0^\infty du \int_x^{b+x} \varphi(t)\, e^{u(x-t)\sqrt{-1}}\, dt\ .$$

Mais comme on a par hypothèse $x = \alpha$, si de plus on fait $\beta = b + \alpha$, il vient:

$$(22.)\qquad \Pi \times \tfrac{1}{2}\varphi(\alpha) + \sqrt{-1}\left[\varphi(\alpha)\int_0^\infty \frac{\cos z\,dz}{z} + \int_0^\beta \frac{\varphi(t)\,dt}{\alpha - t}\right]$$

$$= \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t)\, e^{u(\alpha-t)\sqrt{-1}}\, dt\ .$$

3. Soit $x = \beta = x + b$, donc $b = 0$. Dans ce cas la formule **(16)** devient:

$$\left[\int_a^0 \frac{\varphi(x+t)}{t} e^{-kt\sqrt{-1}}\, dt - \int_a^0 \frac{\varphi(x+t)dt}{t}\right]_{k=\infty} = -\sqrt{-1}\int_0^\infty du \int_a^0 \varphi(x+t) e^{-ut\sqrt{-1}}\, dt\ ,$$

ou:

$$-\varphi(x)\int_0^\infty \frac{e^{-z\sqrt{-1}}\, dz}{z} + \int_0^a \frac{\varphi(x+t)dt}{t} = \sqrt{-1}\int_0^\infty du \int_a^0 \varphi(x+t) e^{-ut\sqrt{-1}}\, dt\ ,$$

ou,

$$\Pi \times \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \sqrt{-1}\left[\varphi(x)\int_0^\infty \frac{\cos z\,dz}{z} - \int_0^a \frac{\varphi(x+t)}{t}\, dt\right] = \int_0^\infty du \int_0^a \varphi(x+t) e^{-ut\sqrt{-1}}\, dt,$$

Pour $t = t' - x$, cette dernière formule devient:

$$\Pi \times \tfrac{1}{2}\varphi(x) + \sqrt{-1}\left[\varphi(x)\int_0^\infty \frac{\cos z\,dz}{z} + \int_x^{a+x} \frac{\varphi(t)\,dt}{x-t}\right] = \int_0^\infty du \int_x^{a+x} \varphi(t) e^{u(x-t)\sqrt{-1}}\, dt\ .$$

Comme on a, par hypothèse, $x = \beta$, si on fait de plus $a + \beta = \gamma$, il vient:

$$(23.)\qquad \Pi \times \tfrac{1}{2}\varphi(\beta) + \sqrt{-1}\left[\varphi(\beta)\int_0^\infty \frac{\cos z\,dz}{z} + \int_\beta^\gamma \frac{\varphi(t)\,dt}{\beta - t}\right]$$

$$= \int_0^\infty du \int_\beta^\gamma \varphi(t)\, e^{u(\beta-t)\sqrt{-1}}\, dt\ .$$

4. Supposons que la fonction $\varphi(x)$ soit discontinue au point $x = c$. Dans ce cas l'équation (A) donne

$$\Pi\varphi(c - dc) + \sqrt{-1}\int_a^\beta \frac{\varphi(t)dt}{c - dc - t} = \int_0^\infty du \int_a^\beta \varphi(t)\, e^{u(c-t)\sqrt{-1}}\, dt\ .\ e^{-udc\sqrt{-1}}\ ,$$

$$\Pi\varphi(c + dc) + \sqrt{-1}\int_a^\beta \frac{\varphi(t)dt}{c + dc - t} = \int_0^\infty du \int_a^\beta \varphi(t)\, e^{u(c-t)\sqrt{-1}} dt\ .\ e^{udc\sqrt{-1}}\ ;$$

donc, en remplaçant dc par zéro, on aura en ajoutant:

(23 bis) $$\Pi\frac{\varphi(c-0)+\varphi(c+0)}{2}+\sqrt{-1}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\varphi(t)dt}{c-t}=\int_{0}^{\infty}du\int_{\alpha}^{\beta}\varphi(t)e^{(uc-t)\sqrt{-1}}dt\ .$$

Dans ce cas $\frac{1}{2}(\varphi(c-0)+\varphi(c+0))$, est la moyenne arithmétique des deux valeurs de la fonction $\varphi(x)$, correspondantes à l'abscisse $x=c$.

4. *Problême. Chercher la valeur des intégrales*

$$\int_{0}^{\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)e^{u(x-t)\sqrt{-1}}dt\ ,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)e^{u(x-t)\sqrt{-1}}dt\ .$$

Solut. Si dans la formule (19) on fait $a=b=\infty$, on a:

(24.) $$\Pi\varphi(x)+\sqrt{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)dt}{x-t}=\int_{0}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)e^{u(x-t)\sqrt{-1}}dt\ ,\quad \infty>x>-\infty\ .$$

La formule (24) se partage en deux:

(25.) $$\Pi\varphi(x)=\int_{0}^{\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\cos u(x-t)\,dt\ ,$$

$$\infty>x>-\infty$$

(26.) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)dt}{x-t}=\int_{0}^{\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\sin u(x-t)\,dt\ .$$

Comme on a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos u(x-t)\,du=2\int_{0}^{\infty}\cos u(x-t)\,du\ ,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\sin u(x-t)\,du=0\ ,$$

les équations (25) et (26) deviennent:

(27.) $$2\Pi\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt\,.\,2\int_{0}^{\infty}\cos u(x-t)\,du=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\cos u(x-t)du$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\cos u(x-t)\,dt\ ;$$

(28.) $$0=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)dt\left[\int_{0}^{\infty}\sin u(x-t)\,du-\int_{0}^{\infty}\sin u(x-t)\,du\right]$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt\left[\int_{0}^{\infty}\sin u(x-t)\,du+\int_{-\infty}^{0}\sin u(x-t)\,du\right]$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\,dt\int_{-\infty}^{+\infty}\sin u(x-t)\,du=\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\sin u(x-t)\,dt\ .$$

Si on multiplie celle-ci par $\sqrt{-1}$, et qu'on l'ajoute à (27), on trouve

(29.) $$2\Pi\varphi(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)e^{u(x-t)\sqrt{-1}}dt\ ,\quad \infty>x>-\infty\ .$$

5e *Problême. Chercher les valeurs des intégrales*

$$\int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t)\cos ux\cos ut\,dt \quad , \int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin ux\sin ut\,dt\,. \quad \beta>\alpha>0.$$

Solut. Les formules (*A* et *B*) donnent:

$$(C.)\begin{cases}\pi\varphi(x)+\sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x-t}=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cos u(x-t)dt+\sqrt{-1}\int_\alpha^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin u(x-t)dt,\\ \sqrt{-1}\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x+t}=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cos u(x+t)dt+\sqrt{-1}\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin u(x+t)dt,\\ \qquad\qquad \beta>x>\alpha>0\ .\end{cases}$$

La comparaison des termes réels conduit aux égalités:

$$\pi\varphi(x)=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cos ux\cos ut\,dt+\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin ux\sin ut\,dt\,,$$

$$0=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cos ux\cos ut\,dt-\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin ux\sin ut\,dt\ ;$$

et on tire de celle-ci par addition et soustraction:

$$(30).\begin{cases}\frac{1}{2}\pi\varphi(x)=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\cos ux\cos ut\,dt \quad , \quad \beta>x>\alpha>0\ ,\\ \frac{1}{2}\pi\varphi(x)=\int_0^\infty du\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sin ux\sin ut\,dt \quad , \quad \beta>x>\alpha>0\ .\end{cases}$$

Cas particuliers.

1. Comme les formules (*A* et *B*) subsistent pour $\alpha=0$, $\beta=\infty$, il en sera de même des formules (**30**).
2. La première des formules (**30**) subsiste encore pour $x=0$; il n'en est pas de même pour la seconde.

   La première subsistera pour des valeurs négatives de x si l'on a accidentellement $\varphi(-x)=\varphi(x)$, et la seconde si l'on a $\varphi(-x)=-\varphi(x)$.
3. Pour $x=\alpha$, et $x=\beta$, l'on voit par les formules (**22** et **23**) qu'il suffira de changer dans (**30**) $\varphi(x)$ respectivement en $\frac{1}{2}\varphi(\alpha)$ et $\frac{1}{2}\varphi(\beta)$.
4. La formule (**23** bis) montre aussi que les formules (**30**) subsistent encore pour le cas où $\varphi(x)$ seroit discontinu au point $x=c$, pourvu que pour ce point on remplaçe $\varphi(x)$ par la moyenne arithmétique $\frac{1}{2}(\varphi(c-0)+\varphi(c+0))$.

6e *Problême. Chercher les valeurs des intégrales*

$$\int_0^\infty du \int_0^\infty \varphi(t) \cos ux \cos ut\, dt \quad , \int_0^\infty du \int_0^\infty \varphi(t) \sin ux \sin ut\, dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_0^\infty \varphi(t) \cos xu \cos ut\, dt \quad , \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_0^\infty \varphi(t) \sin xu \sin ut\, dt$$

Solut. Si dans les formules (30) on fait $a = 0$, $\beta = \infty$, on a:

$$(31.) \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\pi\varphi(x) = \int_0^\infty du \int_0^\infty \varphi(t) \cos ux \cos ut\, dt \quad , \quad \infty > x \geqq 0 \\ \frac{1}{2}\pi\varphi(x) = \int_0^\infty du \int_0^\infty \varphi(t) \sin ux \sin ut\, dt \quad , \quad \infty > x > 0 . \end{cases}$$

De plus, à cause de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos ux \cos ut\, du = 2 \int_0^\infty \cos ux \cos ut\, du ,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin ux \sin ut\, du = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \sin ux \sin ut\, du ,$$

les formules précédentes donneront:

$$(32.) \quad \begin{cases} \pi\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos xu\, du \int_0^\infty \varphi(t) \cos ut\, dt \quad , \quad x \geqq 0 , \\ \pi\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin xu\, du \int_0^\infty \varphi(t) \sin ut\, dt \quad , \quad x > 0 . \end{cases}$$

Ce sont là les formules de Fourier.

7e *Problême. Trouver la valeur des intégrales*

$$\int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) \sin ux \cos ut\, dt \quad \text{et} \quad \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) \cos ux \sin ut\, dt.$$

Solut. En comparant les termes affectés du facteur $\sqrt{-1}$, les formules (*c*) du cinquième problême donnent:

$$\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x-t} = \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) \sin ux \cos ut\, dt - \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) \cos ux \sin ut\, dt ,$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{\varphi(t)dt}{x+t} = \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) \sin ux \cos ut\, dt + \int_0^x du \int_\alpha^\beta \varphi(t) \cos ux \sin ut\, dt ;$$

d'où l'on tire par addition et soustraction:

$$(33.) \quad \begin{cases} \int_\alpha^\beta \frac{x\varphi(t)\,dt}{x^2-t^2} = \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) \sin ux \cos ut\, dt \quad , \quad \beta > x > \alpha > 0, \\ -\int_\alpha^\beta \frac{t\varphi(t)\,dt}{x^2-t^2} = \int_0^\infty du \int_\alpha^\beta \varphi(t) \cos ux \sin ut\, dt \quad , \quad \beta > x > \alpha > 0. \end{cases}$$

La première subsiste encore pour $x = 0$.

Application.

Pour montrer l'usage des formules (*A* et *B*) combinées, dont la seconde, comme je crois, se présente pour la première fois, dans ce mémoire, je ferai $\varphi(x)=e^{-ax}$, $x=b$, $\alpha=0$, $\beta=\infty$. On aura d'abord par la transcendante connue

$$(34.)\qquad \int_0^m \frac{dz}{lz} = li(m)\,;$$

1° pour $m=e^{ab}$, et $z=e^{a(b-t)}$, les valeurs $dz=-e^{a(b-t)}adt$, $lz=a(b-t)$. De plus les limites $z=\begin{cases}m\\0\end{cases}$, répondront aux limites $t=\begin{cases}0\\\infty\end{cases}$, et par conséquent on aura par (34):

$$(35.)\qquad \int_0^\infty \frac{dt}{b-t}e^{-at} = e^{-ab}li(e^{ab})\,.$$

2° Pour $m=e^{-ab}$, $z=e^{-a(b+t)}$, on a:

$$(36.)\qquad \int_0^\infty \frac{dt}{b+t}e^{-at} = -e^{ab}li(e^{-ab}).$$

Cela posé, les formules (*A* et *B*) donnent:

$$(37.)\qquad \pi\,.\,e^{-ab}+\sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{dt}{b-t}e^{-at} = \int_0^\infty du\int_0^\infty e^{-u(t-b)\sqrt{-1}}e^{-at}dt$$

$$(38.)\qquad \sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{dt}{b+t}e^{-at} = \int_0^\infty du\int_0^\infty e^{u(b+t)\sqrt{-1}}e^{-at}dt,$$

ou, à cause des formules (35 et 36):

$$\pi e^{-ab}+\sqrt{-1}\,e^{-ab}li(e^{ab}) = \int_0^\infty du\int_0^\infty e^{-u(t-b)\sqrt{-1}}e^{-at}dt$$

$$= \int_0^\infty e^{bu\sqrt{-1}}du\int_0^\infty e^{-(a+u\sqrt{-1})}dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{bu\sqrt{-1}}du}{a+u\sqrt{-1}} = \int_0^\infty \frac{(a-u\sqrt{-1})e^{bu\sqrt{-1}}du}{a^2+u^2}$$

$$(39.)\qquad = \int_0^\infty \frac{ae^{bu\sqrt{-1}}du}{a^2+u^2} - \sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{ue^{bu\sqrt{-1}}du}{a^2+u^2}$$

$$(40.)\qquad = \int_0^\infty \frac{a\cos bu}{a^2+u^2}du + \sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{a\sin bu}{a^2+u^2}du - \sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{u\cos bu}{a^2+u^2}du$$
$$+\int_0^\infty \frac{u\sin bu}{a^2+u^2}du\,.$$

$$-\sqrt{-1}e^{ab}li(e^{-ab}) = \int_0^\infty du\int_0^\infty e^{u(b+t)\sqrt{-1}}e^{-at}dt$$

$$= \int_0^\infty e^{ub\sqrt{-1}}du\int_0^\infty e^{-(a-u\sqrt{-1})t}dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{ub\sqrt{-1}}du}{a-u\sqrt{-1}} = \int_0^\infty \frac{(a+u\sqrt{-1})\,e^{bu\sqrt{-1}}du}{a^2+u^2}$$

$$(41.) \quad = \int_0^\infty \frac{a e^{bu\sqrt{-1}}du}{a^2+u^2} + \sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{u e^{bu\sqrt{-1}}du}{a^2+u^2}$$

$$(42.) = \int_0^\infty \frac{a\cos bu}{a^2+u^2}\,du + \sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{a\sin bu\,du}{a^2+u^2} + \sqrt{-1}\int_0^\infty \frac{u\cos bu\,du}{a^2+u^2} - \int_0^\infty \frac{u\sin bu\,du}{a^2+u^2}\,.$$

Les formules (40) et (42), par la comparaison des termes réels et imaginaires, se décomposent chacune en deux équations, et donnent:

$$\pi e^{-ab} = \int_0^\infty \frac{a\cos bu\,du}{a^2+u^2} + \int_0^\infty \frac{u\sin bu\,du}{a^2+u^2}\,, \quad e^{-ab}\,li(e^{ab}) = \int_0^\infty \frac{a\sin bu}{a^2+u^2}\,du - \int_0^\infty \frac{u\cos bu\,du}{a^2+u^2}\,,$$

$$0 = \int_0^\infty \frac{a\cos bu\,du}{a^2+u^2} - \int_0^\infty \frac{u\sin bu\,du}{a^2+u^2}\,, \quad e^{ab}\,li(e^{-ab}) = -\int_0^\infty \frac{a\sin bu\,du}{a^2+u^2} - \int_0^\infty \frac{u\cos bu\,du}{a^2+u^2}\,.$$

On en tire, par addition et soustraction, les formules connues:

$$\int_0^\infty \frac{a\cos bu\,du}{a^2+u^2} = \tfrac{1}{2}\pi e^{-ab}\,, \quad \int_0^\infty \frac{u\sin bu\,du}{a^2+u^2} = \tfrac{1}{2}\pi e^{-ab}\,.$$

$$\int_0^\infty \frac{a\sin bu\,du}{a^2+u^2} = +\tfrac{1}{2}\left[e^{-ab}\,li(e^{ab}) - e^{ab}\,li(e^{-ab})\right],$$

$$\int_0^\infty \frac{u\cos bu\,du}{a^2+u^2} = -\tfrac{1}{2}\left[e^{-ab}\,li(e^{ab}) + e^{ab}\,li(e^{-ab})\right].$$

SECONDE PARTIE.

Développement d'une fonction arbitraire suivant les cosinus et les sinus des multiples de la variable.

La marche de nos déductions étant la même que celle que M^r. *Lejeune-Dirichlet* à suivi, je tacherai de resumer en peu de mots cette importante doctrine.

1er *Problême. Trouver la valeur de*

$$\int_0^c \frac{F(t)\sin kt}{t}\,dt\,,$$

pour $k = \infty$.

Solut. La formule (9) de la première partie donne

$$\int_0^c \frac{F(t)\cos kt}{t}\,dt - \sqrt{-1}\int_0^c \frac{F(t)\sin kt}{t}\,dt = F(0)\int_0^\infty \frac{\cos z\,dz}{z} - \sqrt{-1}\,F(0)\int_0^\infty \frac{\sin z\,dz}{z}\,.$$

En comparant les termes affectés de $\sqrt{-1}$, on trouve:

$$(43.)\quad \int_0^c \frac{F(t)\sin kt}{t}\,dt = \tfrac{1}{2}\pi F(0)\,,$$

pour $k = \infty$.

2me. *Problème. Trouver la valeur de l'intégrale*

$$\int_0^c f(t)\,\frac{\sin kt}{t}\,dt$$

pour $k = \infty$, *et pour les deux cas* $c < \pi$, $c = \pi$.

Solut. 1°. Soit $c < \pi$.

Si dans la formule (43), dans laquelle $F(t)$ est fini de $t = 0$ à $t = c$, on pose

$$(44.)\quad F(t) = \frac{t}{\sin t} f(t)\,,$$

le facteur $\frac{t}{\sin t}$ restera fini de $t = 0$, à $t = c$, à cause de $c < \pi$: donc si $f(t)$ reste fini dans le même intervalle, on aura à la place de (43) la formule suivante:

$$(45.)\quad \int_0^c \frac{f(t)\sin kt}{\sin t}\,dt = \tfrac{1}{2}\pi F(0)\,.$$

Mais on a, en vertu de (44),

$$F(da) = \frac{da}{\sin da} f(da) = \frac{da}{da} f(da) = f(da)\,;$$

donc aussi

$$F(0) = f(0)\,;$$

parsuite (45) devient:

$$(46.)\quad \int_0^c \frac{f(t)\sin kt}{\sin t}\,dt = \tfrac{1}{2}\pi f(0)\,,$$

pour $k = \infty$.

2°. Soit $c = \pi$, on a:

$$\int_0^\pi \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}\pi}^\pi \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt\,.$$

Fesons dans la dernière intégrale $t = \pi - t'$, on aura:

$$\int_0^\pi \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin kt'}{\sin t'} f(\pi - t')\,dt'\,;$$

donc pour $k = \infty$, et à cause de (46), il vient:

$$(47.)\quad \int_0^\pi \frac{\sin kt}{\sin t} f(t)\,dt = \tfrac{1}{2}\pi f(0) + \tfrac{1}{2}\pi f(\pi)\,.$$

3me. *Problême. Trouver, sous forme d'intégrales définies, les valeurs de*

$$\int_0^\pi f(t)[\tfrac{1}{2}+\cos x\cos t+\cos 2x\cos 2t+\ldots\ldots+\cos nx\cos nt]\,dt\,,$$

$$\int_0^\pi f(t)[\sin x\sin t+\sin 2x\sin 2t+\ldots\ldots+\sin nx\sin nt]\,dt\,.$$

Solut. On a:

$$\cos nx\cos nt = \tfrac{1}{2}\cos n(x+t)+\tfrac{1}{2}\cos n(x-t),$$
$$\sin nx\sin nt = \tfrac{1}{2}\cos n(x+t)+\tfrac{1}{2}\cos n(x-t),$$

donc en fesant ici $n=1, 2, \ldots\ldots n$, on trouve, en ajoutant:

$$\tfrac{1}{2}\cos+\cos x\cos t+\cos 2x\cos 2t+\ldots\ldots+\cos nx\cos nt =$$
$$\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}[\cos(x+t)+\cos 2(x+t)+\ldots\ldots+\cos n(x+t)]$$
$$+\tfrac{1}{2}[\cos(x-t)+\cos 2(x-t)+\ldots\ldots+\cos n(x-t)];$$
$$\sin x\sin t+\sin 2x\sin 2t\ \ldots\ldots\ +\sin nx\sin nt$$
$$=\tfrac{1}{2}[\cos(x-t)+\cos 2(x-t)+\ldots\ldots+\cos n(x-t)]$$
$$-\tfrac{1}{2}[\cos(x+t)+\cos 2(x+t)+\ldots\ldots+\cos n(x+t)].$$

En appliquant la formule

$$\cos u+\cos 2u+\ldots\ldots+\cos nu=-\tfrac{1}{2}+\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}u}{2\sin\frac{1}{2}u}\,,$$

et en multipliant par $f(t)dt$, on trouve, en intégrant entre 0 et π:

$$(48.)\quad \int_0^\pi f(t)\,dt\,[\tfrac{1}{2}+\cos x\cos t+\ldots\ldots+\cos nx\cos nt]=\int_0^\pi f(t)\,dt\,\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(x+t)}{4\sin\frac{1}{2}(x+t)}$$
$$+\int_0^\pi f(t)\,dt\,\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(x-t)}{4\sin\frac{1}{2}(x-t)}\,,$$

$$(49.)\quad \int_0^\pi f(t)dt[\sin x\sin t+\sin 2x\sin 2t+\ldots\ldots+\sin nx\sin nt]=\int_0^\pi f(t)\,dt\,\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(x-t)}{4\sin\frac{1}{2}(x-t)}$$
$$-\int_0^\pi f(t)\,dt\,\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(x+t)}{4\sin\frac{1}{2}(x+t)}\,.$$

4me. *Problême. Chercher la somme des suites*

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\,dt+\frac{4}{\pi}\cos x\int_0^\pi f(t)\,dt\cos t+\frac{4}{\pi}\cos 2x\int_0^\pi f(t)\cos 2t\,dt+\text{etc.},$$
$$\frac{4}{\pi}\sin x\int_0^\pi f(t)\sin t\,dt+\frac{4}{\pi}\sin 2x\int_0^\pi f(t)\sin 2t\,dt+\text{etc.}$$

Solut. Posons $2n+1=k$, $\frac{1}{2}(t-x)=u$. Aux limites $t=\begin{cases}\pi\\0\end{cases}$,

répondront les limites $u = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi - x) \\ -\frac{1}{2}x \end{cases}$, et si on fait $\frac{1}{2}(t+x) = u$, les limites de u seront $\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}(\pi+x)$ correspondantes aux limites **0** et π de t. On a donc:

$$\int_0^{\pi} \frac{f(t)\,dt \sin(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)} = \int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\sin k u\,du}{\sin u} f(2u+x)$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}x}^{0} f(2u+x)\,\frac{\sin k\,u\,du}{\sin u} + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} f(2u+x)\frac{\sin k\,u\,du}{\sin u}$$

$$u = t \qquad\qquad u = -t$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}x} f(x-2t)\frac{\sin k\,t\,dt}{\sin t} + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} f(x+2t)\,\frac{\sin k\,t\,dt}{\sin t} \quad . \tag{50.}$$

On trouvera de même:

$$\int_0^{\pi} \frac{f(t)\,dt \sin(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t+x)} = \int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \frac{\sin k u\,du}{\sin u} f(2u-x)$$

$$= -\int_0^{\frac{1}{2}x} f(2u-x)\,\frac{\sin k\,u\,du}{\sin u} + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} f(2u-x)\frac{\sin k\,u\,du}{\sin u}$$

$$= -\int_0^{\frac{1}{2}x} f(2t-x)\,\frac{\sin k\,t\,dt}{\sin t} + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} f(2t-x)\,\frac{\sin k\,t\,dt}{\sin t} \quad . \tag{51.}$$

En substituant ces valeurs dans **(48 et 49)**, on aura, pour n infini, et parsuite pour $k = \infty$:

$$\int_0^{\pi} f(t)\,dt + 2\cos x \int_0^{\pi} f(t)\cos t\,dt + 2\cos 2x \int_0^{\pi} f(t)\cos 2t\,dt + etc. = \int_0^{\frac{1}{2}x} f(x-2t)\,\frac{\sin k\,t\,dt}{\sin t}$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} f(x+2t)\,\frac{\sin k\,t\,dt}{\sin t} - \int_0^{\frac{1}{2}x} f(-x+2t)\,\frac{\sin k\,t\,dt}{\sin t} + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} f(-x+2t)\,\frac{\sin k\,t\,dt}{\sin t} \quad .$$

$$2\sin x \int_0^{\pi} f(t)\,dt \sin t + 2\sin 2x \int_0^{\pi} f t\,dt \sin 2t + etc. = \int_0^{\frac{1}{2}x} f(x-2t)\,\frac{\sin k\,t\,dt}{\sin t}$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} f(x+2t)\,\frac{\sin k\,t\,dt}{\sin t} + \int_0^{\frac{1}{2}x} f(-x+2t)\,\frac{\sin k\,t\,dt}{\sin t} - \int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} f(-x+2t)\,\frac{\sin k\,t\,dt}{\sin t} \quad .$$

Il ne s'agit plus que de trouver les valeurs des divers termes du second membre de ces équations, où k est infini. A cet effet, en fesant usage de la formule **(46)**, on trouve aisément $f(x)$ pour ces valeurs, en supposant toutesfois $f(x)$ continu entre **0** et π, et $\pi > x > 0$. On a donc

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt + \cos x \,.\, \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt \cos t + \text{etc.} \quad , \quad \pi > x > 0 \,,$$

$$f(x) = \sin x \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt \sin t + \sin 2x \,.\, \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt \sin 2t + \text{etc. } \pi > x > 0 \,.$$

Quoique les devéloppements qu' exigent les dernières formules, avec tous les détails qui s'y rapportent, soient bien connus, nous ne pouvions nous dispenser de

les réproduire ici, afin de faire voir comment toute cette doctrine se rattache au principe unique

$$\int_a^b f(t)\,e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = 0 \quad , \quad k = \infty \, ,$$

et peut en être tirée avec facilité.

Les quelques lignes qui précédent suffisent pour faire voir comment, en suivant la marche des calculs de M^r^. *Lejeune Dirichlet,* on peut trouver d'une manière très facile les formules de *Lagrange* et de *Fourier.* Mais il convient de rattacher cette méthode à des recherches plus générales, savoir à la sommation de la série

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f t\,dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} e^{\frac{\pi}{c}(t-x)\sqrt{-1}} f t\,dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} e^{\frac{2\pi}{c}(t-x)\sqrt{-1}} f t\,dt + etc.\,,$$

qui contient, comme cas très particuliers, les séries de *Lagrange* et de *Fourier.* A cet effet nous poserons d'abord les deux Lemmes qui suivent.

1er. *Lemme. Soit c un nombre positif, inférieur à* π, *et* $k = \infty$, *je dis que l'on aura:*

$$\int_0^c f(t)\,dt\,\frac{\cos kt}{\sin t} = 0 \, .$$

Car de la formule fondamentale

$$\int_0^c f(t)\,dt\,e^{-kt\sqrt{-1}}\,dt = 0 \quad , \quad \text{pour } k = \infty \, ,$$

on tire

$$\int_0^c f(t)\,dt\cos kt = 0 \quad , \quad \text{pour } k = \infty \, .$$

Cela posé, soit

$$f(t) = \frac{\varphi(t)}{\sin t} \, ;$$

$f(t)$ sera fini et continu entre 0 et c si la fonction $\varphi(t)$ jouit de la même propriété, et que l'on a de plus $t < \pi$; donc, en supposant $c < \pi$, on aura évidemment

$$(1'.) \quad \int_0^c \varphi(t)\,dt\,\frac{\cos kt}{\sin t} = 0 \quad , \quad \text{pour } k = \infty \, .$$

2me *Lemme.* n *étant un nombre entier et positif, je dis que l'on a:*

$$(2'.)\ \tfrac{1}{2}+e^{(x-t)\sqrt{-1}}+etc.+e^{n(x-t)\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(x-t)}{\sin\frac{1}{2}(x-t)}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\cot\tfrac{1}{2}(x-t)-\frac{\cos(2n+1)\frac{1}{2}(x-t)}{\sin\frac{1}{2}(x-t)}\right]$$

car on a:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}+e^{(x-t)\sqrt{-1}}+e^{2(x-t)\sqrt{-1}}+\cdots\cdots+e^{n(x-t)\sqrt{-1}}&=\tfrac{1}{2}+\cos(x-t)+\cos 2(x-t)+\cdots\cdots+\cos n(x-t)\\&\quad+\sqrt{-1}\,[\sin(x-t)+\sin 2(x-t)+\cdots\cdots+\sin n(x-t)]\\&=\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}(x-t)}+\sqrt{-1}\,\frac{\sin n\frac{1}{2}(x-t)\,\sin(n+1)\frac{1}{2}(x-t)}{\sin\frac{1}{2}(x-t)}\\&=\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}(x-t)}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\cot\tfrac{1}{2}(x-t)-\frac{\cos(2n+1)\frac{1}{2}(x-t)}{\sin\frac{1}{2}(x-t)}\right].\end{aligned}$$

Pour arriver maintenant à la sommation dont il s'agit, nous resoudrons les quatre problêmes suivants, qui renferment toute la théorie des séries périodiques de la nature de celles dont il s'agit ici.

1. *Problême. Chercher les sommes des suites*

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}f(t)\,dt+\int_0^{\pi}e^{(t-x)\sqrt{-1}}f(t)\,dt+\int_0^{\pi}e^{2(t-x)\sqrt{-1}}f(t)\,dt+etc.,$$

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}f(t)\,dt+\int_0^{\pi}e^{(t+x)\sqrt{-1}}f(t)\,dt+\int_0^{\pi}e^{2(t+x)\sqrt{-1}}f(t)\,dt+etc.$$

Solut. Multiplions les deux membres de (2') par $f(t)\,dt$, puis intégrons entre les limites 0 et π, il vient:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}f(t)\,dt+\int_0^{\pi}e^{(x-t)\sqrt{-1}}f(t)dt+\cdots\cdots+\int_0^{\pi}e^{n(x-t)\sqrt{-1}}f(t)dt&=\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(x-t)}{\sin\frac{1}{2}(x-t)}f(t)dt\\&\quad+\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\int_0^{\pi}\cot\tfrac{1}{2}(x-t)f(t)\,dt-\int_0^{\pi}\frac{\cos(2n+1)\frac{1}{2}(x-t)}{\sin\frac{1}{2}(x-t)}f(t)\,dt\right]\\&=\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}f(t)\,dt\end{aligned}$$

$$(3'.)\qquad+\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\int_0^{\pi}\frac{\cos(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}f(t)\,dt-\int_0^{\pi}\cot\tfrac{1}{2}(t-x)f(t)dt\right].$$

Soit $2n+1=k$, $\frac{1}{2}(t-x)=u$; il est clair qu'aux limites 0 et π de t répondront les limites $-\frac{1}{2}x$, $\frac{1}{2}(\pi-x)$ de u, et la formule précédente devient:

$$(4'.)\quad \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} t\, f(t)\,d + \int_0^{\pi} e^{(x-t)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \cdots\cdots + \int_0^{\pi} e^{n(x-t)\sqrt{-1}} f(t)\,dt$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\sin ku}{\sin u} f(2u+x)\,du + \sqrt{-1}\left[\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\cos ku}{\sin u} f(2u+x)\,du - \int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(u)\,du f(2u+x)\right].$$

Si l'on suppose n infini, et parsuite $k = \infty$, le premièr membre de la formule précédente sera une serie d'une infinité de termes, qui aura pour somme la valeur du second membre correspondant à $k = \infty$. Pour déterminer cette valeur, écrivons d'abord:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} f(t)dt + \int_0^{\pi} e^{(x-t)\sqrt{-1}} f(t)dt + \int_0^{\pi} e^{2(x-t)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc. = \int_{-\frac{1}{2}x}^{0} \frac{\sin ku}{\sin u} f(2u+x)\,du$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\sin ku}{\sin u} f(2u+x)du + \sqrt{-1}\left[\int_{-\frac{1}{2}x}^{0} \frac{\cos ku}{\sin u} f(2u+x)du + \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\cos ku}{\sin u} f(2u+x)du\right.$$

$$\left. - \int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(u) f(2u+x)du\right] = \int_0^{\frac{1}{2}x} \frac{\sin kt}{\sin t} f(x-2t)\,dt$$

$$+ \int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\sin kt}{\sin t} f(2t+x)dt + \sqrt{-1}\left[\int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \frac{\cos kt}{\sin t} f(2t+x)dt - \int_0^{\frac{1}{2}x} \frac{\cos kt}{\sin t} t(x-2f)dt\right.$$

$$\left. - \int_{-\frac{1}{1}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(t) f(2t+x)\,dt\right].$$

Soit $\pi > x > 0$, on aura aussi $\frac{1}{2}x < \pi$, $\frac{1}{2}(\pi - x) < \pi$; donc, à cause de $k = \infty$, et en ayant égard à la formule (1'):

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} f(t)\,dt + \int_0^{\pi} e^{(x-t)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \int_0^{\pi} e^{2(x-t)\sqrt{-1}} f(t)dt + etc. = \pi.\tfrac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$$

$$- \sqrt{-1}\left[\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(t) f(2t+x)\,dt\right].$$

Si la fonction $f(x)$ est continue pour toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle de 0 à π, on aura $f(x+0) = f(x-0) = f(x)$, et par suite la formule précédente devient:

$$(\mathrm{I.})\quad \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} f(t)\,dt + \int_0^{\pi} e^{(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \int_0^{\pi} e^{2(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc. = \pi f(x)$$

$$+ \sqrt{-1}\left[\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(t)\,dt f(2t+x)\right].$$

En opérant d'une manière toute semblable, on trouve:

$$\text{(II.)}\quad \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} f(t)dt+\int_0^{\pi} e^{(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt+\int_0^{\pi} e^{2(t+x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt+\text{etc.}$$
$$=\sqrt{-1}\Big[\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \cot(t)\,dt\,f(2t-x)\Big].$$

Ces formules subsistent pour les valeurs de x qui satisfont à la condition $\pi > x > 0$.

Si $x = 0$, leurs premiers membres seront égaux; donc en ajoutant et en divisant par 2, on obtient:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} f\,t\,dt+\int_0^{\pi} e^{t\sqrt{-1}} f(t)\,dt+\int_0^{\pi} e^{2t\sqrt{-1}} f(t)\,dt+\text{etc.}$$
$$=\tfrac{1}{2}\pi f(0)+\sqrt{-1}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cot(t)\,dt\,f(2t).$$

Si $x = \pi$, leurs premiers membres seront encore égaux; donc en ajoutant et en divisant par 2, il vient:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} f(t)\,dt-\int_0^{\pi} e^{t\sqrt{-1}} f(t)\,dt+\int_0^{\pi} e^{2t\sqrt{-1}} f(t)\,dt-\text{etc.}=\tfrac{1}{2}\pi f(\pi)$$
$$+\sqrt{-1}\Big\{\int_0^{\pi} \cot(t)\,dt\,f(2t-\pi)-\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cot(t)\,dt\,[f(2t-\pi)+f(\pi-2t)]\Big\}.$$

Corollaire I. Si nous développons les premiers membres des formules (I et II.), on a:

$$\text{(I'.)}\ \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} f(t)dt+\int_0^{\pi}\cos(t-x)f(t)dt+\int_0^{\pi}\cos 2(t-x)f(t)dt+etc.+\sqrt{-1}\Big[\int_0^{\pi}\sin(t-x)f t dt$$
$$+\int_0^{\pi}\sin 2(t-x)f(t)d+etc.\Big]=\pi f(x)+\sqrt{-1}\Big[\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\cot(t)dt\,f(2t+x)\Big];$$

$$\text{(II'.)}\ \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} f(t)\,dt+\int_0^{\pi}\cos(t+x)f(t)\,dt+\int_0^{\pi}\cos 2(t+x)f(t)\,dt+etc.$$
$$+\sqrt{-1}\Big[\int_0^{\pi}\sin(t+x)f(t)dt+\int_0^{\pi}\sin 2(t+x)f(t)dt+etc.\Big]=\sqrt{-1}\Big[\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\cot(t)dt\,f(2t-x)\Big],$$

Ces formules se décomposent chacune en deux autres, et donnent:

1. $\pi f(x)=\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} f(t)dt+\int_0^{\pi}\cos(t-x)f(t)dt+\int_0^{\pi}\cos 2(t-x)f(t)dt+etc.,$
2. $\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\cot(t)\,dt\,f(2t+x)=\int_0^{\pi}\sin(t-x)f(t)dt+\int_0^{\pi}\sin 2(t-x)f(t)\,dt+etc.,$
3. $0=\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} f(t)\,dt+\int_0^{\pi}\cos(t+x)f(t)\,dt+\int_0^{\pi}\cos 2(t+x)f(t)\,dt+etc.,$

$$(4.)\quad \int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \cot(t)\,dt\,f(2t-x) = \int_0^{\pi} \sin(t+x) f(t)\,dt + \int_0^{\pi} \sin 2(t+x) f(t)\,dt + etc.$$

Rémarquons en passant que les formules (2 et 4) sont donneés ici pour la première fois.

Corollaire 2. Les équations (1 et 3) peuvent s'écrire:

$$\pi f(x) = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} f(t)\,dt + \int_0^{\pi} \cos x \cos t f(t)\,dt + \int_0^{\pi} \cos 2x \cos 2t f(t)\,dt + etc.$$
$$+ \int_0^{\pi} \sin x \sin t f(t)\,dt + \int_0^{\pi} \sin 2x \sin 2t f(t)\,dt + etc.,$$
$$0 = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi} f(t)\,dt + \int_0^{\pi} \cos x \cos t f(t)\,dt + \int_0^{\pi} \cos 2x \cos 2t f(t)\,dt + etc.$$
$$- \Big[\int_0^{\pi} \sin x \sin t f(t)\,dt + \int_0^{\pi} \sin 2x \sin 2t f(t)\,dt + etc.\Big].$$

De ces équations on tire par addition et soustraction:

$$\pi f(x) = \int_0^{\pi} f(t)\,dt + 2\int_0^{\pi} \cos x \cos t f(t)\,dt + 2\int_0^{\pi} \cos 2x \cos 2t f(t)\,dt + etc.,$$
$$\pi f(x) = 2\int_0^{\pi} \sin x \sin t f(t)\,dt + 2\int_0^{\pi} \sin 2x \sin 2t f(t)\,dt + etc.:$$

formules qui subsistent pour $\pi > x > 0$; mais la première a encore lieu pour $x = 0,\ x = \pi$.

Les équations (2 et 4) donnent de même:

$$\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(t) f(2t+x)\,dt = \int_0^{\pi} \sin t \cos x + \int_0^{\pi} \sin 2t \cos 2x f(t)\,dt + etc.:$$
$$- \Big[\int_0^{\pi} \sin x \cos t f(t)\,dt + \int_0^{\pi} \sin 2x \cos 2t f(t)\,dt + etc.\Big]$$
$$\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \cot(t) f(2t-x)\,dt = \int_0^{\pi} \sin t \cos x f(t)\,dt + \int_0^{\pi} \sin 2t \cos 2x f(t)\,dt + etc.$$
$$+ \int_0^{\pi} \sin x \cos t f(t)\,dt + \int_0^{\pi} \sin 2x \cos 2t f(t)\,dt + etc.$$

On en tire par addition et soustraction:

$$\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \cot(t) f(2t-x)\,dt + \int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(t) f(2t+x)\,dt = 2\int_0^{\pi} \sin t \cos x f(t)\,dt$$
$$+ 2\int_0^{\pi} \sin 2t \cos 2x f(t)\,dt + etc.$$

$$\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} \cot(t) f(2t-x)\,dt - \int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(t) f(2t+x)\,dt = 2\int_0^{\pi} \sin x \cos t\, f(t)\,dt$$
$$+2\int_0^{\pi} \sin 2x \cos 2t f(t)\,dt + etc.$$

Problème **2.** *e étant un nombre positif: trouver les sommes des séries*

$$\tfrac{1}{2}\int_0^c f(t)\,dt + \int_0^c e^{(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \int_0^c e^{2(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc.$$
$$\tfrac{1}{2}\int_0^c f(t)\,dt + \int_0^c e^{(t+x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \int_0^c e^{2(t+x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc.$$

Solution. Dans les formules (I et II) on a supposé $\pi > x > 0$; donc, si l'on fait $x = \frac{\pi x'}{c}$, la condition précédente se changera en celle-ci : $c > x' > 0$. Remplaçons donc x et t, respectivent par $\frac{\pi x}{c}$, $\frac{\pi t}{c}$, et écrivons, à la place de $f\left(\frac{x\pi}{c}\right)$, $f\left(\frac{\pi t}{c}\right)$, simplement $f(x)$, $f(t)$, les formules (I et II) se changeront en les suivantes :

(III.) $$f(x) + \frac{1}{c}\sqrt{-1}\left[\int_{-\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi}{2c}(c-x)} f(2t+x)\cot\left(\frac{\pi t}{c}\right)dt\right] = \frac{1}{2c}\int_0^c f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_0^c e^{\frac{\pi}{c}(t-x)\sqrt{-1}} f(t)$$
$$+\frac{1}{c}\int_0^c e^{\frac{2\pi}{c}(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc.$$

(IV.) $$\frac{1}{c}\sqrt{-1}\left[\int_{\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi}{2c}(c+x)} f(2t-x)\cot\left(\frac{\pi t}{c}\right)dt\right] = \frac{1}{2c}\int_0^c f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_0^c e^{\frac{\pi}{c}(t+x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt$$
$$+\frac{1}{c}\int_0^c e^{\frac{2\pi}{c}(t+x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc.$$

Ces formules subsistent pour $c > x > 0$.

Pour $x = 0$, les premiers membres seront égaux, et l'on obtient en ajoutant :

$$\tfrac{1}{2}f(0) + \frac{1}{c}\sqrt{-1}\left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(2t)\cot\left(\frac{\pi t}{c}\right)dt\right] = \frac{1}{2c}\int_0^c f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_0^c e^{\frac{\pi t}{c}\sqrt{-1}} f(t)\,dt$$
$$+\frac{1}{c}\int_0^c e^{\frac{2\pi t}{c}\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc.$$

Pour $x = c$, les premiers membres seront encore égaux, et l'on trouve, en ajoutant:

$$\tfrac{1}{2}f(c) + \frac{1}{2c}\sqrt{-1}\Big[\int_0^{\pi}\cot\Big(\frac{\pi t}{c}\Big)f(2t-c)\,dt - \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cot\Big(\frac{\pi t}{c}\Big)dt\,\{f(2t-c)+f(c-2t)\}\Big]$$
$$= \frac{1}{2c}\int_0^{c} f(t)\,dt - \frac{1}{c}\int_0^{c} e^{\frac{\pi t}{c}\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_0^{c} e^{\frac{2\pi t}{c}\sqrt{-1}} f(t)\,dt - etc.$$

Corollaire 1. En développant les formules (III et IV), chacune se partagera en deux autres, et l'on aura:

$$5.)\quad f(x) = \frac{1}{2c}\int_0^{c} f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_0^{c}\cos\frac{\pi(t-x)}{c} f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_0^{c}\cos\frac{2\pi(t-x)}{c} f(t)dt + etc.$$

$$(6.)\quad \int_{-\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi}{2c}(c-x)} f(2t+x)\cot\Big(\frac{\pi t}{c}\Big)dt = \int_0^{c}\sin\frac{\pi(t-x)}{c} f(t)\,dt + \int_0^{c}\sin\frac{2\pi(t-x)}{c} f(t)dt + etc.$$

$$(7.)\quad 0 = \frac{1}{2c}\int_0^{c} f(t)dt + \frac{1}{c}\int_0^{c}\cos\frac{\pi(t+x)}{c} f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_0^{c}\cos\frac{2\pi(t+x)}{c} f(t)\,dt + etc.$$

$$(8.)\quad \int_{\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi}{2c}(c+x)} f(2t-x)\cot\Big(\frac{\pi t}{c}\Big)dt = \int_0^{c}\sin\frac{\pi(t+x)}{c} f(t)dt + \int_0^{c}\sin\frac{2\pi(t+x)}{c} f(t)dt + etc.$$

Corollaire 2. En combinant les formules précédentes par addition et soustraction, on en tire:

$$f(x) = \frac{1}{c}\int_0^{c} f(t)\,dt + \frac{2}{c}\int_0^{c}\cos x\cos t f(t)\,dt + \frac{2}{c}\int_0^{c}\cos 2x\cos 2t f(t)\,dt + etc.,$$

$$f(x) = \frac{2}{c}\int_0^{c}\sin x\cos t f(t)\,dt + \frac{2}{c}\int_0^{c}\sin 2x\cos 2t f(t)\,dt + etc.,$$

$$\int_{\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi}{2c}(c+x)} f(2t-x)\cot\Big(\frac{\pi t}{t}\Big)dt + \int_{-\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi x}{2c}(c-x)} f(2t+x)\cot\Big(\frac{\pi t}{c}\Big)dt = 2\int_0^{c}\sin t\cos x f(t)\,dt$$
$$+ 2\int_0^{c}\sin 2t\cos 2x f(t)\,dt + etc.,$$

$$\int_{\frac{\pi x}{c}}^{\frac{\pi}{2c}(c+1)} f(2t-x)\cot\Big(\frac{\pi t}{t}\Big)dt - \int_{-\frac{\pi x}{2c}}^{\frac{\pi}{2c}(c-x)} f(2t+x)\cot\Big(\frac{\pi t}{c}\Big)dt = 2\int_0^{c}\sin x\cos t f(t)\,dt$$
$$\int_0^{c}\sin 2x\cos 2t f(t)\,dt + etc.$$

Problème **3.** *Trouver les sommes des suites infinies:*

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt+\int_{-\pi}^{+\pi} e^{(t-x)\sqrt{-1}}f(t)\,dt+\int_{-\pi}^{+\pi} e^{2(t-x)\sqrt{-1}}f(t)\,dt+\text{etc.}$$

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt+\int_{-\pi}^{+\pi} e^{(t+x)\sqrt{-1}}f(t)\,dt+\int_{-\pi}^{+\pi} e^{2(t+x)\sqrt{-1}}f(t)\,dt+\text{etc.}$$

Solution. On a, par le second lemme:

$$\tfrac{1}{2}+e^{(t-x)\sqrt{-1}}+e^{2(t-x)\sqrt{-1}}+\cdots+e^{n(t-x)\sqrt{-1}}=\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}+\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\cot\tfrac{1}{2}(t-x)-\frac{\cos(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}\right].$$

En multipliant par $f(t)\,dt$, et en intégrant entre les limites $-\pi$, $+\pi$, on a:

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt+\int_{-\pi}^{+\pi} e^{(t-x)\sqrt{-1}}f(t)\,dt+\int_{-\pi}^{+\pi} e^{2(t-x)\sqrt{-1}}f(t)\,dt+\ldots+\int_{-\pi}^{+\pi} e^{n(t-x)\sqrt{-1}}f(t)dt$$

$$=\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{2\sin\frac{1}{2}(t-x)}f(t)dt+\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\int_{-\pi}^{+\pi}\cot\tfrac{1}{2}(t-x)f(t)dt-\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}f(t)\,dt\right].$$

En supposant n infini, le premièr membre se composera d'une infinité de termes qui auront pour somme la valeur que prendra le second membre dans l'hypothèse de $2n+1$, k, infini. Pour déterminer cette valeur, écrivons d'abord:

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)dt+\int_{-\pi}^{+\pi} e^{(t-x)\sqrt{-1}}f(t)dt+\int_{-\pi}^{+\pi} e^{2(t-x)\sqrt{-1}}f(t)dt+\text{etc.}=\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}f(t)\,dt$$

$$+\tfrac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}f(t)dt+\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\int_{-\pi}^{+\pi}\cot\tfrac{1}{2}(t-x)f(t)dt-\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}f(t)\,dt\right.$$

$$\left.-\int_{0}^{\pi}\frac{\cos(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}f(t)\,dt\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(t+x)}{\sin\frac{1}{2}(t+x)}f(-t)dt+\tfrac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}f(t)dt+\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[\int_{-\pi}^{+\pi}\cot\tfrac{1}{2}(t-x)f(t)dt\right.$$

$$\left.+\int_{0}^{\pi}\frac{\cos(2n+1)\frac{1}{2}(t+x)}{\sin\frac{1}{2}(t+x)}f(-t)\,dt-\int_{0}^{\pi}\frac{\cos(2n+1)\frac{1}{2}(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}f(t)\,dt\right].$$

Fesons ici $2n+1=k$, puis $\frac{1}{2}(t-x)=u$, et aussi $\frac{1}{2}(t+x)=u$, alors le second membre de la formule précédente deviendra:

$$=\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)}\frac{\sin ku}{\sin u}f(x-2u)\,du+\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\sin ku}{\sin u}f(2u+x)\,du+\sqrt{-1}\left[\int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\cot(u)f(2u+x)du\right.$$

$$\left.+\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\cos ku}{\sin u}f(x-2u)\,du-\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\cos ku}{\sin u}f(2u+x)\,du\right].$$

$$=-\int_{0}^{\frac{1}{2}x(\pi-x)}\frac{\sin ku}{\sin u}f(x-2u)du+\int_{0}^{\frac{1}{2}(\pi+x)}\frac{\sin ku}{\sin u}f(x-2u)du+\int_{-\frac{1}{2}x}^{0}\frac{\sin ku}{\sin u}f(2u+x)du+\ldots\ldots$$

$$+\int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\sin ku}{\sin u}f(2u+x)du+\sqrt{-1}\Big[\int_{-\frac{1}{2}(\pi-x)}^{+\frac{1}{2}(\pi-x)}\cot(u)f(2u+x)du-\int_0^{\frac{1}{2}x}\frac{\cos ku}{\sin u}f(x-2u)du$$

$$+\int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)}\frac{\cos ku}{\sin u}f(x-2u)du-\int_{-\frac{1}{2}x}^{0}\frac{\cos ku}{\sin u}f(2u+x)du-\int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\cos ku}{\sin u}f(2u+x)du\Big]$$

$$=-\int_0^{\frac{1}{2}x}\frac{\sin ku}{\sin u}f(x-2u)\,du+\int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)}\frac{\sin ku}{\sin u}f(x-2u)\,du+\int_0^{\frac{1}{2}x}\frac{\sin ku}{\sin u}f(x-2u)\,du$$

$$+\int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\sin ku}{\sin u}f(2u+x)du+\sqrt{-1}\Big[\int_{-\frac{1}{2}(\pi+x)}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\cot(u)f(2u+x)\,du-\int_0^{\frac{1}{2}x}\frac{\cos ku}{\sin u}f(x-2u)\,du$$

$$+\int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)}\frac{\cos ku}{\sin u}f(x-2u)\,du+\int_0^{\frac{1}{2}x}\frac{\cos ku}{\sin u}f(x-2u)\,du-\int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\cos ku}{\sin u}f(2u+x)\,du\Big]$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)}\frac{\sin kt}{\sin t}f(x-2t)\,dt+\int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\sin kt}{\sin t}f(2t+x)\,dt+\sqrt{-1}\Big[\int_{-\frac{1}{2}(\pi+x)}^{+\frac{1}{2}(\pi-x)}\cot(t)f(2t+x)\,dt$$

$$+\int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)}\frac{\cos kt}{\sin t}f(x-2t)\,dt-\int_0^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\frac{\cos kt}{\sin t}f(2t+x)\,dt\Big].$$

Si x est compris entre π et $-\pi$, la valeur absolue de x sera plus petite que π; on a donc aussi $\frac{1}{2}x<\pi$, $\frac{1}{2}(\pi+x)<\pi$, $\frac{1}{2}(\pi-x)<\pi$. Donc à cause de $k=\infty$, et en ayant égard à la formule (1′) du premièr lemme, la valeur précédente devient:

$$=\pi\Big[\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}\Big]+\sqrt{-1}\Big[\int_{-\frac{1}{2}(\pi+x)}^{\frac{1}{2}(\pi-x)}\cot(t)f(2t+x)dt\Big].$$

Si $f(x)$ reste continue entre les limites de l'intégration, on a $f(x-0)=f(x+0)=f(x)$, et par suite l'équation précédente devient:

$$\text{(V.)}\quad \pi f(x)+\sqrt{-1}\Big[\int_{-\frac{1}{2}(\pi+x)}^{+\frac{1}{2}(\pi-x)}\cot(t)f(2t+x)dt\Big]=\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)dt+\int_{-\pi}^{+\pi}e^{(t-x)\sqrt{-1}}f(t)\,dt$$
$$+\int_{-\pi}^{+\pi}e^{2(t-x)\sqrt{-1}}f(t)\,dt+etc.$$

On trouvera par des calculs semblables:

$$\text{(VI.)}\quad \pi f(-x)+\sqrt{-1}\Big[\int_{-\frac{1}{2}(\pi-x)}^{+\frac{1}{2}(\pi+x)}\cot(t)\,f(2t-x)\,dt\Big]=\tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)\,dt$$
$$+\int_{-\pi}^{+\pi}e^{(t+x)\sqrt{-1}}f(t)\,dt+\int_{-\pi}^{+\pi}e^{2(t+x)\sqrt{-1}}f(t)\,dt+etc.$$

Corollaire. Des formules (V et VI) on tire aisément les suivantes:

$$(9.)\quad \pi f(x) = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(t-x) f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{+\pi} \cos 2(t-x) f(t)\,dt + etc.,$$

$$(10.)\quad \int_{-\frac{1}{2}(\pi+x)}^{+\frac{1}{2}(\pi-x)} \cot(t) f(2t+x)\,dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(t-x) f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{+\pi} \sin 2(t-x) f(t)\,dt + etc.,$$

$$(11.)\quad \pi f(-x) = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(t+x) f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{+\pi} \cos 2(t+x) f(t)\,dt + etc.,$$

$$(12.)\quad \int_{-\frac{1}{2}(\pi-x)}^{+\frac{1}{2}(\pi+x)} \cot(t) f(2t-x)\,dt = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(t+x) f(t)\,dt + \int_{-\pi}^{+\pi} \sin 2(t+x) f(t)\,dt + etc.$$

Problème 4. *Trouver la somme des suites:*

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} e^{\frac{\pi}{c}(t-x)\sqrt{-1}} f(t)dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} e^{\frac{2\pi}{c}(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc.,$$

$$\frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} e^{\frac{\pi}{c}(t+x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} e^{\frac{2\pi}{c}(t+x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc.,$$

Solution. En supposant $\pi > x > -\pi$, on aura, pour $x = \frac{\pi x'}{c}$, $c > x' > -c$. Donc en remplaçant dans les formules (V et IV), x et t respectivement par $\frac{\pi x}{c}$, $\frac{\pi t}{t}$, tout en écrivant $f(x)$, $f(t)$ pour $f\left(\frac{\pi t}{c}\right)$, $f\left(\frac{\pi t}{c}\right)$, les formules (V et VI) donneront:

$$(VII.)\quad f(x) + \frac{1}{c}\sqrt{-1}\left[\int_{\frac{\pi}{2c}(c-x)}^{+\frac{\pi}{2c}(c-x)} \cot\left(\frac{\pi t}{c}\right) dt\, f(2t+x)\right] = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} e^{\frac{\pi}{c}(t-x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc.,$$

$$(VIII.)\quad f(-x) + \frac{1}{c}\sqrt{-1}\left[\int_{-\frac{\pi}{2c}(c-x)}^{+\frac{\pi}{2c}(c+x)} \cot\left(\frac{\pi t}{c}\right) f(2t-x)\,dt\right] = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(t)\,dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} e^{\frac{\pi}{c}(t+x)\sqrt{-1}} f(t)\,dt + etc.$$

Les formules subsistent pour $c > x > -c$. Pour $x = c$, les deux seconds membres sont égaux, et l'on aura, en ajoutant, et en divisant par 2:

$$\tfrac{1}{2}(f(c)+f(-c)) + \frac{1}{c}\sqrt{-1}\left\{\int_{0}^{+\tau} \cot\left(\frac{\pi t}{c}\right) dt\, \tfrac{1}{2}[f(2t-c)-f(c-2t)]\right\} = \frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(t)\,dt - \frac{1}{c}\int_{1}^{+c} e^{\frac{\pi t}{c}\sqrt{-1}} f(t)dt + \frac{1}{c}\int_{-c}^{+c} e^{\frac{2\pi t}{c}\sqrt{-1}} f(t)\,dt - etc.$$

Corollaire. Des formules (VII et VIII) on tire aisément:

$$f(x)=\frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c}f(t)\,dt+\frac{1}{c}\int_{-c}^{+c}\cos\frac{\pi(t-x)}{c}f(t)\,dt+\frac{1}{c}\int_{-c}^{+c}\cos\frac{2\pi(t-x)}{s}f(t)\,dt+etc.$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2c}(c+x)}^{+\frac{\pi}{2c}(c-x)}\cot\left(\frac{\pi t}{t}\right)f(2t+x)\,dt=\int_{-c}^{+c}\sin\frac{\pi(t-x)}{c}f(t)\,dt+\int_{-c}^{+c}\sin\frac{2\pi(t-x)}{c}f(t)\,dt+etc.$$

$$f(-x)=\frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c}f(t)\,dt+\frac{1}{c}\int_{-c}^{+c}\cos\frac{\pi(t+x)}{c}f(t)dt+\frac{1}{c}\int_{-c}^{+c}\cos\frac{2\pi(t-x)}{c}f(t)\,dt+etc.$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2c}(c-x)}^{+\frac{\pi}{2c}(c+x)}\cot\left(\frac{\pi t}{c}\right)f(2t-x)\,dt=\int_{-c}^{+c}\sin\frac{\pi(t+x)}{c}f(t)\,dt+\int_{-c}^{+c}\sin\frac{2\pi(t+x)}{c}f(t)\,dt+etc.$$

Liège, Avril 1850.

6.

Summirung einiger Reihen, vermittelt durch die Entwicklung der Potenz $(1-ax-cx^2)^{-m}$.

(Von dem Herrn Dr. *Dienger* zu Sinsheim bei Heidelberg.)

Nach dem binomischen Satze ist

$$(1.)\quad (1-ax-cx^2)^{-m} = (1-ax)^{-m} + \frac{m}{1}(1-ax)^{-(m+1)}cx^2 + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}(1-ax)^{-(m+2)}c^2x^4 + \cdots$$

Ferner ist:

$$(1-ax)^{-(m+n)}c^n x^{2n} = c^n x^{2n}\Big[1 + \frac{(m+n)}{1}ax + \cdots\cdots + \frac{(m+n)(m+n+1)\cdots\cdots(m+n+s-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots\cdots s}a^s x^s + \cdots\cdots\Big].$$

Aus diesem letzten Ausdruck erhält man für den Coefficienten von x^{2r} in (1) leicht:

$$(2.)\quad \frac{m(m+1)\cdots\cdots(m+2r-1)}{1\cdot 2\cdots\cdots 2r}a^{2r} + \frac{m}{1}\cdot\frac{(m+1)(m+2)\cdots\cdots(m+2r-2)}{1\cdot 2\cdots\cdots(2r-2)}a^{2r-2}c$$
$$+ \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{(m+2)\cdots\cdots(m+2r-3)}{1\cdot 2\cdots\cdots(2r-4)}a^{2r-4}c^2 + \cdots\cdots\cdots + \frac{m(m+1)\cdots\cdots(m+r-1)}{1\cdot 2\cdots\cdots r}c\ ;$$

und für den Coefficienten von x^{2r+1}:

$$(3.)\quad \frac{m(m+1)\cdots\cdots(m+2r)}{1\cdot 2\cdots\cdots(2r+1)}a^{2r+1} + \frac{m}{1}\cdot\frac{(m+1)\cdots\cdots(m+2r-1)}{1\cdot 2\cdots\cdots(2r-1)}a^{2r-1}c$$
$$+ \frac{m\cdot(m+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{(m+2)\cdots\cdots(m+2r-2)}{1\cdot 2\cdots\cdots(2r-3)}a^{2r-3}c^2 + \cdots\cdots\frac{m(m+1)\cdots\cdots(m+r-1)}{1\cdot 2\cdots\cdots r}\cdot\frac{m+r}{1}ac^r.$$

Nun ist

$$1-ax-cx^2 = (-c)\Big[x + \frac{a+\sqrt{(a^2+4c)}}{2c}\Big]\Big[x + \frac{a-\sqrt{(a^2+4c)}}{2c}\Big].$$

Setzt man demnach:

$$(4.)\quad \frac{a-\sqrt{(a^2+4c)}}{2c} = -b\ ,\quad \frac{a+\sqrt{(a^2+4c)}}{2c} = -f,$$

so ist:

$$(5.)\quad (1-ax-cx^2)^{-m} = \frac{1}{(-c)^m(x-b)^m(x-f)^m} = \left(\frac{-1}{c}\right)^m \cdot \frac{1}{(x-b)^m(x-f)^m}\,.$$

Zerlegt man den Bruch $\frac{1}{(x-b)^m(x-f)^m}$ in Partialbrüche, so findet sich

$$\frac{1}{(x-b)^m(x-f)^m} = \frac{1}{(b-f)^m(x-b)^m} - \frac{m}{1}\cdot\frac{1}{(b-f)^{m+1}(x-b)^{m-1}} + \frac{m(m+1)}{1\cdot 2}\times$$
$$\cdot\frac{1}{(b-f)^{m+2}(x-b)^{m-2}} - \ldots\ldots + (-1)^{m-1}\,\frac{m(m+1)\ldots\ldots(2m-2)}{1\cdot 2\ldots\ldots(m-1)}\cdot\frac{1}{(b-f)^{2m-1}(x-b)}$$
$$+\frac{1}{(f-b)^m(x-f)^m} - \frac{m}{1}\cdot\frac{1}{(f-b)^{m+1}(x-f)^{m-1}} + \ldots\ldots + (-1)^{m-1}\frac{m(m+1)\cdots(2m-2)}{1\cdot 2\ldots\ldots(m-1)}\,\frac{1}{(f-b)^{2m-1}(x-b)}\,.$$

Aus dem Bruche $\frac{1}{(x-k)^r}$ entsteht eine nach steigenden Potenzen von x fortgehende Reihe, deren allgemeines Glied

$$(-1)^r\cdot\frac{s(s+1)\ldots\ldots(s+n-1)}{1\cdot 2\ldots\ldots n}\cdot\frac{x^n}{k^{r+n}}\,.$$

ist. Entwickelt man also $\frac{1}{x-b)^m(x-f)^m}$ in eine nach steigenden Potenzen von x fortgehende Reihe, so ist der Coefficient von x^{2r} in dieser Entwicklung:

$$(6.)\quad (-1)^m\Big[\frac{m(m+1)\ldots\ldots(m+2r-1)}{1\cdot 2\ldots\ldots 2r}\cdot\left(\frac{1}{b^{2r+m}(b-f)^m} + \frac{1}{f^{2r+m}(f-b)^m}\right)$$
$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{(m-1)m\ldots\ldots(m+2r-2)}{1\cdot 2\ldots\ldots 2r}\times\left(\frac{1}{b^{2r+m-1}(b-f)^{m+1}} + \frac{1}{f^{2r+m-1}(f-b)^{m+1}}\right)$$
$$+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{(m-2)(m-1)\ldots\ldots(m+2r-3)}{1\cdot 2\ldots\ldots 2r}\cdot\left(\frac{1}{b^{2r+m-2}(b-f)^{m+2}} + \frac{1}{f^{2r+m-2}(f-b)^{m+2}}\right) +$$
$$\ldots\ldots\ldots + \frac{m(m+1)\ldots\ldots(2m-2)}{1\cdot 2\ldots\ldots(m-1)}\cdot\left(\frac{1}{b^{2r+1}(b-f)^{2m-1}} + \frac{1}{f^{2r+1}(f-b)^{2m-1}}\right)\Big]\,.$$

Den Coefficienten von x^{2r+1} findet man, wenn man in diesem Ausdrucke $2r+1$ statt $2r$ setzt.

Vergleicht man die Entwicklungen (2, 3 und 6), indem man die Gleichung (5) beachtet, so erhält man folgende Resultate:

$$(7.)\quad \frac{m(m+1)\ldots\ldots(m+2r-1)}{1\cdot 2\ldots\ldots 2r}a^{2r} + \frac{m}{1}\cdot\frac{(m+1)(m+2)\ldots\ldots(m+2r-2)}{1\cdot 2\ldots\ldots(2r-2)}a^{2r-2}c$$
$$+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{(m+2)(m+3)\ldots\ldots(m+2r-3)}{1\cdot 2\ldots\ldots(2r-4)}a^{2r-4}c^2 + \ldots\ldots\ldots + \frac{m(m+1)\ldots\ldots(m+r-1)}{1\cdot 2\ldots\ldots r}c^r$$
$$= \frac{1}{c^m}\Big[\frac{m(m+1)\ldots\ldots(m+2r-1)}{1\cdot 2\ldots\ldots 2r}\left(\frac{1}{b^{2r+m}(b-f)^m} + \frac{1}{f^{2r+m}(f-b)^m}\right) + \frac{m}{1}\cdot\frac{(m-1)m\ldots\ldots(m+2r-2)}{1\cdot 2\ldots\ldots 2r}$$
$$\left(\frac{1}{b^{2r+m-1}(b-f)^{m+1}} + \frac{1}{f^{2r+m-1}(f-b)^{m+1}}\right) + \ldots\ldots + \frac{m(m+1)\ldots\ldots(2m-2)}{1\cdot 2\ldots\ldots(m-1)}\cdot\left(\frac{1}{b^{2r+1}(b-f)^{2m-1}}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{f^{2r+1}(f-b)^{2m-1}}\right)\Big]\,.$$

Das Gesetz des Fortgangs der zweiten Seite ist, wie in (6) deutlich ausgesprochen:

$$(8.)\quad \frac{m(m+1)\ldots(m+2r)}{1\cdot 2\ldots 2r}a^{2r+1}+\frac{m}{1}\cdot\frac{(m+1)\ldots(m+2r-1)}{1\cdot 2\ldots(2r-1)}a^{2r-1}c+\ldots$$

$$+\frac{m(m+1)\ldots(m+r-1)}{1\cdot 2\ldots r}\cdot\frac{m+r}{1}ac^r=\frac{1}{(c^m)}\left[\frac{m(m+1)\ldots(m+2r)}{1\cdot 2\ldots(2r+1)}\cdot\left(\frac{1}{b^{r+m+1}(b-f)^m}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{f^{2r+m+1}(f-b)^m}\right)+\ldots+\frac{m(m+1)\ldots(2m-2)}{1\cdot 2\ldots(m-1)}\cdot\left(\frac{1}{b^{2r+2}(b-f)^{2m-1}}+\frac{1}{f^{2r+2}(f-b)^{2m-1}}\right)\right];$$

wobei wieder zu bemerken, dass sich das Gesetz des Fortgangs der beiden Seiten durch die Formen (3 und 6), wenn man in dieser letzten $2r+1$ statt $2r$ setzt, deutlich ausgesprochen findet.

Die Grössen b und f, in (7 und 8) werden durch die Gleichungen (4) bestimmt. Die Formeln (7 und 8) enthalten die allgemeine Summation einer Menge merkwürdiger, nach den Potenzen zweier Grössen a und c fortgehender endlicher Reihen. Durch Specialisirung der allgemeinen Norm erhält man Resultate, von denen folgende einige sind.

Setzt man in den allgemeinen Formeln (7 und 8) $m=1$, so ergiebt sich:

$$(9.)\ a^{2r}+\frac{(2r-1)}{1}a^{2r-2}c+\frac{(2r-2)(2r-3)}{1\cdot 2}a^{2r-4}c^2+\frac{(2r-3)(2r-4)(2r-5)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{2r-6}c^3+\ldots$$

$$+c^r=\frac{1}{c(b-f)}\left(\frac{1}{b^{2r+1}}-\frac{1}{f^{2r+1}}\right).$$

$$(10.)\quad a^{2r+1}+\frac{2r}{1}a^{2r-1}c+\frac{(2r-1)(2r-2)}{1\cdot 2}a^{2r-3}c^2+\frac{(2r-2)(2r-3)(2r-4)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{2r-5}c^3+$$

$$\ldots\ldots+\frac{r+1}{1}ac^r=\frac{1}{c(b-f)}\left(\frac{1}{b^{2r+2}}-\frac{1}{f^{2r+2}}\right).$$

In dem noch specielleren Falle, worin $b=f$ (d. h. $\sqrt{(a^2+4c)}=0$) ist, werden die zweiten Seiten der Gleichungen (9 und 10) zu $\frac{0}{0}$. In diesem Falle aber ergiebt sich nach den bekannten Methoden leicht, dass die zweite Seite von (9) $-\frac{(2r+1)}{cb^{2r+2}}$ und die von (10) $-\frac{(2r+2)}{cb^{2r+3}}$ sein wird. Also erhält man für $a=2$, $c=-1$, $b=f=1$, und folglich:

$$(11.)\quad 2^{2r}-\frac{(2r-1)}{1}2^{2r-2}+\frac{(2r-2)(2r-3)}{1\cdot 2}2^{2r-4}-\ldots\ldots+(-1)^r=2r+1,$$

$$2^{2r+1}-\frac{2r}{1}\cdot 2^{2r-1}+\frac{(2r-1)(2r-2)}{1\cdot 2}2^{2r-3}-\ldots\ldots+\frac{r+1}{1}2(-1)^r=2r+2;$$

wornach die Druckfehler in den Formeln im 33ten Bande dieses Journals Seite 72, (Schluss des §. 1.) zu verbessern sind.

Setzt man ferner $c = 2$, $a = 1$, so ist $b = \frac{1}{2}$, $f = -1$, also

$$1 + \frac{2r-1}{1} 2^1 + \frac{(2r-2)(2r-3)}{1 \cdot 2} 2^2 + \ldots\ldots + 2^r = \frac{1}{3}(2^{2r+1} + 1).$$

$$(12.) \quad 1 + \frac{2r}{1} \cdot 2^1 + \frac{(2r-1)(2r-2)}{1 \cdot 2} 2^2 + \ldots\ldots + \frac{r+1}{1} \cdot 2^r = \frac{1}{3}(2^{2r+2} - 1).$$

Nach einem bekannten Satze sind die ersten Glieder *ganze* Zahlen. Daraus folgt, dass $2^{2r+1} + 1$, $2^{2r+2} - 1$ durch 3 theilbar sind.

Setzt man weiter in den allgemeinen Formeln (7 und 8) $m = 2$, so ergiebt sich:

$$(13.) \quad \frac{2r+1}{1} a^{2r} + 2 \cdot \frac{2r(2r-1)}{1 \cdot 2} a^{2r-2} c + 3 \cdot \frac{(2r-1)(2r-2)(2r-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{2r-4} c^2 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{r+1}{1} \cdot c^r = \frac{1}{c^2}\left[(2r+1)\left(\frac{1}{b^{2r+2}(b-f)^2} + \frac{1}{f^{2r+2}(b-f)^2}\right) + \frac{2}{(b-f)^3} \cdot \left(\frac{1}{b^{2r+1}} - \frac{1}{f^{2r+1}}\right)\right],$$

$$(14.) \quad \frac{2r+2}{1} a^{2r+1} + 2 \cdot \frac{(2r+1)2r}{1 \cdot 2} a^{2r-1} c + 3 \cdot \frac{2r(2r-1)(2r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{2r-3} c^2 + \ldots\ldots$$

$$+ (r+1) \frac{r+2}{1} a c^r = \frac{1}{c^2}\left[\frac{(2r+2}{(b-f)^2} \cdot \left(\frac{1}{b^{2r+3}} + \frac{1}{f^{2r-3}}\right) + \frac{2}{(b-f)^3} \cdot \left(\frac{1}{b^{2r+1}} - \frac{1}{f^{2r+2}}\right)\right].$$

Für $b = f$ wird die zweite Seite von (13) zu $\frac{1}{c^2} \cdot \frac{(2r+3)(2r+2)(2r+1)}{6 \cdot b^{2r+4}}$,

die von (14) zu $\frac{(2r+4)(2r+3)(2r+2)}{6 c^2 b^{2r+5}}$.

So findet sich für $a = 2$, $c = -1$:

$$(15.) \quad \frac{2r+1}{1} \cdot 2^{2r} - 2 \cdot \frac{2r(2r-1)}{1 \cdot 2} 2^{2r-2} + 3 \cdot \frac{(2r-1)(2r-2)(2r-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2^{2r-4} - \ldots\ldots$$

$$+ \ldots\ldots + (r+1)(-1)^r = \frac{(2r+3)(2r+2)(2r+1)}{6}.$$

$$(2r+2) 2^{2r+1} - 2 \cdot \frac{(2r+1)2r}{1 \cdot 2} 2^{2r-1} + 3 \cdot \frac{2r \cdot (2r-1)(2r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 2^{2r-3} - \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + (r+1) \cdot \frac{r+2}{1} 2(-1)^r = \frac{(2r+4)(2r+3)(2r+2)}{6}$$

u. s. f.

Noch allgemeinere Formeln würde man erhalten, wenn man in (7 und 8) a oder c imaginär, von der Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, setzte. Die Ableitung hat keine Schwierigkeit.

Zum Schlusse mag noch bemerkt werden, dass, wenn a und c *ganze* Zahlen sind, die ersten Seiten der Gleichungen (7 und 8) ebenfalls ganze Zahlen sind; also auch die zweiten Seiten. Daraus erhält man folgendes Theorem:

„Sind m und n ganze positive Zahlen, ist ferner $b = \frac{-a+\sqrt{(a^2+4c)}}{2c}$, $f = \frac{-a-\sqrt{(a^2+4c)}}{2c}$, und sind a und c ebenfalls ganze, doch auch möglicherweise negative Zahlen, so ist auch

$$\frac{1}{c^m}\Big[\frac{m(m+1)\ldots.(m+n-1)}{1\cdot 2\ldots.n}\Big(\frac{1}{b^{m+n}(b-f)^m}+\frac{1}{f^{m+n}(f-b)^m}\Big)$$
$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{(m-1)m\ldots.(m+n-2)}{1\cdot 2\ldots.n}\Big(\frac{1}{b^{m+n-1}(b-f)^{m+1}}+\frac{1}{f^{m+n-1}(f-b)^{m+1}}\Big)$$
$$+\frac{m(m+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{(m-2)(m-1)\ldots..(m+n-3)}{1\cdot 2\ldots.n}\Big(\frac{1}{b^{m+n-2}(b-f)^{m+2}}+\frac{1}{f^{m+n-2}(f-b)^{m+2}}\Big)$$
$$+\ldots.+\frac{m(m+1)\ldots.(2m-2)}{1\cdot 2\ldots.(m-1)}\cdot\Big(\frac{1}{b^{n+1}(b-f)^{2m-1}}+\frac{1}{f^{n+1}(f-b)^{2m-1}}\Big)\Big]$$

eine ganze Zahl."

Sinsheim, im Januar 1847.

7.

De curva quarti ordinis sphaerica, de Circulari scalena.

(Auctore Dr. *Chr. Gudermann*, math. prof. ord. Monast. Guestph.)

1.

Si angulus sphaericus constans in sphaerae superficie ita movetur, ut anguli crura per puncta duo data transeant, anguli vertex describit curvam quandam, quam *Circularem* appellare placeat, quia, si angulus rectilineus movetur in plano ita, ut crura contineant puncta data, ab anguli vertice describitur curva, quae est circulus. Plerumque accidit, ut si locus geometricus puncti cuiusdam mobilis in plano est circulus, curva analoga sphaerica sit aut itidem circulus, aut saltem alia quaedam sectio conico-sphaerica; at regula haec non valet nunc, quia videbis, curvam nostram sphaericam esse sectionem conico-sphaericam, si angulus mobilis constans sit rectus, at curvam esse lineam quarti ordinis, si angulus non rectus. Quia constructiones sphaerico-geometricae saepissime perducunt ad curvam nostram sphaericam, ubicunque anguli dati sphaerici vertex est transportandus, investigatio naturae et proprietatum huius curvae quasimodo necessaria est. Meditatus de his rebus ante plures annos, ut alios incitarem ad eadem studia, problema de investiganda hac curva proposui in huius diarii vol. XVII pag. 389, cui quaestioni ad aliquam tantummodo partem respondit cl. Dr. *Haedenkamp* in eiusdem diarii vol. XX pag. 328, ubi tum areae tum arcus determinationes revocavit ad integralia illa gravissima, quae pendent a functionibus modularibus. Quod vero cum utrumque non sine mendis fecerit, totam nunc suscipiamus quaestionem, et initium faciamus in eo, ut curvae aequationem derivemus, cui summa sit formae generalitas. Coordinatis nunc utamur sphaericis in axibus abscissis iisdem, quibus plerumque usi sumus in libro, cui titulus: „Grundriss der analytischen Sphaerik", et cuius paragraphos interdum allegabimus.

Si puncta duo $A = (a, b)$ et $B = (a', b')$ data sunt, aequationes circulorum maximorum, qui per illa transeunt, erunt

(1) $\qquad y - b = \alpha(x - a)$ et $y - b' = \alpha'(x - a')$. .....

Eligamus duorum circulorum intersectionem $M = (x, y)$, et quantitates x, y duabis illis aequationibus satisfacient, quare aequationes eorundem circulorum maximorum etiam sic exhiberi possunt:

$$u - y = \alpha(t - x) \text{ et } u - y = \alpha'(t - x),$$

dummodo $\alpha = \frac{y-b}{x-a}$ et $\alpha' = \frac{y-b'}{x-a'}$. Angulus sphaericus AMB sit $= 2v$, et cotang $2v = c$, quare e formula in §. 11. inventa facili negotio invenis

$$\pm c = \frac{(1 + y^2 \sin^2 v) + (\alpha + \alpha')(\cos v - xy \sin^2 v) + \alpha\alpha'(1 - x^2 \sin^2 v)}{(\alpha - \alpha') \sin v \cdot \sqrt{(1 + x^2 + y^2 + 2xy \cos v)}},$$

in qua v est longitudo linea cardinalis, sive axium angulus. Si substituis valores $\alpha = \frac{y-b}{x-a}$ et $\alpha' = \frac{y-b'}{x-a'}$, reductionibus absolutis curvae iam aequatio invenitur generalis

$$(x - a)(x - a') + ((y - b)(x - a') + (y - b')(x - a)) \cos v + (y - b)(y - b') + (ay - bx)(a'y - b'x) \sin^2 v$$

(2.) $\quad = \pm c \sin v \,.\, ((a' - a)y - (b' - b)x + ab' - ba') \,.\, \sqrt{(1 + x^2 + y^2 + 2xy \cos v)}$ .....

quae facta rationalis habita variabilium x et y ratione ascendit ad gradum quartum, nec ambiguitatem signo $\pm$ indicatam amplius continet. Quare curva circularis est *linea quarti ordinis sphaerica*, quae eadem manet, si loco constantis anguli $2v =$ arc cot (c) sumitur angulus $\pi - 2v =$ arc cot $(-c)$. (Conferatur §. 20.).

Casus vero specialis excipiendus est unicus, in quo angulus $2v = \frac{1}{2}\pi$, ideoque $\pm c = 0$ est, quia aequatio curvae rationalis tunc est

$$(x - a)(x - a') + ((y - b)(x - a') + (y - b')(x - a)) \cos v + (y - b)(y - b') + (ay - bx)(a'y - b'x) \sin^2 v = 0.$$

Curvam vides nunc esse lineam secundi ordinis, sive sectionem conico-sphaericam. Ellipsis haec, quam dicimus *circularem aequilateram*, eam sequitur legem, ut arcus AB puncta data coniungens sit ipsius axis minor; semiaxis maior vero est ea, ut ipsius sinus aequalis sit tangenti trigonometr. semiaxis minoris. (Confer. §. 87, 88, 89).

Contra curvam nostram appellamus *circularem scalenam*, si angulus pe-

ripheriae constans $2v \gtrless \frac{1}{2}\pi$ est. Si cardines axium collocantur in punctis datis A et B ipsis, curvae aequatio, in qua nunc est $v = AB$, fit simplicior

$$\cos v - xy\sin^2 v = \pm c \sin v \sqrt{(1 + x^2 + y^2 + 2xy\cos v)};$$

qua de re conferas §. 5. Aequatio nunc ob productum x^2y^2 ad quartum gradum est referenda in forma rationali

$$\cos^2 v - c^2\sin^2 v - c^2x^2\sin^2 v - 2(1+c^2)\cos v\sin^2 v - c^2y^2\sin^2 v + x^2y^2\sin^4 v = 0.$$

Si in aequatione generali axium angulus $v = \frac{1}{2}\pi$ sumitur, circularis scalenae aequationem inter coordinatas rectangulares obtines:

$$(x-a)(x-a') + (y-b)(y-b') + (ay-bx)(a'y-b'x)$$
$$= \pm c((a'-a)y - (b'-b)x + (ab'-ba'))\sqrt{(1+x^2+y^2)} \ldots\ldots$$

sive

$$(x-a)(x-a') + (y-b)(y-b') + (ay-bx)(a'y-b'x) = \pm \cos 2c \sqrt{((x-a)^2}$$
$$+ (y-b)^2 + (ay-bx)^2) \cdot \sqrt{((x-a')^2 + (y-b')^2 + (a'y-b'x)^2)},$$

sive

$$((a'-a)y - (b'-b)x + (ab'-ba'))\sqrt{(1-x^2)+y^2)} = \sin 2c \sqrt{((x-a)^2 + (y-b)^2}$$
$$+ (ay-bx)^2) \cdot \sqrt{((x-a')^2 + (y-b') + (a'y-b'x)^2)}.$$

Aequationes (2 et 3) in eo consentiunt, ut ipsis satisfacias tum ponendo $x = a$ et $y = b$, tum ponendo $x = a'$ et $y = b'$; quare circularis scalena (idem valet de aequilatera) transit per puncta A et B ipsa; arcus circuli maximi igitur AB, qui puncta coniungit data A et B, inter curvae chordas est referendus; quam chordam appellemus *chordam primariam.*

2.

Aequatio (3) formam induit simpliciorem, si coordinatarum axes ita collocamus, ut chordae primariae $AB = 2\mu$ punctum medium C sit coordinatarum initium, et chorda haec ipsa sit axis prima; altera axis erit circulus maximus CO, chordam primariam in puncto medio C normaliter secans. His positis est

$$b = b' = 0 \quad , \quad a = \operatorname{tang}\mu \quad \text{et} \quad a' = -\operatorname{tang}\mu,$$

et aequatio (3) nunc migrat in

(1.) $$x^2 - \operatorname{tang}^2\mu + y^2 - \operatorname{tang}^2\mu \cdot y^2 = \pm 2\cot 2c \cdot \operatorname{tang}\mu \cdot y\sqrt{(1+x^2+y^2)},$$

ita ut, si punctum $M = (x, y)$ (fig. 1), sit $x = \operatorname{tang} CP$ et $y = \operatorname{tang} CQ$.

Si vero vis introducere abscissam $CP = x$ et applicatam $PM = y$, se-

cundum regulam in (§. 3) datam ponas tang x loco x et $\frac{\text{tang}\, y}{\cos x}$ loco y, quo $\sqrt{(1+x^2+y^2)}$ abit in $\frac{1}{\cos x \cos y}$, et aequatio (1) ipsa in hanc:

$$\sin^2 y\,(\cos^2 \mu - \sin^2 x) \pm \cot 2v \,.\, \sin 2\mu \,.\, \sin y = \sin \mu^2 - \sin^2 x$$

Eandem aequationem simplicem et specialem facilius hoc modo invenis. In triangulo sphaerico ABM, quod lateri $AB = 2\mu$ oppositum contineat angulum datum $AMB = 2v$, demittas e puncto M perpendicularem $PM = y$ in latus AB; si C est punctum huius lateris medium, sive $CB = CA = \mu$ et $CP = x$ ponitur, erit $PB = \mu - x$ et $PA = \mu + x$.

Quia ob triangula rectangula APM et BPM est

$$\text{tang}\, PMA = \frac{\text{tang}\, PA}{\sin PM} = \frac{\text{tang}(\mu + x)}{\sin y},$$

$$\text{tang}\, PMB = \frac{\text{tang}\, PB}{\sin PM} = \frac{\text{tang}(\mu - x)}{\sin y},$$

et $2v = PMA + PMB$, ideoque $\cot 2v = \frac{1 - \text{tang}\, PMA \cdot \text{tang}\, PMB}{\text{tang}\, PMA + \text{tang}\, PMB}$, substitutionibus emergit aequatio $\sin^2 y - \cot 2v \,.\, (\text{tang}\,(\mu + x) + \text{tang}\,(\mu - x)) \,.\, \sin y - \text{tang}(\mu + x)\,\text{tang}(\mu - x) = 0$, quae paullum mutata abit in

(2.) $$(\cos^2 \mu - \sin^2 x) \,.\, \sin^2 y - \cot 2v \,.\, \sin 2\mu \,.\, \sin y = \sin \mu^2 - \sin^2 x,$$

quae eadem est cum aequatione (2). Si abscissa $x < \mu$ est, ad quamcunque abscissam $CP = x$ pertinent applicatae $y = PM$ et $-y' = PM'$, et praeter has applicatae $\pi - y$ et $\pi + y'$, (Applicatae $\pi - y$ et $\pi + y'$ pertinent ad curvam $adbd'_1$ in (Fig. 2), congruam cum curva $ADBD_1$ et cum hac coniugatam), ita ut aequationis radices sint $\sin y$ et $-\sin y'$. Per notas regulas hinc colligis esse

(3.) $$\sin y - \sin y' = \frac{\text{tang}(\mu + x) + \text{tang}(\mu - x)}{\text{tang}\, 2v}$$

(4.) $$\sin y \,.\, \sin y' = \text{tang}(\mu + x) \,.\, \text{tang}(\mu - x).$$

Quia $\text{tang}\, PMA = \frac{\text{tang}\, PA}{\sin PM} = \frac{\text{tang}(\mu + x)}{\sin y}$ et $\text{tang}\, PM'B = \frac{\text{tang}(\mu - x)}{\sin y'}$, multiplicatio harum ob (4) praebet aequationem $\text{tang}\, PMA \,.\, \text{tang}\, PM'B = 1$, quare est

(5.) $$\begin{cases} PMA + PM'B = \frac{1}{2}\pi. \\ \text{Pariter invenis} \\ PMB + PM'A = \frac{1}{2}\pi, \end{cases}$$

ideoque, addendo, $AMB + AM'B = \pi$. Quia angulus constans $AMB = 2v$,

angulus $AM'B = \pi - 2v$, quemadmodum in circulo Planimetriae. Resolutio aequationis (2) praebet

$$(6.) \quad \sin y = \frac{V(\sin^2 2\mu - \sin^2 2v \cdot \sin^2 2x) + \sin 2\mu \cdot \cos 2v}{\sin 2v(\cos 2x + \cos 2\mu)},$$

et quia altera radix est $-\sin y'$, est

$$(7.) \quad \sin y' = \frac{V(\sin^2 2\mu - \sin^2 2v \cdot \sin^2 2x) - \sin 2\mu \cdot \cos 2v}{\sin 2v(\cos 2x + \cos 2\mu)},$$

ita ut $y' = PM'$ sit quantitas positiva (sive $\zeta 0$), si est $x < \mu$. Quia tum y, tum y' immutatae manent, si $-x$ permutatur cum $+x$, coordinatarum axis secunda, sive axis DD_1, curvam dividit in partes DMD_1 et DM^1D_1 symmetrice aequales.

3.

Trigonum AMB abit in trigonum AEB in B rectangulum, si est $x = \mu$, quo fit $y' = 0$ et $y = BE$. Quia cathetus $AB = 2\mu$ et angulus oppositus $AEB = AMB = 2v$, sit alter cathetus $BE = 2\gamma$, hypothenusa $AE = 2\delta$ et angulus $BAE = \varepsilon$. Quare valent formulae notissimae decem:

$$(1.) \quad \begin{cases} \sin 2\gamma = \sin 2\delta \,.\, \sin \varepsilon, \\ \sin 2\mu = \sin 2\delta \,.\, \sin 2v, \\ \cos 2\delta = \cot \varepsilon \,.\, \cot 2v, \\ \cos 2\delta = \cos 2\mu \,.\, \cos 2\gamma, \\ \operatorname{tang} 2\mu = \operatorname{tang} 2\delta \,.\, \cos \varepsilon, \\ \operatorname{tang} 2\mu = \operatorname{tang} 2v \,.\, \sin 2\gamma, \\ \operatorname{tang} 2\gamma = \operatorname{tang} 2\delta \,.\, \cos 2v, \\ \operatorname{tang} 2\gamma = \operatorname{tang} \varepsilon \,.\, \sin 2\mu, \\ \cos \varepsilon = \cos 2\gamma \,.\, \sin 2v, \\ \cos 2v = \cos 2\mu \,.\, \sin \varepsilon. \end{cases}$$

Vidimus esse pro $x = \mu$ applicatam $y' = 0$, et applicatam $y = 2\gamma$. Si $x > \mu$ sumitur, applicata $-y'$ fit opposita; quare nunc valent formulae:

$$(2.) \quad \begin{cases} \sin y = \dfrac{\sin 2\mu \cdot \cos 2v + V(\sin^2 2\mu - \sin^2 2v \cdot \sin^2 2x)}{\sin 2v(\cos 2x + \cos 2\mu)} = \dfrac{\sin 2\mu \cot 2v + V(\sin^2 2\delta - \sin^2 2x)}{\cos 2\mu + \cos 2x}, \\ \sin y' = \dfrac{\sin 2\mu \cdot \cos 2v - V(\sin^2 2\mu - \sin^2 2v \cdot \sin^2 2x)}{\sin 2v(\cos 2x + \cos 2\mu)} = \dfrac{\sin 2\mu \cot 2v - V(\sin^2 2\delta - \sin^2 2x)}{\cos 2\mu + \cos 2x}, \end{cases}$$

quae tum y tum y' faciunt positivum; ita ut, si $x = Cv$ sumitur, sit $y = vq$ et $y' = vq_1$, unde vides, applicatas y et y' aequales fieri, si radicale

$$V(\sin^2 2\mu - \sin^2 2v \,.\, \sin^2 2x) = 0$$

fit, quod evenit, si sumitur $\sin 2x = \pm \frac{\sin 2\mu}{\sin 2\nu} = \pm \sin 2\delta$, sive $x = \pm \delta$. In (fig. 1) sit $Cc = \delta = Cf$, applicatae cq et cq_1 nunc coïncidunt in fg, ut fiat

$$\sin\gamma = \sin\gamma' = \sin fg = \frac{\sin 2\mu \cos 2\nu}{\sin 2\nu(\cos 2\delta + \cos 2\mu)} = \frac{\operatorname{tang} 2\mu \cdot \cot 2\nu}{1 + \cos 2\gamma} = \frac{\sin 2\gamma}{1 + \cos 2\gamma}$$

sive

$$\sin fg = \operatorname{tang}\gamma.$$

Applicatas has extremas fg et $f'g'$ simul esse lineas curvam in g et g' tangentes paullo post demonstrabitur. Esse angulum $AgB = AqB = Aq'B$ $AEB = AMB$ per se patet.

4.

Arcuum ADB et AD_1B sagittas $CD = \alpha$ et $CD_1 = \beta$ esse applicatas maximas in aperto est. Formulae (3 et 4 art. 2) praebent

$$y = \alpha \text{ et } y' = \beta \text{ pro } x = 0.$$

Quare invenis formulas

$$(1.) \qquad \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tang}\mu}{\operatorname{tang}\nu} \\ \sin\beta = \operatorname{tang}\mu \,.\, \operatorname{tang}\nu. \end{cases}$$

Quantitates constantes omnes nunc exprimamus formulis, quae contineant sagittas has α et β. Primo invenis

$$(2.) \qquad \begin{cases} \operatorname{tang}\nu = \sqrt{\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}}, \\ \cos 2\nu = \dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}, \\ \sin 2\nu = \dfrac{2\sqrt{(\sin\alpha \sin\beta)}}{\sin\alpha + \sin\beta}, \end{cases}$$

Quia $\operatorname{tang}\mu = \sin\alpha \operatorname{tang}\nu$, est

$$(3.) \qquad \begin{cases} \operatorname{tang}\mu = \sqrt{(\sin\alpha \sin\beta)}, \\ \cos 2\mu = \dfrac{1 - \sin\alpha \sin\beta}{1 + \sin\alpha \sin\beta}, \\ \sin 2\mu = \dfrac{2\sqrt{(\sin\alpha \sin\beta)}}{1 + \sin\alpha \sin\beta}, \\ \sin\mu = \sqrt{\dfrac{\sin\alpha \sin\beta}{1 + \sin\alpha \sin\beta}}, \\ \cos\mu = \dfrac{1}{\sqrt{(1 + \sin\alpha \sin\beta)}}. \end{cases}$$

Quia $\sin 2\delta = \frac{\sin 2\mu}{\sin 2\nu}$, oritur formula

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

$$(4.)\qquad \begin{cases} \sin 2\delta = \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{1+\sin\alpha\sin\beta}, \\ \cos 2\delta = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{1+\sin\alpha\sin\beta}, \\ \operatorname{tang} 2\delta = \dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}, \\ \cos\delta = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sqrt{(1+\sin\alpha\sin\beta)}}, \\ \sin\delta = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sqrt{(1+\sin\alpha\sin\beta)}}, \\ \operatorname{tang}\delta = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\alpha+\beta}. \end{cases}$$

Quia $\sin 2\gamma = \dfrac{\operatorname{tang} 2\mu}{\operatorname{tang} 2\mu}$, invenis

$$(5.)\qquad \begin{cases} \sin 2\gamma = \dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{1-\sin\alpha\sin\beta}, \\ \cos 2\gamma = \dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{1-\sin\alpha\sin\beta}, \\ \cos\gamma = \dfrac{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sqrt{(1-\sin\alpha\sin\beta)}}, \\ \sin\gamma = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sqrt{(1-\sin\alpha\sin\beta)}}, \\ \operatorname{tang}\gamma = \dfrac{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}, \end{cases}$$

Adiumento functionis longitudinalis hyperbolicae aequationes $\sin 2\delta = \dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{1+\sin\alpha\sin\beta}$ et $\sin 2\gamma = \dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{1-\sin\alpha\sin\beta}$ simplicius exhibentur

$$(6.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{L}(2\delta) = \mathfrak{L}\alpha + \mathfrak{L}\beta, \\ \mathfrak{L}(2\gamma) = \mathfrak{L}\alpha - \mathfrak{L}\beta, \end{cases}$$

ita ut vice versa sint

$$(7.)\quad \mathfrak{L}\alpha = \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}(2\delta) + \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}(2\gamma), \text{ et } \mathfrak{L}\beta = \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}(2\delta) - \tfrac{1}{2}\mathfrak{L}(2\gamma).$$

Si chorda maxima $\alpha+\beta = 2\vartheta$, et O ipsius punctum medium, sive $OD = OD'$, ponamus $CO = \eta$, sive $a-\beta = 2\eta$.

Patent relationes

$$(8.)\qquad \sin\vartheta = \frac{\sin\delta}{\cos\mu} \text{ et } \cos\eta = \frac{\cos\delta}{\cos\mu}.$$

Quia vero $\cos AO = \cos AC \,.\, \cos CO = \cos\mu \,.\, \cos\eta = \cos\delta$, vides esse

$$(9.)\qquad OA = \delta = \tfrac{1}{2}AE.$$

Addimus formulas has

$$(10.)\quad \operatorname{tang}\gamma = \frac{\sin\eta}{\cos\vartheta}\ ,\quad \operatorname{tang}\delta = \frac{\sin\vartheta}{\cos\eta}\ ,\quad \cos 2\nu = \frac{\operatorname{tang}\eta}{\operatorname{tang}\vartheta}\ ,$$

quas facillime augebis, dummodo memineris esse

$$\alpha = \vartheta + \eta \quad \text{et} \quad \beta = \vartheta - \eta.$$

5.

Curvae aequatione sic exhibita:

$$(1.)\quad (\cos 2\mu + \cos 2x)\sin^2 y - 2\sin 2\mu \,.\, \cot 2\nu \,.\, \sin y = \cos 2x - \cos 2\mu$$

facillime introducis sagittas α et β, quo fit

$$\left(\frac{1-\sin\alpha\sin\beta}{1+\sin\alpha\sin\beta} + \cos 2x\right)\sin^2 y - 2\,.\,\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{1+\sin\alpha\sin\beta}\,.\,\sin y = \cos 2x - \frac{1-\sin\alpha\sin\beta}{1+\sin\alpha\sin\beta}\ ,$$

ideoque

$$(2.)\quad \cos 2x = \frac{(1-\sin\alpha\sin\beta)(1+\sin^2 y) - 2(\sin\alpha - \sin\beta)\sin y}{(1+\sin\alpha\sin\beta)(1-\sin^2 y)}\,.$$

Formula ex hac facillimis transformationibus invenis:

$$(3.)\quad \begin{cases} \sin x = \dfrac{\cos\mu}{\cos y}\,.\,\sqrt{(\sin\alpha - \sin y)(\sin\beta + \sin y)}\ , \\ \cos x = \dfrac{\cos\mu}{\cos y}\,.\,\sqrt{(1-\sin\alpha\sin y)(1+\sin\beta\sin y)}\ , \\ \operatorname{tang} x = \sqrt{\dfrac{(\sin\alpha - \sin y)(\sin\beta + \sin y)}{(1-\sin\alpha\sin y)(1+\sin\beta\sin y)}}\ , \end{cases}$$

quarum ope e data applicata y sive $\pm y'$ computatur abscissa communis x. Formulam ultimam elegantius sic repraesentabis

$$(4.)\quad \operatorname{tang} x = \sqrt{[\mathfrak{Tang}(\mathfrak{L}x - \mathfrak{L}y)\,.\,\mathfrak{Tang}(\mathfrak{L}\beta + \mathfrak{L}y)]}\,.$$

Addenda est formula haec

$$(5.)\quad \sin 2x = \frac{2\cos^2\mu}{\cos^2 y}\sqrt{[(\sin\alpha - \sin y)(\sin\beta + \sin y)(1-\sin\alpha\sin y)(1+\sin\beta\sin y)}$$

E formula (2) differentiando nanciscimur

$$\sin 2x\,.\,dx = \frac{2(1-\sin\alpha\sin\beta)\sin y - (\sin\alpha - \sin\beta)(1+\sin^2 y)}{(1+\sin\alpha\sin\beta)\cos^3 y}\,.\,\partial y$$

quae vero, quia $\frac{1}{2}(\operatorname{tang}\gamma + \operatorname{cot}\gamma) = \dfrac{1}{\sin 2\gamma} = \dfrac{1-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}$ mutatur in

$$(6.)\quad \sin 2x\,.\,dx = \frac{(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin y - \operatorname{tang}\gamma)(\sin y - \operatorname{cot}\gamma)}{(1+\sin\alpha\sin\beta)\cos^3 y}\,.\,\partial y,\ \text{ita ut sit}$$

$$(7.)\quad dx = \frac{-\frac{1}{2}(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin y - \operatorname{tang}\gamma)(\operatorname{cot}\gamma - \sin y)\cdot\partial y}{\cos y\sqrt{[(\sin\alpha - \sin y)(\sin\beta + \sin y)(1-\sin\alpha\sin y)(1+\sin\beta\sin y)]}}\,.$$

Si λ est angulus acutus, quem linea curvam in M tangens facit cum applicata PM decrescente, est $\operatorname{tang}\lambda = \frac{-\cos y \cdot \partial x}{\partial y}$, quare vides, esse

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{\frac{1}{2}(\sin\alpha - \sin\beta)(\sin y - \operatorname{tang}\gamma)(\cot\gamma - \sin y)}{V[(\sin\alpha - \sin y)(\sin\beta + \sin y)(1 - \sin\alpha \sin y)(1 + \sin\beta \sin y)]},$$

unde perspicis curvam ab axi DD_1 normaliter in verticibus D et D_1 secari, et applicatas extremas fg et $f'g'$ simul esse lineas tangentes, quia fit $\lambda = 0$, si $\sin y = \operatorname{tang}\gamma$ ponitur.

Angulum λ paullo post constructione geometrica determinabimus. Formulam vero ultimam hoc modo exhiberi posse non negligimus:

$$(8.)\quad \operatorname{tang}\lambda = \frac{\cot 2\nu \cdot (\sin y - \operatorname{tang}\gamma)(\cot\gamma - \sin y)}{V\left[(\sin\alpha - \sin y)(\sin\beta + \sin y)\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \sin y\right)\left(\frac{1}{\sin\beta} + \sin y\right)\right]}.$$

6.

Supra abscissa duplicata $Pp = 2x$ construatur triangulum rectangulum pPm tale, ut ipsius hypothenusa sit $pm = 2\delta$, ideoque aequalis sit hypotenusae AE trigoni constantis ABE; alter cathetus sit $Pm = 2\omega$, angulus $pmP = \varphi$ et angulus $pmP = \psi$. Quantitates variabiles $2x$, 2ω, φ et ψ cum invariabili 2δ ita coniunctae sunt, ut valeant formulae decem:

$$(1.)\quad \begin{cases} \cos 2\delta = \cos 2x \,.\, \cos 2\omega, \\ \sin 2x = \sin 2\delta \,.\, \sin\varphi, \\ \sin 2\omega = \sin 2\delta \,.\, \sin\psi, \\ \operatorname{tang} 2\omega = \operatorname{tang} 2\delta \,.\, \cos\varphi, \\ \operatorname{tang} 2x = \operatorname{tang} 2\delta \,.\, \cos\psi, \\ \operatorname{tang} 2x = \operatorname{tang}\varphi \,.\, \sin 2\omega, \\ \operatorname{tang} 2\omega = \operatorname{tang}\psi \,.\, \sin 2x, \\ \cos 2\delta = \cot\varphi \,.\, \cot\psi, \\ \cos\varphi = \cos 2x \,.\, \sin\psi, \\ \cos\psi = \cos 2\omega \,.\, \sin\varphi. \end{cases}$$

Si in aequatione (1) articuli praecedentis substituis

$$\cos 2x = \frac{\cos 2\delta}{\cos 2\omega},\quad \cos 2\mu = \frac{\cos 2\delta}{\cos 2\gamma} \text{ et } \sin 2\mu \,.\, \cot 2\nu = \cos 2\mu \sin 2\beta = \frac{\cos 2\delta \cdot \sin 2\gamma}{\cos 2\gamma},$$

ipsa migrat in hanc:

$$(2.)\quad (\cos 2\gamma + \cos 2\omega) \,.\, \sin^2 y - 2\sin 2\gamma \,.\, \cos 2\omega \,.\, \sin y = \cos 2\gamma - \cos 2\omega.$$

Variabilis vero 2ω est ea, ut sit

$$(3.)\qquad \begin{cases} 2\omega = 2\delta & \text{pro } x = 0\,, \\ 2\omega = 2\gamma & \text{pro } x = \mu, \\ 2\omega = 0 & \text{pro } x = \delta. \end{cases}$$

Quia $\sin y$ et $\sin y'$ sunt radices aequationis (2), concludimus, esse

$$(4.)\qquad \begin{cases} \sin y + \sin y' = \dfrac{2\sin 2\gamma \cos 2\omega}{\cos 2\gamma + \cos 2\omega}\,, \\ \sin y \,.\, \sin y' = \dfrac{\cos 2\omega - \cos 2\gamma}{\cos 2\omega + \cos 2\gamma}, \\ \text{ideoque} \\ \sin y - \sin y' = \dfrac{2\cos 2\gamma \cdot \sin 2\omega}{\cos 2\omega + \cos 2\gamma}\,; \end{cases}$$

quare invenis $\sin y = \dfrac{\sin(2\gamma + 2\omega)}{\cos 2\gamma + \cos 2\omega}$ et $\sin y' = \dfrac{\sin(2\gamma - 2\omega)}{\cos 2\gamma + \cos 2\omega}$, sive

$$\sin y = \frac{\sin(\gamma+\omega)}{\cos(\gamma-\omega)} = \frac{\operatorname{tang}\gamma + \operatorname{tang}\omega}{1 + \operatorname{tang}\gamma \cdot \operatorname{tang}\omega} \text{ et } \sin y' = \frac{\sin(\gamma-\omega)}{\cos(\gamma+\omega)} = \frac{\operatorname{tang}\gamma - \operatorname{tang}\omega}{1 - \operatorname{tang}\gamma \operatorname{tang}\omega}\,,$$

quas formulas brevius sic exhibes:

$$(5.)\qquad \begin{cases} \mathfrak{L} y = \frac{1}{2}\mathfrak{L}(2\gamma) + \frac{1}{2}\mathfrak{L}(2\omega)\,, \\ \mathfrak{L} y = \frac{1}{2}\mathfrak{L}(2\gamma) - \frac{1}{2}\mathfrak{L}(2\omega)\,, \end{cases}$$

quarum haec iterum monstrat, esse y' negativam, si $x < \mu$ sive $2\omega > 2\gamma$,
esse $y' = 0$, si $x = \mu$, sive $2\omega = 2\gamma$,
et esse y' positivam, si $x > \mu$, sive $2\omega < 2\gamma$,

Formulae (5) addendo et subtrahendo praebent

$$(6.)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{L} y + \mathfrak{L} y' &= \mathfrak{L}(2\gamma) = \mathfrak{L}\alpha - \beta, \\ \mathfrak{L} y - \mathfrak{L} y' &= \mathfrak{L}(2\omega). \end{aligned}$$

Quia vero $\mathfrak{L}\alpha - \mathfrak{L} y = \mathfrak{L}\beta + \mathfrak{L} y'$ et $\mathfrak{L}\beta + \mathfrak{L} y = \mathfrak{L}\alpha - \mathfrak{L} y'$ est, formula (4.) articuli praecedentis

$\operatorname{tang} x = \sqrt{\{\mathfrak{Tang}(\mathfrak{L}\alpha - \mathfrak{L} y) \,.\, \mathfrak{Tang}(\mathfrak{L}\beta + \mathfrak{L} y)\}}$ eadem est ac
$\operatorname{tang} x = \sqrt{\{\mathfrak{Tang}(\mathfrak{L}\alpha - \mathfrak{L} y') \,.\, \mathfrak{Tang}(\mathfrak{L}\beta + \mathfrak{L} y')\}}$,

unde perspicis, ad applicatas y et y' pertinere eandem abscissam x; quod aliunde notum est.

Facillime invenis formulas

$$(7.)\qquad \begin{cases} \cos y = \dfrac{\sqrt{(\cos 2\gamma \cdot \cos 2\omega)}}{\cos(\gamma - \omega)}\,, \\ \cos y^1 = \dfrac{\sqrt{(\cos 2\gamma \cdot \cos 2\omega)}}{\cos(\gamma + \omega)}\,, \end{cases}$$

Quia $\cos y \cos y' = \frac{2\cos 2\gamma \cos 2\omega}{\cos 2\gamma + \cos 2\omega}$ et $\sin y \sin y' = \frac{\cos 2\omega - \cos 2\gamma}{\cos 2\omega + \cos 2\gamma}$, componis

$$(8.)\qquad \begin{cases} \cos(y+y') = \dfrac{\cos 2\gamma + 2\cos 2\gamma \cos 2\omega - \cos 2\omega}{\cos 2\gamma + \cos 2\omega}\,, \\ \cos(y-y') = \dfrac{\cos 2\omega + 2\cos 2\gamma \cos 2\omega - \cos 2\gamma}{\cos 2\gamma + \cos 2\omega}\,, \end{cases}$$

e quibus fluunt

$$(9.)\qquad \begin{cases} \cos\tfrac{1}{2}(y+y') = \sqrt{\dfrac{\cos 2\gamma(1+\cos 2\omega)}{\cos 2\gamma + \cos 2\omega}}\,, \\ \sin\tfrac{1}{2}(y+y') = \sqrt{\dfrac{\cos 2\omega(1-\cos 2\gamma)}{\cos 2\gamma + \cos 2\omega}}\,, \\ \cos\tfrac{1}{2}(y-y') = \sqrt{\dfrac{\cos 2\omega(1+\cos 2\gamma)}{\cos 2\gamma + \cos 2\omega}}\,, \\ \sin\tfrac{1}{2}(y-y') = \sqrt{\dfrac{\cos 2\gamma(1-\cos 2\omega)}{\cos 2\gamma + \cos 2\omega}}\,, \\ \sin\ (y+y') = \dfrac{4\sin\gamma\cos\omega\sqrt{(\cos 2\gamma\cos 2\omega)}}{\cos 2\gamma + \cos 2\omega}\,, \\ \sin\ (y-y') = \dfrac{4\cos\gamma\sin\omega\sqrt{(\cos 2\gamma\cos 2\omega)}}{\cos 2\gamma + \cos 2\omega}\,. \end{cases}$$

7.

Si F est chordae MM_1 punctum medium, sive $FM = FM_1$, ponamus $MM_1 = y - y' = 2S$ et $PF = D$, ita ut sit

$$S = \tfrac{1}{2}(y-y') \text{ et } D = \tfrac{1}{2}(y+y')\,.$$

$$\text{Quia } \sin y - \operatorname{tang} S.\cos y = \Big(\sin y \cos\tfrac{1}{2}(y-y') - \cos y \sin\tfrac{1}{2}(y-y')\Big) : \cos\tfrac{1}{2}(y-y') = \frac{\sin\frac{1}{2}(y+y')}{\cos\frac{1}{2}(y-y')}$$

$$\sin y' + \operatorname{tang} S.\cos y' = \Big(\sin y' \cos\tfrac{1}{2}(y-y') + \cos y' \sin\tfrac{1}{2}(y-y')\Big) : \cos\tfrac{1}{2}(y-y') = \frac{\sin\frac{1}{2}(y+y')}{\cos\frac{1}{2}(y-y')}$$

et quia insuper est $\dfrac{\sin\frac{1}{2}(y+y')}{\cos\frac{1}{2}(y-y')} = \operatorname{tang}\gamma$, valent formulae

$$\sin y - \operatorname{tang} S\,.\,\cos y = \operatorname{tang}\gamma\,,$$
$$\sin y' + \operatorname{tang} S\,.\,\cos y' = \operatorname{tang}\gamma\,;$$

et pariter sine ulla ambiguitate invenis

$$\sin y + \cot D\,.\,\cos y = \cot\gamma\,,$$
$$\sin y' + \cot D\,.\,\cos y' = \cot\gamma\,.$$

Quia insuper $\operatorname{tang} S = \sqrt{\dfrac{\cos 2\gamma(1-\cos 2\omega)}{\cos 2\omega(1+\cos 2\gamma)}} = \sqrt{\dfrac{\cos 2x - \cos 2\delta}{\cos 2\mu + \cos 2\delta}}$

$$= \sqrt{\frac{\sin(\delta-x)\sin(\delta+x)}{\cos(\delta-\mu)\cos(\delta+\mu)}} = \sqrt{\frac{\sin^2\delta-\sin^2 x}{\cos^2\delta-\sin^2\mu}} ,$$

et $$\operatorname{tang} D = \sqrt{\frac{\cos 2\omega(1-\cos 2\gamma)}{\cos 2\gamma(1+\cos 2\omega)}} = \sqrt{\frac{\cos 2\mu-\cos 2\delta}{\cos 2x+\cos 2\delta}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin(\delta-\mu)\sin\delta+\mu)}{\cos(\delta+x)\cos\delta-x)}} = \sqrt{\frac{\sin^2\delta-\sin^2\mu}{\cos^2\delta-\sin^2 x}} ,$$

formulas memorabiles obtines ab omni ambiguitate liberas quatuor has:

$$(1.)\quad \begin{cases} \sin y - \cos y \,.\, \sqrt{\dfrac{\sin^2\delta-\sin^2 x}{\cos^2\delta-\sin^2\mu}} = \operatorname{tang}\gamma , \\ \sin y' + \cos y' \,.\, \sqrt{\dfrac{\sin^2\delta-\sin^2 x}{\cos^2\delta-\sin^2\mu}} = \operatorname{tang}\gamma , \\ \text{et} \\ \sin y + \cos y \,.\, \sqrt{\dfrac{\cos^2\delta-\sin^2 x}{\sin^2\delta-\sin^2\mu}} = \cot\gamma , \\ \sin y' + \cos y' \,.\, \sqrt{\dfrac{\cos^2\delta-\sin^2 x}{\sin^2\delta-\sin^2\mu}} = \cot\gamma , \end{cases}$$

quae sunt equationis ad curvam pertinentis transformationes. Si tum $\sin y$, tum $\sin y'$ subtrahendo eliminas, oriuntur

$$\cos y = \frac{\cot\gamma-\operatorname{tang}\gamma}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\delta-\sin^2 x}{\sin^2\delta-\sin^2\mu}}+\sqrt{\dfrac{\sin^2\delta-\sin^2 x}{\cos^2\delta-\sin^2\mu}}}$$

$$\cos y' = \frac{\cot\gamma-\operatorname{tang}\gamma}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\delta-\sin^2 x}{\sin^2\delta-\sin^2\mu}}-\sqrt{\dfrac{\sin^2\delta-\sin^2 x}{\cos^2\delta-\sin^2\mu}}} .$$

Si denominatores reddis rationales, et $\sin^2\delta-\sin^2\mu = \cos 2\mu \,.\, \sin^2\gamma$ et $\cos^2\delta-\sin^2\mu = \cos 2\mu \,.\, \cos^2\gamma$ esse observas, formulae oriuntur elegantiores:

$$(2.)\quad \begin{cases} \cos y = \sqrt{\cos 2\mu}\,.\,\dfrac{\cos\gamma\cdot\sqrt{(\cos^2\delta-\sin^2 x)}-\sin\gamma\sqrt{(\sin^2\delta-\sin^2 x)}}{\cos^2\mu-\sin^2 x} \\ \cos y' = \sqrt{\cos 2\mu}\,.\,\dfrac{\cos\gamma\cdot\sqrt{(\cos^2\delta-\sin^2 x)}+\sin\gamma\cdot\sqrt{(\sin^2\delta-\sin^2 x)}}{\cos^2\mu-\sin^2 x} \end{cases}$$

Easdem formulas ab ambiguitate omni liberas praebent transformationes aequationum (7) articuli praecedentis.

8.

Ex aequatione $\mathfrak{L}y = \frac{1}{2}\mathfrak{L}(2\gamma)+\frac{1}{2}\mathfrak{L}(2\omega)$ differentiando obtines $\frac{\partial y}{\cos} = \frac{\partial\omega}{\cos 2\omega}$, et quia $\log\cos 2\delta = \log\cos 2x+\log\cos 2\omega$, invenis $-\operatorname{tang} 2x \,.\, \partial x = \operatorname{tang} 2\omega \,.\, \partial\omega$, quare est $\frac{\partial y}{\cos y} = -\frac{\operatorname{tang} 2x}{\sin 2\omega} \,.\, \partial x$, quae, quia $\operatorname{tang} 2x = \operatorname{tang}\varphi \,.\, \sin 2\omega$, migrat in

$$-\partial y = \operatorname{tang}\varphi \,.\, \cos y \,.\, \partial x, \text{ et quum}$$

$$\operatorname{tang}\lambda = -\frac{\cos y \cdot \partial x}{\partial y},$$

vides esse $\operatorname{tang}\varphi.\operatorname{tang}\lambda = 1$, sive $\lambda = \frac{1}{2}\pi - \varphi$. Si igitur e puncto M ducis arcum $M\mu$ ita, ut angulus $PM\mu = \varphi = Pmp$ sit, arcus $M\mu$ erit linea normalis ad curvae punctum M pertinens; linea vero tangens per M ita est ducenda, ut angulos aequales sive rectos faciat cum normali $M\mu$.

Pari modo construuntur linea normalis et tangens, quae ad curvae punctum M_1 pertinent, unde vides, curvam secari a chorda MM_1 sub angulis aequalibus, quod idem valet de circulo Planimetriae.

Quia $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \lambda$, est

$$(1.) \qquad \cot\varphi = \frac{\cot 2\nu \cdot (\sin y - \operatorname{tang}\gamma)(\cot\gamma - \sin y)}{\sqrt{\left[(\sin\alpha - \sin y)(\sin\beta + \sin y)\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \sin y\right)\left(\frac{1}{\sin\beta} + \sin y\right)\right]}}.$$

Quia $\sin\varphi = \frac{\sin 2x}{\sin 2\delta}$, invenis formulam

$$(2.) \quad \sin\varphi = \frac{\sin 2\nu}{\cos^2 y} \cdot \sqrt{\left[(\sin\alpha - \sin y)(\sin\beta + \sin y)\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \sin y\right)\left(\frac{1}{\sin\beta} + \sin y\right)\right]}$$

ideoque

$$(3.) \qquad \cos\varphi = \frac{\cos 2\nu}{\cos^2 y}(\sin y - \operatorname{tang}\gamma)(\cot\gamma - \sin y).$$

Eaedem formulae valent, si y permutas cum y' et 2ν cum $\pi - 2\nu$.

Quia $\operatorname{tang}\psi = \frac{\cot\varphi}{\cos 2\delta}$ et $\frac{\cot 2\nu}{\cos 2\delta} = \operatorname{tang}\varepsilon$, habes et formulam

$$(4.) \quad \operatorname{tang}\psi = \frac{\operatorname{tang}\varepsilon \cdot (\sin y - \operatorname{tang}\gamma)(\cot\gamma - \sin y)}{\sqrt{\left[(\sin\alpha - \sin y)(\sin\beta + \sin y)\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \sin y\right)\left(\frac{1}{\sin\beta} + \sin y\right)\right]}}.$$

Quia $\cos 2x = \frac{\cos 2\mu}{\cos^2 y}(1 - 2\sin 2\gamma \,.\, \sin y + \sin^2 y)$,

$$\sin 2x = \frac{\sin 2\mu}{\cos^2 y}\sqrt{\left[(\sin\alpha - \sin y)(\sin\beta + \sin y)\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \sin y\right)\left(\frac{1}{\sin\beta} + \sin y\right)\right]},$$

ideoque

$$\operatorname{tang} 2x = \frac{\operatorname{tang} 2\mu \,.\, \sqrt{\left[(\sin\alpha - \sin y)(\sin\beta + \sin y\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \sin y\right)\left(\frac{1}{\sin\beta} + \sin y\right)\right]}}{1 - 2\sin 2\gamma \cdot \sin y + \sin^2 y},$$

formula $\cos\psi = \frac{\operatorname{tang} 2x}{\operatorname{tang} 2\delta}$ praebet hanc:

$$(5.)\quad \cos\psi = \frac{\cos\varepsilon \sqrt{\left[(\sin\alpha-\sin y)(\sin\beta+\sin y)\left(\frac{1}{\sin\alpha}-\sin y\right)\left(\frac{1}{\sin\beta}+\sin y\right)\right]}}{1-2\sin 2\gamma\cdot\sin y+\sin^2 y}.$$

quae coniuncta cum (4) suppeditat

$$(6.)\qquad \sin\psi = \frac{\sin\varepsilon\cdot(\sin y-\operatorname{tang}\gamma)(\cot\gamma-\sin y)}{1-2\sin 2\gamma\cdot\sin y+\sin^2 y}.$$

Si applicatas extremas fg et fg' aequales, quarum abscissae sunt $Cf=\delta$ et $Cf=-\delta$, et quae simul curvam tangunt in punctis g et g', ponimus $=\tau$, est $\sin\tau=\operatorname{tang}\gamma$, sive

$$\text{Ł}\tau = \tfrac{1}{2}\text{Ł}(2\gamma) = \tfrac{1}{2}(\text{Ł}\alpha-\text{Ł}\beta).$$

9.

Si z designat applicatam puncti cum puncto M reciprocitatis lege coniuncti, scimus esse z complementum anguli, quem circulus maximus curvam in M tangens faciat cum linea abscissarum, sive esse $\sin z=\cos y\,.\,\cos\varphi$;

quare est $\sin z=\cos 2v\,.\,\dfrac{(\sin y-\operatorname{tang}\gamma)(\cot\gamma-\sin y)}{\cos y}$, et

$$\partial\sin z = \frac{\cos 2v}{\sin 2\gamma}\cdot\frac{2-3\sin 2\gamma\cdot\sin y+\sin 2\gamma\cdot\sin^3 y}{\cos 2y}\cdot\partial y.$$

Si vero r est radius curvaturae sphaericus ad curvae punctum M pertinens, valet formula generalis $\operatorname{tang} r=\dfrac{\partial\sin y}{\partial\sin z}$, quare nunc est

$$\operatorname{tang} r = \frac{\sin 2\gamma}{\cos 2v}\cdot\frac{\cos^3 y}{2-3\sin 2\gamma\cdot\sin y+\sin 2\gamma\cdot\sin^3 y},\quad \text{sive}$$

$$\operatorname{tang} r = \frac{(\sin\alpha+\sin\beta)\cos^3 y}{2(1-\sin\alpha\sin\beta)-3(\sin\alpha-\sin\beta)\sin y+(\sin\alpha-\sin\beta)\sin^3 y},$$

qua e formula radius curvaturae sphaericus quolibet casu satis commode computatur.

10.

Si aream $DCPM=f$ et aream $CD^1M_1P=f^1$ ponimus, est $\partial f=\sin y.\partial x$ et $\partial f=-\sin y^1\,.\,\partial x$, ideoque

$\tfrac{1}{2}(\partial f+\partial f^1)=\tfrac{1}{2}(\sin y-\sin y')\,.\,\partial x$ et

$\tfrac{1}{2}(\partial f-\partial f^1)=\tfrac{1}{2}(\sin y+\sin y')\,.\,\partial x$, quae formulae adhibitis (4.) art. 5 fiunt

$$\tfrac{1}{2}(\partial f+\partial f') = \frac{\cos 2\gamma \cdot \sin 2\omega}{\cos 2\gamma + \cos 2\omega}\cdot \partial x,$$
$$\tfrac{1}{2}(\partial f-\partial f') = \frac{\sin 2\gamma \cdot \cos 2\omega}{\cos 2\gamma + \cos 2\omega}\cdot \partial x.$$

Adhibeamus nunc functionum modularium modulum

$$k = \sin 2\delta$$

et binas amplitudines ad hunc modulum relatas

$$\operatorname{am} u = \varphi \quad \text{et} \quad \operatorname{am} a = 2\nu,$$

e quibus fiunt $\operatorname{sn} u = \sin\varphi$, $\operatorname{sn} a = \sin 2\nu$, $k\operatorname{sn} u = \sin 2\delta \,.\, \sin\varphi = \sin 2x$ et $k\operatorname{sn} a = \sin 2\delta \,.\, \sin 2\nu = \sin 2\mu$, ideoque $\operatorname{dn} u = \cos 2x$ et $\operatorname{dn} a = \cos 2\mu$. Sunt porro $\cos 2\omega = \dfrac{\cos 2\delta}{\cos 2x} = \dfrac{k'}{\operatorname{dn} u} = \operatorname{dnc} u$, $\cos 2\gamma = \dfrac{\cos 2\delta}{\cos 2\mu} = \dfrac{k'}{\operatorname{dn} a} = \operatorname{dnc} a$, $\sin 2\omega = k\operatorname{snc} u$, $\sin 2\gamma = k\operatorname{snc} a$, $\operatorname{snc} u = \dfrac{\sin 2\omega}{\sin 2\delta} = \sin\psi$, $\operatorname{snc} a = \dfrac{\sin 2\gamma}{\sin 2\delta} = \sin 2\varepsilon$, sive

$$\operatorname{amc} u = \psi \quad \text{et} \quad \operatorname{amc} a = 2\varepsilon.$$

Differentiando formulam $\cos 2x = \operatorname{dn} u$ obtines $2\sin 2x \,.\, \partial x = k^2 \operatorname{sn} u \,.\, \operatorname{cn} u \,.\, \partial u$, sive

$$\partial x = \tfrac{1}{2} k \operatorname{cn} u \,.\, \partial u,$$

quare componuntur formulae integrandae

$$\partial f + \partial f' = \frac{k^2 \operatorname{dnc} a \cdot \operatorname{snc} u \cdot \operatorname{cn} u\, du}{\operatorname{dnc} a + \operatorname{dnc} u} = \frac{k^2 \cdot \operatorname{cn}^2 u \cdot \partial u}{\operatorname{dn} a + \operatorname{dn} u},$$
$$\partial f - \partial f' = \frac{k^2 \operatorname{snc} a \cdot \operatorname{dnc} u \cdot \operatorname{cn} u \cdot \partial u}{\operatorname{dnc} a + \operatorname{dnc} u} = \frac{k^2 \operatorname{cn} a \cdot \operatorname{cn} u \cdot \partial u}{\operatorname{dn} a + \operatorname{dn} u}.$$

Integrale hoc invenis facillime

$$f - f' = \frac{1}{\operatorname{tn} a}\left[\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\operatorname{sn} u}{\operatorname{sn} a}\right) - \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\operatorname{cnc} u}{\operatorname{cnc} a}\right)\right] = \frac{1}{\operatorname{tn} a}\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{k^2 \operatorname{sn} a \cdot \operatorname{sn} u}{1 + \operatorname{dn} a \cdot \operatorname{dn} u}\right)$$
$$= \frac{1}{\operatorname{tn} a}\log\sqrt{\frac{1 + \operatorname{dn} a \cdot \operatorname{dn} u + k^2 \operatorname{sn} a \cdot \operatorname{sn} u}{1 + \operatorname{dn} a \cdot \operatorname{dn} u - k^2 \operatorname{sn} a \cdot \operatorname{sn} u}} = \frac{1}{\operatorname{tn} a}\log\sqrt{\frac{1 + \cos(2x - 2\mu)}{1 + \cos(2x + 2\mu)}} = \frac{1}{tna}\log\frac{\cos(x-\mu)}{\cos(x+\mu)},$$

quare est differentia arearum

$$f - f' = \frac{1}{\operatorname{tang} 2\nu}\left[\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\sin\varphi}{\sin 2\nu}\right) - \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{\cos\psi}{\cos 2\varepsilon}\right)\right],$$

vel si mavis,

$$f - f' = \frac{1}{\operatorname{tang} 2\nu}\log\frac{\cos(\mu - x)}{\cos(\mu + x)} = \frac{2}{\operatorname{tang} 2\nu}\cdot \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\,(\operatorname{tang}\mu \,.\, \operatorname{tang} x).$$

Formula prima uti nequis, si est $\varphi > 2\nu$, sive $x > \mu$, quo casu ipsa mutanda est in

$$f-f' = \cot 2v\left[\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin 2v}{\sin\varphi}\right)-\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\cos 2\varepsilon}{\cos\psi}\right)\right]$$

adhibita formula notissima $\mathfrak{Tang}(a \pm \frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}) = \mathfrak{Cot}\,a = \frac{1}{\mathfrak{Tang}\,a}$, et si $x = \mu$, nonnisi formula secunda iustum praebet valorem, quia $\mathfrak{Arc\,Tang}\,(1)$ est quantitas infinita.

Formula integranda altera sic exhibita

$$\partial f + \partial f' = (\mathrm{dn}\,u - \mathrm{dn}\,a)\,\partial u + \frac{k^2\,\mathrm{cn}^2\,a\cdot\partial u}{\mathrm{dn}\,a + \mathrm{dn}\,u},$$

quia e (§. 211) theoriae functionum modularium („Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale von Gudermann") nota est integratio

$$\int_0 \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\cdot\mathrm{cn}\,a\cdot\partial u}{\mathrm{dn}\,a+\mathrm{dn}\,u} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a}\right) - \mathfrak{Z}(u,\ K-a),$$

praebet $f+f' = \mathrm{am}\,u - \mathrm{dn}\,a\,.\,u + \left[\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a}\right) - \mathfrak{Z}(u,\ K-a)\right]$, qua vero uti nequis, si est $u > a$, sive $x > \mu$, quia tum $\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a}\right)$ tum $\mathfrak{Z}(u, K-a)$ partes continent imaginarias, quare, ut ipsam reducamus et ab incommodo hoc liberemus, in usum vocamus relationem

$$\mathfrak{Z}(u, K-a) + \mathfrak{S}(u,\ a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,a\cdot\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a\cdot\mathrm{dn}\,u}\right) = \log\sqrt{\frac{\mathrm{sn}\,(a+u)}{\mathrm{sn}\,(a-u)}},$$

in (§. 134) Theoriae functionum modularium enucleatam, quo fit

$$f+f' = \mathrm{am}\,u - \mathrm{dn}\,a\,.\,u + \frac{1}{\mathrm{tn}\,a}\left[\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,a\cdot\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a\cdot\mathrm{dn}\,u}\right) + \mathfrak{S}(u,a)\right]$$

et quia secundum formulas (12 in §. 33) eiusdem Theoriae est

$$\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,a\cdot\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{tn}\,a\cdot\mathrm{dn}\,u}\right) = \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}\,(a-u)}{1+\mathrm{dn}\,(a+u)}},$$

et insuper $\mathfrak{S}(u,\ a) - \mathrm{tn}\,a\,.\,\mathrm{dn}\,a\,.\,u = -\mathfrak{D}(u,\ a)$ (Conf. §. 116 Theoriae f. m.), adipiscimur formulam satis reductam

$$f+f' = \mathrm{am}\,u + \frac{t}{\mathrm{tn}\,a}\left[\log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}\,(a-u)}{1+\mathrm{dn}\,(a+u)}} - \mathfrak{D}(u,\ a)\right]$$

et ab incommodo supra dicto deliberatam.

$$\text{Quia } \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}\,(a-u)}{1+\mathrm{dn}\,(a+u)}} = \log\sqrt{\frac{1+\mathrm{dn}\,a\cdot\mathrm{dn}\,u + k^2\,\mathrm{sn}\,a\cdot\mathrm{sn}\,u\,(\mathrm{cn}\,a\cdot\mathrm{cn}\,u - \mathrm{sn}\,a\cdot\mathrm{sn}\,u)}{1+\mathrm{dn}\,a\cdot\mathrm{dn}\,u - k^2\,\mathrm{sn}\,a\cdot\mathrm{sn}\,u\,(\mathrm{cn}\,a\cdot\mathrm{cn}\,u + \mathrm{sn}\,a\cdot\mathrm{sn}\,u)}}$$

$$= \log\sqrt{\frac{1+\cos 2\mu\cos 2x + \sin 2\mu\sin 2x\cos(2v+\varphi)}{1+\cos 2\mu\cos 2x + \sin 2\mu\sin 2x\cos(2v'+\varphi)}},$$

si $2v' = \pi - 2v$ sumitur, construamus triangula duo sphaerica, quorum primum

inter latera 2μ et $2x$ contineat angulum $2\nu+\varphi$, et alterum inter latera 2μ et $2x$ contineat angulum $2\nu'+\varphi$; si trianguli illius latus tertium $=2g$, et huius latus tertium est $=2g'$, valent formulae

$$\cos 2g = \cos 2\mu \cos 2x + \sin 2\mu \sin 2x \cos(2\nu+\varphi),$$
$$\cos 2g' = \cos 2\mu \cos 2x + \sin 2\mu \sin 2x \cos(2\nu+\varphi),$$

quare est $\log\sqrt{\frac{1+dn(a-u)}{1+dn(a+u)}} = \log\sqrt{\frac{1+\cos 2g}{1+\cos 2g'}} = \log\frac{\cos g}{\cos g'}$

$$= \log\sqrt{\frac{\cos^2(\mu-x)\cos^2(\nu+\frac{1}{2}\varphi)+\cos^2(\mu+x)\sin^2(\nu+\frac{1}{2}\varphi)}{\cos^2(\mu-x)\cos^2(\nu'+\frac{1}{2}\varphi)+\cos^2(\mu+x)\sin^2(\nu'+\frac{1}{2}\varphi)}}$$

ideoque $f+f' = \varphi + \cot 2\nu \,.\left(\log\frac{\cos g}{\cos g'} - \mathfrak{D}(u,a)\right)$, quae formula eam potissimum ob rem est notatu dignissima, quod continet integrale $\mathfrak{D}(u,a)$, cui est *natura hyperbolica*, cum integralia a functionibus modularibus pendentia ea, quorum natura est hyperbolica, in rebus geometricis rarissime occurrant. Areae f et f' ipsae nunc exprimuntur formulis

$$2\,.\,f = \varphi + \cot 2\nu\,.\left(\log\frac{\cos g\cdot\cos(\mu-x)}{\cos g'\cdot\cos(\mu+x)} - \mathfrak{D}(u,a)\right),$$
$$2\,.\,f' = \varphi + \cot 2\nu\,.\left(\log\frac{\cos g\cdot\cos(\mu+x)}{\cos g'\cdot\cos(\mu-x)} - \mathfrak{D}(u,a)\right),$$

Argumentum $u=K$, sive quadranti modulari aequalis fit, si est amplitudo $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, sive $x=\delta$, et quia $dn(K-a)=dn(K+a)$, ideoque $\log\sqrt{\frac{1+dn(a-u)}{1+dn(a+u)}}$ tunc $=0$ fit, area $DD'gD = \frac{1}{2}\pi - \cot 2\nu\,.\,\mathfrak{D}(K,a)$ et tota area $DAD_1BD = \pi - 2\,.\cot 2\nu\,.\,\mathfrak{D}(K,a)$*) fit.

11.

Etiam rectificatio curvae pendet ab integralibus modularibus, quorum vero natura non est hyperbolica, sed cyclica. Sit arcus $DM=s$ et pariter arcus $D_1M_1=s'$. Notissima est formula generalis

$$\partial s = -\frac{\partial y}{\sin\varphi} = \frac{\cos y\cdot\partial x}{\cos\varphi};$$

quia vero $\sin\varphi = \frac{\sin 2x}{\sin 2\delta}$, quare

*) Si curva est aequilatera, sive $2\nu=\frac{1}{2}\pi$, formula $\pi - 2\cot 2\nu[K(\mathrm{tn}\,a\,.\,\mathrm{dn}\,a - \mathrm{el}\,a)+Ea] = \pi - 2K\cos 2\mu + 2\cot 2\nu\,(E\,.\,a - K\,.\,ela)$ reducitur ad simplicem $DAD_1BD = \pi - 2K\,.\cos 2\mu$, in qua K est quadrans modularis pertinens ad modulum $k=\sin 2\mu$, quia nunc 2δ fit $=2\mu$, et parameter $a=K$, ideoque $ela=E$ fit.

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{(\sin^2 2\delta - \sin^2 2x)}}{\sin 2\delta} = \frac{\sqrt{[\sin(\delta+x)\cos(\delta+x)\sin(\delta-x)\cos(\delta+x)]}}{\sin\delta\cos\delta}$$

sive $\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{(\sin^2\delta - \sin^2 x)}\cdot\sqrt{(\cos^2\delta - \sin^2 x)}}{\sin\delta\cos\delta}$, est

$$\partial s = \frac{\sin\delta\cdot\cos\delta}{\sqrt{(\sin^2\delta - \sin^2 x)}\cdot\sqrt{(\cos^2\delta - \sin^2 x)}}\cdot\cos\gamma\, dx,$$

et quia $\cos\gamma = \sqrt{(\cos 2\mu)}\cdot\dfrac{\cos\gamma\sqrt{(\cos^2\delta - \sin^2 x)} - \sin\gamma\cdot\sqrt{(\sin^2\delta - \sin^2 x)}}{\cos^2\mu - \sin^2 x}$, facillime componimus

$$\partial s = \sin\delta\cos\delta\cdot\sqrt{(\cos 2\mu)}\cdot\left[\frac{\cos\gamma\cdot\partial x}{(\cos^2\mu - \sin^2 x)\sqrt{(\sin^2\delta - \sin^2 x)}} - \frac{\sin\gamma\cdot\partial x}{(\cos^2\mu - \sin^2 x)\sqrt{(\cos^2\delta - \sin^2 x)}}\right].$$

Pari modo invenimus formulam

$$\partial s' = \sin\delta\cos\delta\cdot\sqrt{(\cos 2\mu)}\cdot\left[\frac{\cos\gamma\cdot\partial x}{(\cos^2\mu - \sin^2 x)\sqrt{(\sin^2\delta - \sin^2 x)}} + \frac{\sin\gamma\cdot\partial x}{(\cos^2\mu - \sin^2 x)\sqrt{(\cos^2\delta - \sin^2 x)}}\right],$$

quapropter est

$$s + s' = \cos\gamma\cdot\sin 2\delta\cdot\sqrt{(\cos 2\mu)}\cdot\int_0\frac{\partial x}{(\cos^2\mu - \sin^2 x)\cdot\sqrt{(\sin^2\delta - \sin^2 x)}} \text{ et}$$

$$s' - s = \sin\gamma\cdot\sin 2\delta\cdot\sqrt{(\cos 2\mu)}\cdot\int_0\frac{\partial x}{(\cos^2\mu - \sin^2 x)\cdot\sqrt{(\cos^2\delta - \sin^2 x)}}.$$

Utrumque integrale pendet a functionibus modularibus. Si primum spectamus, adhibito functionum modulo

$$\lambda = \sin\delta, \text{ fiat } \sin x = \lambda\cdot\operatorname{sn} u, \text{ sive}$$

$$\operatorname{sn} u = \frac{\sin x}{\sin\delta},$$

quo nanciscimur $\sqrt{(\sin^2\delta - \sin^2 x)} = \lambda\operatorname{cn} u$, $\partial x = \lambda\operatorname{cnd} u$, ideoque $\dfrac{\partial x}{\sqrt{(\sin^2\delta - \sin^2 x)}} = du$ et

$$s' + s = \frac{\cos\gamma\cdot\sin 2\delta\sqrt{(\cos 2\mu)}}{\cos^2\mu}\cdot\int_0\frac{\partial u}{1 - \dfrac{\lambda^2}{\cos^2\mu}\operatorname{sn}^2 u},$$

quod integrale comparandum est cum integrali

$$'C(u, a) = \int_0\frac{\lambda'^2\operatorname{sn}' a\cdot\operatorname{snc}' a\cdot\partial u}{1 - \operatorname{dn}'^2 a\cdot\operatorname{sn}^2 u}.$$

Hunc in finem ponatur $\operatorname{dn}' a = \dfrac{\lambda}{\cos\mu} = \dfrac{\sin\delta}{\cos\mu} = \sin\vartheta$, quo fit $\operatorname{dnc}' a = \dfrac{\lambda}{\operatorname{dn}' a}$

$= \cos\mu$, $\lambda' \operatorname{sn}' a = \cos\vartheta$ et $\lambda' \operatorname{snc}' a = \sin\mu$, ideoque $\lambda'^2 \operatorname{sn}' a \operatorname{snc}' a = \sin\mu . \cos\vartheta$; quare est

$$s' + s = \frac{\cos\gamma \cdot \sin 2\delta \cdot \sqrt{\cos 2\mu}}{\cos^2\mu \cdot \sin\mu \cos\vartheta} \cdot {}'C(u, a)$$

et quum reducendo invenies $\dfrac{\cos\gamma \cdot \sin 2\delta \cdot \sqrt{\cos 2\mu}}{\cos^2\mu \sin\mu \cos\vartheta} = \dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sqrt{(\sin\alpha \sin\beta)}} = \dfrac{2}{\sin 2\nu}$, est

$$(1.) \qquad \tfrac{1}{2}(s' + s) = \frac{1}{\sin 2\nu} \cdot {}'C(u, a),$$

quae est formula satis simplex, in qua tum argumentum u, tum parameter a determinantur formulis ad modulos $\lambda = \sin\delta$ et $\lambda' = \cos\delta$ relatis

$$(2.) \quad \begin{cases} \operatorname{sn} u = \dfrac{\sin x}{\sin\delta}, & & \operatorname{sn}' a = \dfrac{\cos\vartheta}{\cos\delta}, \\ \operatorname{dn} u = \cos x, & \text{et} & \operatorname{dn}' a = \dfrac{\sin\delta}{\cos\mu} = \sin\vartheta, \\ \operatorname{cnc} u = \dfrac{\operatorname{tang} x}{\operatorname{tang}\delta}, & & \operatorname{cnc}' a = \dfrac{\operatorname{tang}\delta}{\operatorname{tang}\vartheta}, \\ & & \operatorname{dnc}' a = \cos\mu, \\ & & \operatorname{snc}' a = \dfrac{\sin\mu}{\cos\delta}. \end{cases}$$

Quia $\sin x = \lambda \operatorname{sn} u = \operatorname{sn}\left(\lambda u, \dfrac{1}{\lambda}\right)$ et $\cos\vartheta = \lambda' \operatorname{sn}' a = \operatorname{sn}\left(\lambda' a, \dfrac{1}{\lambda'}\right)$, addimus formulas

$$(3.) \qquad \operatorname{am}\left(\lambda u, \frac{1}{\lambda}\right) = x \quad \text{et} \quad \operatorname{am}\left(\lambda' a, \frac{1}{\lambda'}\right) = \tfrac{1}{2}\pi - \vartheta .$$

Argumentum u quadranti modulari L ad modulum λ pertinenti fit aequale, si $x = \delta$ ponitur, quare $Dg + D'g = Dg\, D_1 = \dfrac{2}{\sin 2\nu} \cdot {}'C(L, a)$, ideoque tota peripheria $Dg'\, D_1 g\, D = \dfrac{4}{\sin 2\nu} \cdot {}'C(L, a)$. In eruenda differentia $s' - s$ adhibitis iisdem modulis $\lambda = \sin\delta$ et $\lambda' = \cos\delta$, qui vero nunc permutentur, ponatur

$$\sin x = \lambda' \operatorname{sn}' v, \text{ quo fit } \sqrt{(\cos^2\delta - \sin^2 x)} = \lambda' \operatorname{cn}' v, \ \partial x = \lambda' \operatorname{cn}' v \, . \, \partial v,$$

et $$s' - s = \frac{\sin\gamma \cdot \sin 2\delta \sqrt{\cos 2\mu}}{\cos^2\mu} \cdot \int_0 \frac{\partial v}{1 - \dfrac{\lambda'^2}{\cos^2\mu} \operatorname{sn}'^2 v},$$

quod integrale comparandum est cum integrali

$${}'C'(v, b) = \int_0 \frac{\lambda^2 \operatorname{sn} b \cdot \operatorname{snc} b \cdot \partial v}{1 - \operatorname{dn}^2 b \cdot \operatorname{sn}'^2 v} .$$

Quem in finem sumamus $\dfrac{\lambda'}{\cos\mu} = \operatorname{dn} b'$, sive $\operatorname{dn} b = \dfrac{\cos\delta}{\cos\mu} = \cos\eta$, quo

fit $\operatorname{dnc} b = \frac{\cos\delta}{\cos\eta} = \cos\mu$, $\lambda \operatorname{sn} b = \sin\eta$ et $\lambda \operatorname{snc} b = \sin\mu$, quare $\lambda^2 \operatorname{snc} b = \sin\eta \sin\mu$, ideoque

$$s' - s = \frac{\sin\gamma \cdot \sin 2\delta \sqrt{\cos 2\mu}}{\cos^2\mu \sin\mu \sin\eta} \cdot {}'C'(v, b)$$

et quum reducendo obtines $\frac{\sin\gamma \cdot \sin 2\delta \cdot \sqrt{\cos 2\mu}}{\cos^2\mu \sin\mu \sin\eta} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sqrt{(\sin\alpha \sin\beta)}} = \frac{2}{\sin 2\nu}$, formula persimplex oritur.

$$(4.) \quad \tfrac{1}{2}(s'-s) = \frac{1}{\sin 2\nu} \cdot {}'C'(v, b),$$

cuius argumentum v et parameter b determinantur formulis ad modulos $\lambda' = \cos\delta$ et $\lambda = \delta$ relatis

$$(5.) \quad \begin{cases} \operatorname{sn}' v = \frac{\sin x}{\cos\delta}, & \operatorname{su} b = \frac{\sin\eta}{\sin\delta}, \\ \operatorname{dn}' v = \cos x, & \text{et} \quad \operatorname{snc} b = \frac{\sin\mu}{\sin\delta}, \\ \operatorname{cnc}' v = \operatorname{tang}\delta \,.\, \operatorname{tang} x, & \operatorname{dn} b = \cos\eta, \\ & \operatorname{dnc} b = \cos\mu, \\ & \operatorname{cnc} b = \frac{\operatorname{tang}\eta}{\operatorname{tang}\delta}. \end{cases}$$

Quia insuper $\sin x = \lambda' \operatorname{sn}' v = \operatorname{sn}\left(\lambda' v, \frac{1}{\lambda}\right)$ et $\sin\eta = \lambda \operatorname{sn} b = \operatorname{sn}\left(\lambda b, \frac{1}{\lambda}\right)$, valent formulae

$$(6.) \qquad \operatorname{am}\left(\lambda' v, \frac{1}{\lambda'}\right) = x \quad \text{et} \quad \operatorname{am}\left(\lambda b, \frac{1}{\lambda}\right) = \eta.$$

E formulis (1 et 4) coniunctis componuntur denique

$$7.) \quad \begin{cases} s' = \frac{{}'C(u, a) + {}'C'(v, b)}{\sin 2\nu}, \\ s = \frac{{}'C(u, a) - {}'C'(v, b)}{\sin 2\nu}. \end{cases}$$

Duabus integralibus ${}'C'(u, a)$ et ${}'C'(v, b)$, quibus arcus s' et s exprimuntur, natura est cyclica, uti plerumque fit, si integralia a functionibus modularibus pendentia adhibentur in disquisitionibus Geometriae et Mechanicae analyticis.

Si differentiale areae df applicata y exprimere volumus, formula $\partial f = \sin\gamma \,.\, \partial x$ generalis illico praebet

$$\partial f = \tfrac{1}{2}(\sin\alpha - \sin\beta) \cdot \frac{-\operatorname{tang} y \cdot (\sin y - \operatorname{tang}\gamma)(\cot\gamma - \sin y) \cdot \partial y}{\sqrt{[(\sin\alpha - \sin y)\sin\beta + \sin y)\,(1 - \sin\alpha \sin y)(1 + \sin\beta \sin y)]}},$$

et pari modo exprimitur $\partial f'$, dummodo applicatam y permutas cum applicata $-y'$, et simul α cum β, et quia $\partial y = \frac{\partial \sin y}{\cos y}$, vides formam esse talem, ut sit $\partial f = \frac{P \cdot \partial v}{\sqrt{R}}$,

si $v = \sin y$ ponitur, et P repraesentat functionem ipsius v rationalem fractam, cuius denominator est $1 - v^2$, et cuius numerator est forma ipsius v cubica, et si R est ipsius v arithmetica forma rationalis integra *quarti gradus.* Quia est $\partial s = \frac{-\partial y}{\sin \varphi}$, illico invenitur

$$\partial s = \frac{1}{\sin 2v} \cdot \frac{-\cos y \cdot \partial \sin y}{\sqrt{\left[(\sin\alpha - \sin y)(\sin\beta + \sin y)\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \sin y\right)\left(\frac{1}{\sin\beta} + \sin y\right)\right]}};$$

quare se iterum $v = \sin y$ sumitur, est $\partial s = \frac{P \cdot \partial v}{\sqrt{R}}$, in quo R est forma ipsius v rationalis integra *sexti gradus,* scilicet

$$R = \sqrt{\left[(1 - v^2)(\sin\alpha - v)(\sin\beta + v)\left(\frac{1}{\sin\alpha} - v\right)\left(\frac{1}{\sin\beta} + v\right)\right]},$$

quare casus iste specialis in eo potissimum est memorabilis, quod integratio nihilominus ab integralibus *Abelianis* non pendeat.

Ulteriores de Circulari meditationes brevitatis causa hic supprimimus, et id solum addimus, posita abscissa $CQ = x$ et applicata $QM = y$, curvae aequationem fieri:

$$\cos^2 y (1 + \sin\alpha \sin\beta - \sin^2 x) + (\sin\alpha - \sin\beta) \sin x \,.\, \cos y = 1.$$

Scriptum Monast. Guestph. d. 8. Decemb. 1845.

8.

Ueber die drehende Bewegung der festen Körper um ihre Schwerpuncte.

(Von Herrn Dr. *Christ. Gudermann*, ord. Professor der Math. zu Münster.)

1.

Das Problem der analytischen Untersuchung der drehenden Bewegung fester Körper um ihre Schwerpuncte gehört zu den interessantesten Aufgaben der höheren Mechanik. Dasselbe ist vielfach von *Euler* behandelt worden. Bei einer Behandlung desselben stellte sich das schreckliche Uebel der Augenkrankheit und Erblindung des unsterblichen Geometers ein. Nach *Euler,* welcher das Problem, ohne eine vollständige Auflösung gefunden zu haben, aufgeben musste: eine Auflösung, welche auch bei dem damaligen Zustande der Integral-Rechnung so gut als unmöglich war, ist die Aufgabe mehrfach aufgenommen worden; aber ihre vollständige Auflösung, welche von der Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale, so wie von der Ausbildung der analytischen Sphärik abhangt, ist noch nicht gelungen. Ein Versuch der weiteren Auflösung von *Legendre* dürfte, als zu wenig befriedigend, ausser Betracht bleiben; die Auflösung von *Legendre* liefert zwar arithmetische Formeln, aber keine andern Resultate, und wird wenigstens schon weit übertroffen von der eines ausgezeichneten holländischen Mathematikers, in einer dem Verfasser in gefälliger Weise zugesandten umfangreichen Inaugural-Dissertation, in welcher zugleich eine Geschichte des Problems enthalten ist, mit dem Titel: „*Specimen inaugurale de motu gyratorio corporis rigidi nulla vi acceleratrice sollicitati, etc.*" *auctore Adolpho Stephano Rueb, Roterodamensi, Traiecti ad Rhenum, ex officina Joh. Altheer,* 1834. In dieser Abhandlung wird die Aufgabe: die Lage des Körpers für jede beliebige Zeit in Beziehung auf einen festen Aequator zu bestimmen, nicht ohne Erfolg aufgelöset. Aber in Beziehung auf diesen festen Aequator lässt sich das Gesetz der Bewegung des Körpers noch viel anschaulicher

darstellen und die Richtung der augenblicklichen Drehaxe genauer bestimmen. Der in Anwendung gebrachte Modul kann, sammt den Amplituden, sphärisch construirt werden; auch ist die gesammte Grösse der Drehung des Körpers nicht bestimmt worden.

Zu der augenblicklichen Drehaxe gehört ein sich nicht drehender, aber mit der Axe zugleich schwankender Aequator, und man kann die noch schwierigere Aufgabe stellen: für jede beliebige Zeit die Lage der Hauptaxen des bewegten Körpers in Beziehung auf den sich nicht drehenden, aber nach einem bestimmten Gesetze schwankenden Aequator anzugeben.

Hierdurch wird die wiederholte Behandlung der Aufgabe, die ungeachtet des oben genannten lobenswerthen Vorganges, so wie ungeachtet der neuern ausgezeichneten Behandlung desselben Gegenstandes im 29ten Bande dieses Journals durch *Jacobi*, gerechtfertigt sein.

Da die *Euler*'sche Herleitung der Fundamental-Formeln auch in dem Lehrbuche der Mechanik von *Poisson* reproducirt und die Uebersetzung desselben von *A. Stern*, (Berlin bei *G. Reimer* 1835 u. 1836), in Deutschland verbreitet ist, so darf ich der Kürze wegen auf diese Uebersetzung verweisen.

2.

Die erwähnten Fundamental-Formeln *Euler's* findet man in (§. 414) der genannten Uebersetzung; sie sind

$$(1.)\qquad \begin{cases} C.\frac{\partial r}{\partial t}+(B-A)pq=0, \\ B.\frac{\partial q}{\partial t}+(A-C)pr=0, \\ A.\frac{\partial p}{\partial t}+(C-B)qr=0. \end{cases}$$

A, B, C bezeichnen die drei Hauptmomente der Trägheit des bewegten Körpers in Beziehung auf die drei orthogonalen Hauptaxen Ox_1, Oy_1, Oz_1 des Körpers, welche sich in seinem Schwerpuncte O schneiden; p, q, r sind die veränderlichen, als Functionen der Zeit t zu betrachtenden, drei partiellen Winkelgeschwindigkeiten des Körpers, sich beziehend auf Drehungen des Körpers um die drei Hauptaxen Ox_1, Oy_1, Oz_1, welche im Körper fest sind und sich mit ihm zugleich um den festen Schwerpunct O drehen.

Die Momente der Grössen der Bewegung aller Puncte des Körpers in

Beziehung auf diese Axen, deren Ebenen also mit den Coordinaten-Ebenen z_1Oy_1, x_1Oz_1, y_1Ox_1 parallel sind, finden sich in (§. **409**); es sind die drei Producte

$$Ap \quad , \quad Bq \quad , \quad Cr.$$

Wird aus der Summe ihrer Quadrate die Quadratwurzel gezogen, so erhält man das Hauptmoment der Grösse der Bewegung aller Theile des Körpers, nämlich

$$\sqrt{(A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2)}.$$

Multiplicirt man die drei Differential-Gleichungen der Reihe nach mit Cr, Bq, Ap und addirt sie, so erhält man $A^2p\,dp + B^2q\,dq + C^2r\,dr = 0$, also durch Integration:

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = e^2, \text{ oder}$$

$$(2.) \qquad \sqrt{(A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r)} = e.$$

Das Hauptmoment der Grösse der Bewegung aller Theile des Körpers ist also im vorliegenden Falle unveränderlich, und es bezeichnet e die Grösse dieses Hauptmoments.

Zieht man durch den Schwerpunct O des Körpers eine gerade Linie, welche auf der Ebene dieses Hauptmoments senkrecht steht, so heisst sie die Axe des Hauptmoments. Diese gerade Linie hat eine während der Bewegung des Körpers *unveränderliche* Lage im Raume; deshalb macht sie mit den drei Hauptaxen des Körpers *veränderliche* Winkel, deren Cosinus, in Beziehung auf die Reihefolge Ox, Oy, Oz, der Hauptaxen,

$$(3.) \qquad \frac{Ap}{e} \; , \; \frac{Bq}{e} \; , \; \frac{Cr}{e}$$

sind. Diese Cosinus sind lediglich insofern veränderlich, als p, q, r Functionen der Zeit t sind. Die Summe der lebendigen Kräfte aller Theile des Köpers findet sich in (§. 419), und ist $= Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$.

Multiplicirt man aber die Differential-Gleichungen (1) der Reihe nach mit r, q, p, so giebt ihre Addition $Ap\,dp = Bq\,dq + Cr\,dr = 0$, und hieraus erhält man durch Integration

$$(4.) \qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h.$$

Demnach ist also die Summe der lebendigen Kräfte aller Theile des Körpers von unveränderlicher Grösse, und die Constante h bezeichnet diese Summe.

Soviel war der Kürze wegen aus dem genannten Werke zu entnehmen, dessen weitere Benutzung hier nun überflüssig ist.

3.

Der erste Theil unsers Problems besteht darin, die drei Winkelgeschwindigkeiten p, q, r als Functionen der Zeit darzustellen; und zwar so einfach als möglich. Zu dem Ende müssen die drei Differential-Gleichungen (1) in (No. 2.) noch auf andere Weise als oben geschehen integrirt werden. Bei diesen Integrationen legen wir den Fall zum Grunde, in welchem die drei Haupt-Trägheits-Momente A, B, C des Körpers alle ungleich sind. Es sei A das kleinste, B das mittlere und C das grösste Moment, oder

$$A < B < C.$$

Wo es nöthig, kann man auch die gerade entgegengesetzte Reihefolge Statt finden lassen; wobei dann das mittlere Moment wieder B sein wird. Setzt man aber, in Beziehung auf die vorige Annahme, der Kürze wegen

$$\frac{C-B}{A} = \lambda, \quad \frac{C-A}{B} = \mu, \quad \frac{B-A}{C} = \nu,$$

so sind λ, μ, ν positive Verhältnisse, und die genannten Differential-Gleichungen verwandeln sich in folgende:

$$(1.) \qquad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} = -\lambda . qr , \\ \frac{\partial q}{\partial t} = +\mu . pr , \\ \frac{\partial r}{\partial t} = -\nu . pq , \end{cases}$$

in welchen λ, μ, ν durch die Bedingungs-Gleichung $\mu = \frac{\lambda+\nu}{1+\lambda\nu}$ mit einander verbunden sind. Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Producte der veränderlichen Grössen, so erhält man drei Gleichungen, welche integrirt werden können, nemlich:

$$\frac{p^2}{\lambda} + \frac{q^2}{\mu} = \text{const.}$$
$$\frac{p^2}{\lambda} - \frac{r^2}{\nu} = \text{const.}$$
$$\frac{q^2}{\mu} + \frac{r^2}{\nu} = \text{const.}$$

Die in diesen Gleichungen vorkommenden Constanten lassen sich aber auf die beiden, schon oben ihrer dynamischen Bedeutung nach bekannten beiden

Constanten h und e zurückführen. Eliminirt man nämlich aus den beiden Gleichungen (2 und 4 in No. 2), nämlich aus

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h \text{ und}$$
$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = e^2$$

der Reihe nach r, q, p, so lassen sich die Resultate wie folgt darstellen:

$$(2.) \qquad \begin{cases} \dfrac{p^2}{\lambda} + \dfrac{q^2}{\mu} = \dfrac{hC - e^2}{(C-A)(C-B)}, \\ \dfrac{q^2}{\mu} + \dfrac{r^2}{\nu} = \dfrac{e^2 - hA}{(B-A)(C-A)}, \\ \dfrac{r^2}{\nu} - \dfrac{p^2}{\lambda} = \dfrac{e^2 - hB}{(B-A)(C-B)}; \end{cases}$$

und hierdurch sind zugleich die Constanten in den vorigen Gleichungen ermittelt, d. h. durch die beiden primitiven h und e ausgedrückt.

Aus diesen Gleichungen und aus den Gleichungen (1) sieht man, dass p, q, r Modular-Functionen eines Arguments u, welches mit der Zeit t in einem constanten Verhältnisse steht, oder doch mit t zugleich gleichmässig wächst, proportional sind, und dass diese Modular-Functionen ausserdem den gleichen Modul haben; welchen wir durch k bezeichnen. Den conjugirten Modul werden wir also k' nennen, so dass $k' = \sqrt{(1 - k^2)}$ ist.

Setzt man wirklich $u = nt +$ const. und ferner, mit Beziehung auf den Modul k:

$$q = a \cdot \mathrm{sn}\, u \quad , \quad p = b \cdot \mathrm{cn}\, u \quad \text{und} \quad r = c \cdot \mathrm{dn}\, u,$$

so ist

$$\frac{\partial q}{\partial t} = na \cdot \mathrm{cn}\, u \cdot \mathrm{dn}\, u \quad , \quad \frac{\partial p}{\partial t} = -nb \cdot \mathrm{sn}\, u \cdot \mathrm{dn}\, u \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial t} = -nck^2 \cdot \mathrm{sn}\, u \cdot \mathrm{cn}\, u;$$

und werden diese Werthe in die Gleichungen (1) gesetzt, so ergeben sich die einfachen Bedingungs-Gleichungen

$$nb = \lambda ac \quad , \quad na = \mu bc \quad , \quad nck^2 = \nu \cdot ab,$$

welche, paarweise mit einander multiplicirt, sich in folgende verwandeln:

$$c = \frac{n}{\sqrt{(\lambda\mu)}} \quad ; \quad b = \frac{nk}{\sqrt{(\mu\nu)}} \quad ; \quad a = \frac{nk}{\sqrt{(\lambda\nu)}}.$$

Demnach haben wir schon die Formeln

$$p = \frac{nk}{\sqrt{(\mu\nu)}} \cdot \mathrm{cn}\, u \quad ; \quad q = \frac{nk}{\sqrt{(\lambda\nu)}} \cdot \mathrm{sn}\, u \quad ; \quad r = \frac{n}{\sqrt{(\lambda\mu)}} \cdot \mathrm{dn}\, u,$$

und es sind nur noch die Constanten n und k zu bestimmen. Substituirt man, um sie zu ermitteln, die gefundenen Werthe in den Gleichungen (2), so ergeben sich die Ausdrücke

$$nk = \sqrt{\frac{\lambda\mu\nu(hC-e^2)}{(C-A)(C-B)}},$$
$$n = \sqrt{\frac{\lambda\mu\nu(e^2-hA)}{(B-A)(C-A)}},$$
$$nk' = \sqrt{\frac{\lambda\mu\nu(e^2-hB)}{(B-A)(C-B)}},$$

oder, wenn man für $\lambda\mu\nu$ seinen Werth $\frac{(C-B)(C-A)(B-A)}{ABC}$ setzt, folgende einfache Formeln:

$$nk = \sqrt{\frac{(B-A)(hC-e^2)}{ABC}},$$
$$n = \sqrt{\frac{(C-B)(e^2-hA)}{ABC}}, \tag{3.}$$
$$nk' = \sqrt{\frac{(C-A)(e^2-hB)}{A\cdot B\cdot C}};$$

woraus noch für die beiden Moduln k und k',

$$\begin{cases} k = \sqrt{\frac{(B-A)(hC-e^2)}{(C-B)(e^2-hA)}}, \\ k' = \sqrt{\frac{(C-A)(e^2-hB)}{(C-B)(e^2-hA)}}, \end{cases} \tag{4.}$$

folgt; welche Ausdrücke wirklich so beschaffen sind, dass $k^2 + k'^2 = 1$ ist.

Die Ausdrücke der drei Winkelgeschwindigkeiten p, q, r selbst sind jetzt ohne alle Zweideutigkeit:

$$\begin{cases} p = \sqrt{\frac{hC-e^2}{A(C-A)}}\cdot \operatorname{cn} u, \\ q = \sqrt{\frac{hC-e^2}{B(C-B)}}\cdot \operatorname{sn} u, \\ r = \sqrt{\frac{e^2-hA}{C(C-A)}}\cdot \operatorname{dn} u = \sqrt{\frac{e^2-hB}{C(C-B)}}\cdot\frac{1}{\operatorname{dnc} u}; \end{cases} \tag{5.}$$

und in ihnen beziehen sich die Modular-Functionen sämmtlich auf den Modul k.

Aus diesen Resultaten setzen wir zur Erleichterung der künftigen Anwendungen noch folgende Verhältnisse zusammen:

$$\begin{cases} \frac{q}{p} = \sqrt{\frac{A(C-A)}{B(C-B)}}\cdot \operatorname{tn} u, \\ \frac{p}{q} = \sqrt{\frac{B(e^2-hB)}{A(e^2-hA)}}\cdot \operatorname{tnc} u, \\ \frac{p}{r} = \sqrt{\frac{C(hC-e^2)}{A(e^2-hA)}}\cdot \operatorname{snc} u, \\ \frac{q}{r} = \sqrt{\frac{C(hC-e^2)}{B(e^2-hB)}}\cdot \operatorname{cnc} u. \end{cases} \tag{6.}$$

Da unter den drei Winkelgeschwindigkeiten bloss q so beschaffen ist, dass sie für $u = 0$ verschwindet, so lässt sich, in Beziehung auf sie, die Constante in der Gleichung $u = nt +$ const. so bestimmen, dass diese Winkelgeschwindigkeit $q = 0$ sei für $t = 0$; dann ist die Constante $= 0$ und also:

$$(7.) \qquad u = n \,.\, t = \sqrt{\frac{(C-B)(e^2-hA)}{ABC}} \,.\, t \,.$$

4.

In den so eben entwickelten Formeln wird vorausgesetzt, dass $e^2 - hB$ positiv und $A < B < C$ sei; woraus schon folgt, dass auch die Differenzen $hC - e^2$ und $e^2 - hA$ positiv sein werden. Unter diesen Umständen sind alle in Nr. 3 gefundenen Formeln reell, d. h. nicht imaginär. Wenn aber gleichwohl die Differenz $e^2 - hB$ nicht positiv, sondern im Gegentheil negativ ist, so würden von den entwickelten Formeln mehrere imaginär werden, wenn man in diesem Falle die frühere Annahme $A < B < C$ beibehalten wollte.

Diesem Uebelstande entgeht man, wenn man in dem Falle, in welchem die Differenz $e^2 - hB$ negativ ist, die Reihefolge der drei Trägheitsmomente A, B, C geradezu umkehrt, und annimmt, dass dann $A > B > C$ sei; woraus ohnehin auch schon folgt, dass nur die Differenzen $hA - e^2$ und $e^2 - hC$ positiv sein werden.

Hiernach haben wir also zwei verschiedene Fälle:

I. Den Fall mit der Annahme $A < B < C$ und $hB < e^2$,

II. Den Fall mit der Annahme $A > B > C$ und $hB > e^2$.

In beiden können zunächst die für die Constanten n, k, k', nk, nk' gefundenen Formeln gebraucht werden, weil sie nicht imaginär sind.

Bei der Anwendung der Formeln für p, q, r in dem angegebenen zweiten Falle ist aber nun zu setzen:

$$\frac{B-C}{A} = \lambda, \quad \frac{A-C}{B} = \mu, \quad \frac{A-B}{C} = \nu.$$

Die Formeln (1) in Nr. 3 verwandeln sich dann zwar in

$$\frac{\partial p}{\partial t} = + \lambda \,.\, qr,$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = - \mu \,.\, pr,$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = + \nu \,.\, pq,$$

aber sie gehen sogleich wieder in die früheren über, wenn man, ohne die Relation $u = nt$ zu ändern, nur gleichzeitig durchgehends $-p$ statt p, $-q$ statt q und $-r$ statt r setzt, wodurch die Formeln (5 in Nr. 3) sämmtlich das Vorzeichen — erhalten, durch welches angezeigt wird, dass die Winkelgeschwindigkeiten sich nun auf solche Drehungen um die Axen Ox, Oy, Oz, beziehen, die den früheren gerade entgegengesetzt sind, übrigens aber dieselbe Grösse haben.

Die Formeln (6 in Nr. 3) leiden hierdurch keine Aenderung.

In diesen Bestimmungen der Vorzeichen weichen unsere Formeln von den in der erwähnten Abhandlung von *Rueb* auf einem anderen Wege gefundenen und auch noch darin ab, dass hier t und u zugleich verschwinden; wodurch ein höherer Grad der Einfachheit erreicht wird.

Bezeichnet man die zu den Moduln k und k' gehörigen Modular-Quadranten mit K und K', so erhalten bekanntlich alle Modular-Functionen von u, mithin auch die drei Winkelgeschwindigkeiten p, q, r, wieder dieselben Werthe, sobald das Argument u um $4K$ sich vermehrt hat. Bezeichnet man den zu diesem Incremente $4K$ gehörigen Zuwachs der Zeit durch $4T$, so ist

$$n(t+4T) = u+4K \text{ und auch } nt = u\,,$$

und hieraus folgt

$$(1.) \qquad T = \frac{K}{n}\,.$$

Ist die Zeit T nach dieser Formel berechnet, so werden alle drei Winkelgeschwindigkeiten für eine beliebige Zeit t dieselben Werthe später gleichzeitig wieder erhalten, wenn sich die Zeit t um $4T$ vermehrt hat. Während des ersten Zeitquadranten T sind alle drei Winkelgeschwindigkeiten p, q, r im Falle (I) positiv, also im Falle (II) negativ.

Bezeichnet man ferner die drei Winkelgeschwindigkeiten für $t = 0$ durch p_0, q_0, r_0; für $t = T$ durch p_1, q_1, r_1; für $t = 2T$ durch p_2, q_2, r_2; für $t = 3T$ durch p_3, q_3, r_3, so erhält man folgende particuläre Werthe der drei partiellen Winkelgeschwindigkeiten:

$$(2.)\quad \begin{cases} p_0 = \sqrt{\frac{hC-e^2}{A(C-A)}}, & p_1 = 0\,, & p_2 = -\sqrt{\frac{hC-e^2}{A(C-A)}}, & p_3 = 0\,, \\ q_0 = 0\,, & q_1 = \sqrt{\frac{hC-e^2}{B(C-B)}}, & q_2 = 0\,, & q_3 = -\sqrt{\frac{hC-e^2}{B(C-B)}}, \\ r_0 = \sqrt{\frac{e^2-hA}{C(C-A)}}, & r_1 = \sqrt{\frac{e^2-hB}{C(C-B)}}, & r_2 = \sqrt{\frac{e^2-hA}{C(C-A)}}, & r_3 = \sqrt{\frac{e^2-hB}{C(C-B)}}\,; \end{cases}$$

und ausserdem ist wieder $p_4 = p_0$, $q_4 = q_0$, $r_4 = r_0$, wenn p_4, q_4, r_4 die Werthe der Winkelgeschwindigkeit für $t = 4T$ sind.

Die hier angegebenen Werthe gelten im Falle (I); aber im Falle (II) ist jede dieser Geschwindigkeiten entgegengesetzt zu nehmen.

Die Winkelgeschwindigkeit r ist im Falle (I) immer positiv und im Falle (II) immer negativ.

In dem mittleren Falle, in welchem $hB - e^2$ weder positiv, noch negativ, sondern $= 0$ ist, wird der Modul $k' = 0$, also $k = 1$; mithin verwandelt sich, nach (§. 7) der Theorie der Modular-Functionen, beim Gebrauche der *cyklischen* Längenfunctionen, $\mathrm{sn}\,u$ in $\sin lu$, $\mathrm{cn}\,u$ in $\cos lu$, und $\mathrm{dn}\,u$ in $\cos lu$ und es ist also dann

$$(3.)\quad \begin{cases} p = \sqrt{\dfrac{hC-e^2}{A(C-A)}}\cdot\cos lu = \sqrt{\dfrac{h(C-B)}{A(C-A)}}\cos lu = \sqrt{\dfrac{h(C-B)}{A(C-A)}}\cdot\dfrac{1}{\mathfrak{Cos}\,u}\,, \\ q = \sqrt{\dfrac{hC-e^2}{B(C-B)}}\cdot\sin lu = \sqrt{\dfrac{h}{B}}\cdot\sin lu = \sqrt{\dfrac{h}{B}}\cdot\mathfrak{Tang}\,u\,, \\ r = \sqrt{\dfrac{e^2-hA}{C(C-A)}}\cdot\cos lu = \sqrt{\dfrac{h(B-A)}{C(C-A)}}\cdot\cos lu = \sqrt{\dfrac{h(B-A)}{C(C-A)}}\cdot\dfrac{1}{\mathfrak{Cos}\,u}\,. \end{cases}$$

Das periodische Verhalten der drei Winkelgeschwindigkeiten hat also dann aufgehört, da die hyperbolischen Potenzial-Functionen nur noch imaginärperiodisch sind.

In den besondern Fällen, wo der Modul $k = 0$, aber nicht gleichzeitig $k' = 0$ ist, wird

$$(4.)\quad \begin{cases} p = \sqrt{\dfrac{hC-e^2}{C(C-A)}}\cdot\cos u\,, \\ q = \sqrt{\dfrac{hC-e^2}{B(C-B)}}\cdot\sin u\,, \\ r = \sqrt{\dfrac{e^2-hA}{C(C-A)}}\,, \end{cases}$$

weil alsdann $\mathrm{dn}\,u = 1$ ist; daher ist in diesen Fällen die Winkelgeschwindigkeit r constant. Diese Werthe gelten also, wenn $A = B$ ist, oder auch, wenn $e^2 = hC$; und in diesem letzten Falle ist sogar

$$p = 0\,,\ q = 0 \text{ und } r = \sqrt{\frac{h}{C}} = \frac{e}{C}\,.$$

Ist $A = B = C$, also $\lambda = \mu = \nu = 0$, so erhält man $\dfrac{\partial p}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial q}{\partial t} = 0$, $\dfrac{\partial r}{\partial t} = 0$, also $p = \text{const.}$, $q = \text{const.}$, $r = \text{const.}$

Ist $e^2 = hA$, so folgt aus den Gleichungen (2 in No. 3) $q = r = 0$, also $p = \sqrt{\dfrac{h}{A}} = \dfrac{e}{A}$.

Ist bloss $B = C$, so ist $\lambda = 0$ und $n = 0$, also $p = \sqrt{\frac{hC - e^2}{C(C-A)}}$, $q = \sqrt{\frac{(hC-e^2)(e^2-hA)}{AC^3}}.t$ und $r = \sqrt{\frac{e^2-hA}{C(C-A)}}$.

5.

Es trägt nicht wenig zur genauern Kenntniss des Wesens der drei Winkel-Geschwindigkeiten bei, wenn man die Grösse der gesammten Drehung bestimmt, welche in Folge einer solchen allein vorhandenen Geschwindigkeit um die betreffende Axe während der Zeit t hervorgebracht wird.

Sind P, Q, R die respectiven Winkel oder Hauptbogen, welche während der Zeit t beschrieben werden, so ist

$$\frac{\partial P}{\partial t} = p \ , \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = q \text{ und } \frac{\partial R}{\partial t} = r,$$

und hieraus folgt schon

$$\text{(1.)} \qquad P = \int_0 p \cdot \partial t \quad ; \quad Q = \int_0 q \cdot \partial t \quad ; \quad R = \int_0 r \cdot \partial t \ .$$

Werden hierin für p, q, r die Werthe aus (No. 3) substituirt, so erhält man, mit Benutzung der Formeln im Zusatze zu (§. 61) der Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale:

$$\text{(2.)} \qquad \begin{cases} P = \sqrt{\frac{BC}{(B-A)(C-A)}} \cdot \operatorname{arc\,tang}\left[\frac{k}{k'} \operatorname{cnc} u\right], \\ Q = \sqrt{\frac{AC}{(B-A)(C-B)}} \cdot \log \sqrt{\frac{(1+k)(1-k \operatorname{snc} u)}{(1-k)(1+k \operatorname{snc} u)}}, \\ R = \sqrt{\frac{AB}{(C-B)(C-A)}} \cdot \operatorname{am} u, \end{cases}$$

für den Ausdruck der Gesammt-Drehungen des Körpers um die einzelnen Axen Ox_1, Oy_1, Oz_1, welche seine Hauptaxen sind. Der mittlere Ausdruck kann auch also dargestellt werden:

$$P = \sqrt{\frac{AC}{(B-A)(C-B)}} \cdot \log \frac{1 + k \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2} u}{1 - k \operatorname{sn}^2 \frac{1}{2} u} = \sqrt{\frac{AC}{(B-A)(C-B)}} \times$$

$$[\mathfrak{Arc\,Tang}(k) - \mathfrak{Arc\,Tang}(k \operatorname{snc} u)] = 2 . \sqrt{\frac{AC}{(B-A)(C-B)}} \cdot \mathfrak{Arc\,Tang}\,(k \operatorname{sn}^2 \tfrac{1}{2} u).$$

Sind P_0, Q_0, R_0 die Werthe von P, Q, R für $t = 0$, so ist $P_0 = 0$, $Q_0 = 0$, $R_0 = 0$. Sind P_1, Q_1, R_1 die Werthe von P, Q, R für $t = T$, also für $u = k$, so findet man

$$P_1 = \sqrt{\frac{BC}{(B-A)(C-A)}} \cdot \text{arc tang}\left(\frac{k}{k'}\right),$$
$$Q_1 = \sqrt{\frac{AC}{(B-A)(C-B)}} \cdot \text{Ł arc tang}\left(\frac{k}{k'}\right),$$
$$R_1 = \sqrt{\frac{AB}{(C-B)(C-A)}} \cdot \tfrac{1}{2}\pi.$$

Erhalten für $t = 2T$ die Drehungen P, Q, R die Werthe P_2, Q_2, R_2, so ist

$$P_2 = 0,$$
$$Q_2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{AC}{(B-A)(C-B)}} \cdot \text{Ł arc tang}\left(\frac{k}{k'}\right) = 2Q_1,$$
$$R_2 = \sqrt{\frac{AB}{(C-B)(C-A)}} \cdot \pi = 2R_1.$$

Die Gesammt-Drehungen um die einzelnen Hauptaxen am Ende der Zeit $3T$ sind

$$P_3 = -\sqrt{\frac{BC}{(B-A)(C-A)}} \cdot \text{arc tang}\left(\frac{k}{k'}\right) = -P_1,$$
$$Q_3 = +\sqrt{\frac{AC}{(B-A)(C-B)}} \cdot \text{Ł arc tang}\left(\frac{k}{k'}\right) = +Q_1,$$
$$R_3 = +\sqrt{\frac{AB}{(C-B)(C-A)}} \cdot \tfrac{2}{3}\pi = 3R_1.$$

Ist endlich die ganze Zeit $4T$ der völligen Umdrehung des Körpers verstrichen, so sind die Gesammt-Drehungen um die einzelnen Axen:

$$P_4 = P_0 = 0,$$
$$Q_4 = Q_0 = 0,$$
$$R_4 = 4R_1 = \sqrt{\frac{AB}{(C-B)(C-A)}} \cdot 2\pi.$$

Die Winkel-Geschwindigkeiten p und q um die Achsen Ox_1 und Oy_1 heben also, indem sie negativ werden, die durch ihre positiven Werthe hervorgebrachten Drehungen wieder auf, und so kommt es, dass am Schlusse der vollen Zeitperiode $4T$ die Gesammtdrehungen um diese Axen wieder auf ihre Anfangs-Werthe Null zurückkommen; die Geschwindigkeit r aber, um die Hauptaxe Oz_1, welche im Falle (I) immer positiv, im Falle (II) aber immer negativ ist, bringt ein mit der Zeit t zugleich beständig wachsendes Resultat der Gesammt-Drehung hervor; nach jedem Zeitviertel T kommt, von $t = 0$ an gerechnet, eine gleiche Gesammt-Drehung R_1 zur vorigen hinzu.

Im Falle (II. von No. 4) gelten ganz dieselben Resultate; nur sind dann alle entgegengesetzt zu nehmen.

Beschreibt man aus dem Schwerpuncte O des Körpers eine Kugelfläche, mit einem Radius, welcher eine beliebige Längeneinheit ist, und wird diese Kugelfläche von den drei Axen Ox_1, Oy_1, Oz_1 in x_1, y_1, z_1 getroffen, so ist $x_1y_1z_1$ das zu den Hauptaxen des Körpers gehörige sphärische *Coordinaten-Dreieck*, dessen jede Seite ein Quadrat ist. Vermöge der Winkelgeschwindigkeit p ist also dieses Dreieck am Ende der Zeit t auf der Kugelfläche um x_1 so gedrehet worden, dass dadurch die Ecken y_1 und z_1 in dem Hauptkreise y_1z_1 selbst um den Bogen P, und zwar in der Richtung $y_1 \rightarrow\!\!\!\rightarrow z_1$ verlegt worden sind; wie in (Fig. 1.) durch die neben der Winkelgeschwindigkeit $+p$ gezeichnete Richtungslinie in der Form eines Pfeiles angedeutet wird.

Eben so bringt die Winkelgeschwindigkeit q, wenn sie positiv ist, eine Drehung um y_1 in dem Sinne $z_1 \rightarrow\!\!\!\rightarrow x_1$ hervor, wodurch die Ecken z_1 und x beide um den Hauptbogen Q in dem angedeuteten Sinne verlegt werden. Die Winkelgeschwindigkeit r bringt, wenn sie positiv ist, eine Drehung um z_1 in dem Sinne $x_1 \rightarrow\!\!\!\rightarrow y_1$ hervor, wodurch die Ecken x_1 und y_1 beide um den Hauptbogen R in dem angegebenen Sinne am Ende der Zeit t verlegt sind.

Gewiss ist es zwar, dass durch die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r wirklich die Drehungen P, Q, R um die Ecken x_1, y_1, z in dem angegebenen Sinne, wenn sie positiv sind, hervorgebracht werden (also wenn sie negativ sind, im entgegengesetzten Sinne), aber man würde sehr fehlen, wenn man die drei Drehungen P, Q, R in irgend einer Reihenfolge nach einander construiren, und daraus endlich die neue Lage des Dreiecks $x_1y_1z_1$ nach der Zeit t bestimmen wollte. Denn bildet man die Ausdrücke für die Coordinaten-Verwandlung, indem man jedesmal zwei Ecken des Dreiecks $x_1y_1z_1$, also auch jedesmal zwei Coordinaten-Axen um einen gleichen Winkel, welcher die Drehung um die dritte Axe vorstellt, verlegt, so giebt jede Abänderung in dieser Reihenfolge allemal andere Formeln; wodurch bewiesen wird, dass jede solche Abänderung in der Reihenfolge der Drehungen P, Q, R auch allemal die Lage des neuen Dreiecks $x_1y_1z_1$ als eine andere sich zeigen lässt. Es müssen daher die Drehungen durchaus gleichzeitig mit den Geschwindigkeiten p, q, r vor sich gehen, wenn man aus der anfänglichen Lage des Dreiecks $x_1y_1z_1$ auf seine Lage am Ende der Zeit t schliessen will.

6.

Fället man von irgend einem Puncte $m = (x_1y_1z_1)$ des Körpers ein Perpendikel auf die Axe Ox_1, so ist dasselbe $= \sqrt{(z_1^2 + y_1^2)}$, und da p die Winkel-

Geschwindigkeit des Puncts m um die Axe Ox_1 ist, so ist $p \,.\, (z_1^2 + y_1^2)$ die Geschwindigkeit des Puncts m selbst, in einer auf den Radius $\sqrt{(z_1^2+y_1^2)}$ senkrechten Richtung, die also mit der Ebene $y_1 O z_1$ parallel ist. Diese Geschwindigkeit lässt sich in die Seitengeschwindigkeiten $+ p y_1$ und $- p z$, welche mit den Axen Oz_1 und Oy_1 parallel sind, zerlegen.

Eben so kann die Geschwindigkeit $q\sqrt{(x_1^2 + z_1^2)}$ in die Seitengeschwindigkeiten $+ q z_1$ und $- q x_1$, parallel mit Ox_1 und Oz_1, zerlegt werden.

Endlich hat der Punct m die Geschwindigkeit $r\sqrt{(x_1^2 + y_1^2)}$, welche in die Seitengeschwindigkeiten $+ r x_1$ und $- r y_1$, parallel mit den Axen Oy_1 und Ox_1, zerlegt wird. Daher hat der Punct m überhaupt die drei folgenden Seitengeschwindigkeiten:

$$(1.) \qquad \begin{cases} v_1 = q z_1 - r y_1, \text{ parallel mit } Ox_1 , \\ v_2 = r x_1 - p z_1, \text{ parallel mit } Oy_1 , \\ v_3 = p y_1 - q x_1, \text{ parallel mit } Oz_1 , \end{cases}$$

und seine Geschwindigkeit überhaupt ist demnach

$$v = \sqrt{(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)}$$

oder

$$(2.) \quad v = \sqrt{[(q z_1 - r y_1)^2 + (r z_1 - p z_1)^2 + (p y_1 - q x_1)^2]}.$$

Sind nun x, y, z die mit $\boldsymbol{O}x_1$, $\boldsymbol{O}y_1$, $\boldsymbol{O}z_1$ parallelen Coordinaten eines Punctes, dessen Geschwindigkeit $= 0$ sein soll, so kann für ihn v nur dann $= 0$ sein, wenn v_1, v_2, v_3 für ihn den Werth Null haben; daher hat man zur Bestimmung aller derjenigen Puncte, welche ohne Bewegung sind, die Gleichungen

$$q z - r y = 0 \quad , \quad r x - p z = 0 \quad , \quad p y - q x = 0,$$

welche sich also darstellen lassen:

$$(3.) \qquad \frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}.$$

Hiernach befinden sich alle Puncte des Körpers, welche zur Zeit t ohne Bewegung sind, in einer geraden Linie, die durch den Anfangspunct, oder auch durch den Schwerpunct $\boldsymbol{O}$ geht. Diese gerade Linie heisst die *augenblickliche Drehaxe*. Wird die Kugelfläche, die vorhin beschrieben wurde, davon in R und im Gegenpuncte R' geschnitten, so ist der Durchmesser $R'\boldsymbol{O}R$, der Richtung nach, diese augenblickliche Drehaxe. Sie macht mit den drei Hauptaxen des Körpers Winkel, welche bestimmt werden durch:

$$\cos R\boldsymbol{O}x_1 = \frac{p}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}} \, , \quad \cos R\boldsymbol{O}y_1 = \frac{q}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}} \, , \quad \cos R\boldsymbol{O}z_1 = \frac{r}{\sqrt{(p^2+q^2+r^2)}}.$$

Fället man von einem Puncte $m = (x_1, y_1, z_1)$, der zur Zeit t nicht in der Drehaxe liegt, auf sie ein Perpendikel ϱ, so ist, nach den Principien der analytischen Stereometrie, die Länge dieses Perpendikels:

$$\varrho = \sqrt{\frac{(qz_1 - ry_1)^2 + (rx_1 - pz_1)^2 + (py_1 - qx_1)^2}{p^2 + q^2 + r^2}};$$

und wird durch dieses Perpendikel ϱ, welches als Radius des Puncts m in Ansehung seines Fusspunctes in der augenblicklichen Drehaxe angesehen werden kann, die Geschwindigkeit v des Puncts m dividirt, so erhält man die Winkelgeschwindigkeit des Halbmessers ϱ. Bezeichnet man sie durch ω, so dass $\frac{v}{\varrho} = \omega$ ist, so ergiebt sich

(4). $$\omega = \sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)}.$$

Diese Winkelgeschwindigkeit ist ganz unabhängig von der Lage des Puncts m; d. h. sie ist *dieselbe* für alle Puncte des Körpers.

Diese Winkelgeschwindigkeit ω wird in Ansehung ihrer Grösse und der Richtung ihrer Axe aus den drei Seitengeschwindigkeiten p, q, r, die sich auf Drehungen um die Axen $\boldsymbol{O}x$, $\boldsymbol{O}y$, $\boldsymbol{O}z$, beziehen, in ähnlicher Art geometrisch bestimmt, wie andere Geschwindigkeiten aus ihren Seitengeschwindigkeiten. Schneidet man nämlich auf den drei Axen, von $\boldsymbol{O}$ aus, drei Stücke ab, die den Seitengeschwindigkeiten um diese Axen proportional sind, und construirt daraus ein Parallelepipedum, so ist die von $\boldsymbol{O}$ aus gezogene Diagonale die Axe der zusammengesetzten Winkelgeschwindigkeit, und die Diagonale selbst stellt die proportionale Grösse dieser Winkelgeschwindigkeit um die gefundene augenblickliche Drehaxe vor.

Die Formeln $p = \omega \cdot \cos R\boldsymbol{O}x_1$, $q = \omega \cos R\boldsymbol{O}y_1$, $r = \omega \cos R\boldsymbol{O}z_1$ zeigen im Gegensatze, wie eine Winkelgeschwindigkeit ω um eine der Richtung nach bekannte Axe $\boldsymbol{O}R$ in die Seitengeschwindigkeiten p, q, r zu zerlegen sei, welche sich auf Drehungen um die Axen $\boldsymbol{O}x_1$, $\boldsymbol{O}y_1$, $\boldsymbol{O}z_1$ der Reihe nach beziehen. Mit der Zusammensetzung und Zerlegung der Winkel-Geschwindigkeiten um parallele Axen hat es eine ähnliche Bewandniss, wie mit der Zusammensetzung und Zerlegung paralleler Kräfte.

7.

Wir wollen nun auch die zusammengesetzte Winkelgeschwindigkeit ω als eine Function von u, d. h. als eine Function der Zeit $t = \frac{u}{n}$ ausdrücken. Substituiren wir für p, q, r die in (No.3) gefundenen Werthe, so erhalten wir zunächst:

$$\omega^2 = \frac{hC-e^2}{A(C-A)}\,\mathrm{cn}^2 u + \frac{hC-e^2}{B(C-B)}\,\mathrm{sn}^2 u + \frac{e^2-hA}{C(C-A)}\cdot \mathrm{dn}^2 u\,,$$

und da $\mathrm{dn}^2 u = \mathrm{cn}^2 u = k'^2 \mathrm{sn}^2 u = \mathrm{cn}^2 u + \frac{(CA-A)(e^2-hB)}{(C-B)(e^2-hA)}\cdot \mathrm{sn}^2 u$ ist, so ergiebt sich nach einer leichten Reduction die Formel

$$(1.) \qquad \omega = \sqrt{\left[\frac{hA+hC-e^2}{AC}\ \mathrm{cn}^2 u + \frac{hB+hC-e^2}{BC}\cdot \mathrm{sn}^2 u\right]}.$$

Sind nun ω_0, ω_1, ω_2, ω_3 die auf einander folgenden Werthe von ω für $t=0$, $t=T$, $t=2T$, $t=3T$, so findet sich

$$(2.) \qquad \begin{cases} \omega_0 = \omega_2 = \sqrt{\dfrac{hA+hC-e^2}{AC}} = \sqrt{\dfrac{ABh+B(hC-e^2)}{ABC}}, \\ \text{und} \\ \omega_1 = \omega_3 = \sqrt{\dfrac{hB+hC-e^2}{ABC}} = \sqrt{\dfrac{ABH+A(hC-e^2)}{ABC}}. \end{cases}$$

Aus diesen particulären Werthen erhält man

$$\omega_0^2 - \omega_1^2 = \frac{(hC-e^2)(B-A)}{ABC} = \frac{(e^2-hC)(A-B)}{ABC},$$

und hieraus zeigt sich, dass immer $\omega_0 => \omega_1$ ist, es mag $A<B<C$, oder umgekehrt $A>B>C$ sein. Ueberhaupt findet man leicht, dass ω_0 das *Maximum* der zusammengesetzten Winkelgeschwindigkeit des Körpers, und ω_1 ihr *Minimum* ist.

Also in den Zeitpuncten 0, $2T$, $4T$, $6T$ u. s. w. drehet sich der Körper am raschesten, und in den Zeitpuncten T, ${}_3T$, ${}_5T$, ${}_7T$ u. s. w. am langsamsten.

Durch Anwendung der Constanten ω_0 und ω_1 lässt sich der Ausdruck der Winkelgeschwindigkeit des Körpers überhaupt am einfachsten darstellen. Man erhält nämlich

$$(3.) \qquad \omega = \sqrt{(\omega_0^2 \cdot \mathrm{cn}^2 u + \omega_1^2 \mathrm{sn}^2 u)}.$$

In den beiden particulären Fällen, in welchen entweder $A=B$, oder auch $hC=e^2$ ist, wird $\omega_1 = \omega_0$; in diesem Falle reducirt sich also die Formel auf

$$\omega = \omega_0 = \omega_1;$$

d. h. in jedem der beiden particulären Fälle ist die Winkelgeschwindigkeit des Körpers von unveränderlicher Grösse.

8.

Mit der augenblicklichen Drehaxe $R'OR$ hat es eine ähnliche Bewandniss, wie mit den Axen Ox_1, Oy_1, Oz_1 selbst; sie ändert mit der Zeit zugleich

ihre vom Schwerpuncte **0** aus genommene Richtung. Aber obgleich die in Folge der Winkelgeschwindigkeit ω Statt findende Drehung des Körpers sich auf eine stetige Reihe von auf einander folgenden Axen vertheilt, so kann doch nach der gesammten Drehung des Körpers überhaupt gefragt werden: gerade so, als wenn diese Drehung um eine einzige unveränderliche Axe Statt gefunden hätte.

Ist W diese gesammte Drehung des Körpers, so muss $\frac{\partial W}{\partial t} = \omega$ sein, und hieraus folgt

$$W = \int_0 \omega \,.\, \partial t\,.$$

Substituirt man für ω den in (No. 7) gefundenen Werth und beachtet, dass $\partial t = \frac{\partial u}{n}$ ist, so ist

$$W = \frac{1}{n} \cdot \int_0 \partial u \,.\, \sqrt{(\omega_0^{\,2} \operatorname{cn}^2 u + \omega_1^{\,2} \operatorname{sn}^2 u)}\,.$$

Für diese etwas schwierige Integration gehen wir zuerst zu Functionen des Complements von u über. Dies giebt

$$W = \frac{1}{n} \cdot \int_0 \frac{\partial u \sqrt{(\omega_0^{\,2} k'^2 \operatorname{snc}^2 u + \omega_1^{\,2} \operatorname{cnc}^2 u)}}{\operatorname{dnc} u}\,.$$

Wird nun $\operatorname{snc} u = z$ gesetzt, also $\partial u = -\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)}\sqrt{(1-k^2 z^2)}}$, so erhält man

$$W = \frac{\omega_1}{n} \cdot \int_1 \frac{\partial z \sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_1 - \omega_0^{\,2} k'^2}{\omega_1^{\,2}}\right) \cdot z^2\right)}}{(1 - k^2 z^2) \,.\, \sqrt{(1 - z^2)}}\,.$$

Nimmt man nun einen andern Modul

$$\lambda = \frac{\sqrt{(\omega_1^{\,2} - \omega_0^{\,2} k'^2)}}{\omega_1}, \text{ so ist der conjugirte Modul}$$

$$\lambda' = \sqrt{(1 - \lambda^2)} = \frac{\omega_0}{\omega_1} k'\,.$$

Nimmt man auch ein anderes Argument v, von der Grösse, dass mit Beziehung auf den Modul λ, $z = \operatorname{snc} v$ ist, wobei die zu den Moduln λ und λ' gehörigen Modular-Quadranten durch L und L' bezeichnet werden, so ist

$$W = \frac{\omega_1}{n} \cdot \int_0 \frac{\operatorname{dnc}^2 v \cdot \partial v}{1 - k^2 \operatorname{snc}^2 v} = \int_0 \frac{\lambda'^2 \omega_1}{n k'^2} \cdot \frac{\partial v}{1 + \frac{\lambda'^2 - k'^2}{k'^2} \operatorname{sn}^2 v}\,.$$

Dieses Integral ist mit der bekannten Formel

$$\int_0 \frac{\partial v}{\operatorname{sn}' d \operatorname{snc}' d \,(1 + \lambda^2 \operatorname{tn}'^2 d \operatorname{sn}^2 v)} = \frac{v}{\operatorname{sn}' d \operatorname{snc}' d} = S(v, d)$$

$$= \frac{v}{\mathrm{tn}'d\,\mathrm{dn}'d} + C(v,\ d) = \frac{\mathrm{dn}'d}{\mathrm{tn}'d}\,.\,v + D(v,\ d)\ ,$$

zu vergleichen, in welcher sich die Functionen des Arguments v ebenfalls auf den Modul λ, hingegen die Functionen des Parameters d auf den Modul λ' beziehen mögen.

Setzt man Behufs dieser Vergleichung $\lambda\,\mathrm{tn}'d = \frac{\sqrt{(\lambda'^2-k'^2)}}{k'}$, also $\mathrm{tnc}'d = \frac{k'}{\sqrt{(\lambda'^2-k'^2)}}$, so ist $\mathrm{snc}'d = \frac{k'}{\lambda'}$, $\mathrm{cn}'d = \frac{\lambda k'}{\lambda' k}$, $\mathrm{dn}'d = \frac{\lambda}{k}$, $\mathrm{sn}'d = \frac{\sqrt{(\lambda'^2-k'^2)}}{\lambda' k}$; daher ist $\frac{1}{\mathrm{sn}'d\,\mathrm{snc}'d} = \frac{{\omega_0}^2}{\omega_1 n}$; und da sich auch $\frac{\lambda'^2\omega'}{nk'^2} = \frac{{\omega_0}^2}{\omega_1 n}$ findet, so ist

$$W = \frac{v}{\mathrm{tn}'d\,\mathrm{dn}'d} + C\,(v,\ d) = \frac{v}{\mathrm{sn}'d\,\mathrm{snc}'d} - S(v,d)$$
$$= \frac{\mathrm{dn}'d}{\mathrm{tn}'d} + D\,(v,\ d)\,.$$

Werden für die Zeichen ihre Werthe gesetzt, so erhält man folgende Ausdrücke:

$$(1.)\quad \begin{cases} \lambda' = \frac{\omega_0}{\omega_1}\,.\,k' = \sqrt{\frac{B(C-A)\,(e^2-hB)\,(hA+hC-e^2)}{A(C-B)\,(e^2-hA)\,(hB+hC-e^2)}} \\ \lambda\ = \qquad\qquad \sqrt{\frac{C(B-A)\,(hC-e^2)\,(hA+hB-e^2)}{A(C-B)\,(e^2-hA)\,(hB+hC-e^2)}} \end{cases}$$

und ausserdem

$$(2.)\quad \begin{cases} \mathrm{sn}'d = \sqrt{\frac{(C-B)\,(e^2-hA)}{B\,(hA+hC-e^2)}} & \mathrm{snc}'d = \sqrt{\frac{A(hB+hC-e^2)}{B(hA+hC-e^2)}} \\ \mathrm{cn}'d = \sqrt{\frac{C(hA+hB-e^2)}{B(hA+hC-e^2)}} & \mathrm{cnc}'d = \sqrt{\frac{(B-A)(hC-e^2)}{B(hA+hC-e^2)}} \\ \mathrm{nc}'d = \sqrt{\frac{(C-B)\,(e^2-hA)}{C(hA+hB-e^2)}} \quad \text{sowie} & \mathrm{tnc}'d = \sqrt{\frac{A(hB+hC-e^2)}{(B-A)(hC-e^2)}} \\ \mathrm{dn}'d = \sqrt{\frac{C(hA+hB-e^2}{A(hB+hC-e^2)}} & \mathrm{dnc}'d = \sqrt{\frac{(B-A)(hC-e^2)}{(C-B)\,(e^2-hA)}} = k. \end{cases}$$

Demnach ist also $W = v\,.\,\sqrt{\frac{A(hB+hC-e^2)}{(C-B)\,(e^2-hA)}} + C(v,\ d)\,.$

Da ferner $\mathrm{snc}\,v = \mathrm{snc}\,u$ ist, so ist überhaupt

$$\mathrm{amc}\,v\ =\ \mathrm{amc}\,u;$$

in welcher Formel sich $\mathrm{amc}\,v$ auf den neuen Modul λ, hingegen $\mathrm{amc}\,u$ auf den vorigen Modul k bezieht. Diese Gleichung kann man auch also darstellen:

$$\mathrm{tn}\,v = \frac{k'}{\lambda'}\cdot\mathrm{tn}\,u = \frac{\omega_1}{\omega_0}\cdot\mathrm{tn}\,u$$

oder

$$\operatorname{tn} v = \operatorname{tn} u \,.\, \sqrt{\frac{A(hB+hC-e^2)}{B(hA+hC-e^2)}}\,.$$

Am Schlusse der Zeit T ist $u = K$, also $v = L$: mithin wird die gesammte Drehung des Körpers am Ende der Zeit T ausgedrückt durch

$$L \,.\, \sqrt{\frac{A(hB+hC-e^2)}{(C-B)(e^2-hA)}} + C(L,\ d)\,.$$

Da ferner $C(2L, d) = 2\,.\,C(L,\ d)$ und $C(3L, d) = 3\,.\,C(L, d)$, *etc.* ist, so sieht man, dass auch in den folgenden Zeitvierteln T eine eben so grosse weitere Drehung des Körpers Statt findet, als in dem ersten Zeitviertel L.

In dem Falle (I von No. 4.) findet die Drehung W in dem durch die Figur (1) angezeigten Sinne, und im Falle (II) in dem entgegengesetzten Sinne Statt.

Wir werden weiter unten die geometrische Bedeutung des Winkels oder Hauptbogens W angeben.

9.

Um die Reihenfolge der augenblicklichen Axen zu übersehen, haben wir nur die sphärische Curve zu betrachten, welche der sphärische Punct R dieser beweglichen Axe beschreibt. Sind X, Y, Z die zu den Axen OX_1, OY_1, OZ parallelen Coordinaten dieses Puncts, so ist, weil der Kugelradius $= 1$ sein soll, $X = \cos R\,O\,X_1$, $Y = \cos R\,O\,Y_1$ und $Z = \cos R\,O\,Z_1$, und also

$$(1.) \qquad X = \frac{p}{\omega}\,,\quad Y = \frac{q}{\omega}\,,\quad Z = \frac{r}{\omega}\,.$$

Wir wollen im Folgenden die Puncte R und R' die *schwankenden* Pole, und die augenblickliche Drehaxe $R'\,O\,R$ *die schwankende Axe* des Körpers nennen.

Substituirt man für p, q, r, ω die in (No. 3 u. No. 7) gefundenen Werthe, so zeigen sich alle drei Coordinaten als Functionen von $u = nt$, und man kann also die Lage des schwankenden Poles in Beziehung auf die drei Hauptaxen des Körpers für jede Zeit t berechnen.

Die Anwendung der Parallel-Coordinaten ist bekanntlich für die Untersuchung sphärischer Constructionen nicht sehr geeignet. Deshalb nehme man eine Coordinaten-Verwandlung zu Hülfe. Man setze

$$x = \frac{X}{Z} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{Y}{Z}\,.$$

Alsdann sind x und y die Tangenten der Axencoordinaten des schwankenden Poles R,

indem man die Ecke Z_1 als den Anfangspunct dieser sphärischen Coordinaten, Z_1X_1 und Z_1Y_1 aber als sphärische Coordinaten-Axen, X_1 und Y_1 als die Cardinal-Puncte, mithin den durch X_1 und Y_1 gehenden Hauptkreis als die Cardinale des sphärischen Coordinaten-Systems (wie in des Verfassers analytischer Sphärik) ansieht. Dies giebt

$$(2.)\quad \begin{cases} x - \frac{p}{r} \quad \text{und} \quad y = \frac{q}{r} \\ \text{oder} \\ x = \sqrt{\frac{C(hC-e^2)}{A(e^2-hA)}} \cdot \operatorname{snc} u \quad \text{und} \quad y = \sqrt{\frac{C(hC-e^2)}{B(e^2-hB)}} \cdot \operatorname{cnc} u \end{cases}$$

Bezüglich auf (Fig. 2.) ist $x = \operatorname{tang} Z_1P$ und $y = \operatorname{tang} Z_1Q$ und es sind Z_1P und Z_1Q die Axen-Coordinaten des schwankenden Poles R, in welchem sich die Applicatenlinien Y_1P und X_1Q schneiden.

$$(3.)\quad \begin{cases} \text{Setzt man } \operatorname{tang}\beta_1 = \sqrt{\frac{C(hC-e^2)}{A(e^2-hA)}} \text{ und } \operatorname{tang}\alpha_1 = \sqrt{\frac{C(hC-e^2)}{B(e^2-hB)}} \\ \text{also auch} \\ \sin\beta_1 = \sqrt{\frac{C(hC-e^2)}{(C-A)(hA+hC-e^2)}}, \quad \sin\alpha_1 = \sqrt{\frac{C(hC-e^2)}{(C-B)(hB+hC-e^2)}} \\ \cos\beta_1 = \sqrt{\frac{A(e^2-hA)}{(C-A)(hA+hC-e^2)}}, \quad \cos\alpha_1 = \sqrt{\frac{B(e^2-hB)}{(C-B)(hB+hC-e^2)}} \end{cases}$$

so verwandeln sich die Gleichungen (2) in

$$(4.)\qquad x = \operatorname{tang}\beta_1 \cdot \operatorname{snc} u \quad \text{und} \quad y = \operatorname{tang}\alpha_1 \cdot \operatorname{cnc} u;$$

und hiernach lässt sich die Lage des schwankenden Poles R für jede Zeit t ungleich einfacher bestimmen, als nach den Formeln (1). Eliminirt man u, so erhält man die Gleichung

$$\frac{x^2}{\operatorname{tang}^2\beta_1} + \frac{y^2}{\operatorname{tang}^2\alpha_1} = 1,$$

und ihr gemäss ist die Ortscurve des schwankenden Poles R ein sphärischer Kegelschnitt, dessen innerer Mittelpunct Z_1 und dessen beide äussern Mittelpuncte X_1 und Y_1 sind. R_0, R_1, R_2, R_3 sind die vier Scheitel der sphärischen Ellipse; und zwar sind R_0 und R_2 die Scheitel der kleinen, und R_1 und R_3 die Scheitel der grossen Axe. Beschreibt man mit den Radien β_1 und α_1 aus Z_1 Kreise und zieht von Z_1 aus einen beliebigen Radius, welcher den kleinen Kreis in M und den grossen in N schneidet und mit Z_1R_0 den Winkel ψ macht, so ist

$$(5.)\qquad \psi = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u$$

die excentrische Anomalie des Punctes R. Nämlich die von N und M auf Z_1R_1 und Z_1R_0 gefällten sphärischen Perpendikel schneiden sich in R, welcher Punct

also für jeden Werth von ψ, d. h. für jede Zeit t, geometrisch bestimmt werden kann.

Die Tangenten der beiden Parameter oder Krümmungshalbmesser, welche zu den Scheiteln R_0 und R_1 gehören, sind $\frac{\text{tang}^2\alpha_1}{\text{tang}\beta_1}$ und $\frac{\text{tang}^2\beta_1}{\text{tang}\alpha_1}$ oder

$$\frac{V[AC(e^2-hA)(hC-e^2)]}{B(e^2-hB)} \text{ und } \frac{V[BC(e^2-hB)(hC-e^2)]}{A(e^2-hA)}.$$

Sind C und C' die beiden Brennpuncte der Ellipse und ist $Z_1C = Z_1C' = \varepsilon_1$, so findet man diese Excentricität ε_1 nach der Formel $\cos\varepsilon_1 = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_1}$, und es ist im vorliegenden Falle

$$(6.)\quad \begin{cases} \cos\varepsilon_1 = V\frac{B(C-A)(e^2-hB)(hA+hC-e^2)}{A(C-B)(e^2-hA)(hB+hC-e^2)}, \\ \sin\varepsilon_1 = V\frac{C(B-A)(hC-e^3)(hA+hB-e^2)}{A(C-B)(e^2-hA)(hB+hC-e^2)}, \\ \text{tang}\varepsilon_1 = V\frac{C(B-A)(hC-e^2)(hA+hB-e^2)}{B(C-A)(e^2-hB)(hA+hC-e^2)}. \end{cases}$$

Vergleicht man diese Formeln mit den in (No. 8) gefundenen, durch welche die Modul λ und λ' bei der Berechnung der gesammten Umdrehung W des Körpers während der Zeit t bestimmt wurden, so sieht man, dass

(7.) $\lambda = \sin\varepsilon_1$ und $\lambda' = \cos\varepsilon_1$ ist.

Hierdurch haben also die Arcus der Modul λ und λ' zugleich ihre geometrische Bedeutung gefunden. Da sich ferner in (No. 8) $\text{amc}\,v = \text{amc}\,u$ fand, so ist noch

(8.) $\text{amc}\,v = \frac{1}{2}\pi - \psi =$ Winkel $R'Z_1N$*).

Den Formeln (4) gemäss befindet sich der schwankende Pol R zur Zeit $t = 0$ im Scheitel R_0, für $t = T$ in R_1, für $t = 2T$ in R_2, für $t = 3T$ in R_3, und für $t = 4T$ wieder in R_0, so dass also der schwankende Pol R während der Zeit $4T$ die ganze Ellipse durchläuft.

Soviel steht hiernach fest, dass die auf eine unabänderliche Weise mit dem Körper verbundene sphärische Ellipse $R_0R_1R_2R_3$ mit dem Körper zugleich sich so bewegt, dass der sich ebenfalls bewegende oder schwankende Pol R jederzeit ein Punct der Ellipse ist. Einem Beobachter also, welcher seinen Standpunct im bewegten Körper selbst hätte, würde es scheinen,

---

*) Fället man vom Brennpuncte C das Perpendikel CF auf Z_1N, so ist $\cot CZ_1F . \cot FCZ_1 = \cos Z_1C$; also $\cot CZ_1F = \lambda'\text{tnc}\,v$, mithin ist

(9.) $\text{am}\,v =$ Winkel FCZ_1.

das Schwanken des Poles R bestehe darin, dass dieser Punct eine Ellipse beschreibe.

Die eigentliche Bahn des Poles R ist aber im Allgemeinen eine ganz andere, wie weiter unten bewiesen wird; das so eben nachgewiesene Beschreiben einer Ellipse ist nur scheinbar, und hat in der gleichzeitigen Bewegung, sowohl des Pols R, als des Körpers, seinen Grund; es ist die *relative* Bewegung des Puncts R.

Beschreibt man aus dem Puncte R einen Hauptkreis, so ist

$$(10.) \qquad p \,.\, \cos Mx_1 + q \cos My_1 + r \cos Mz_1 = 0$$

die Gleichung dieses Hauptkreises, vorausgesetzt, dass M einen beliebigen Punct der Peripherie desselben bezeichnet. Die schwankende Axe $R'OR$ steht auf der Ebene dieses Hauptkreises im Mittelpuncte O senkrecht; daher nennen wir diesen Hauptkreis den *schwankenden Aequator* des Körpers. Wir stellen uns vor, dass dieser schwankende Aequator keine andere Bewegung habe, als diejenige, welche von dem Schwanken der fest mit ihm verbundenen Axe $R'OR$ herrührt, dass also der Aequator an den Drehungen des Körpers um die schwankende Axe $R'OR$ nicht mit Theil nimmt.

Sowie der schwankende Pol R sich bei der Bewegung des Körpers auf dem Umfange der Ellipse $R_0R_1R_2R_3$ bewegt, so wird der schwankende Aequator gleichzeitig immer den reciproken Kegelschnitt in einem Puncte S, welcher mit dem schwankednen Pole R durch das Reciprocitäts-Gesetz verbunden ist, berühren.

Das spätere Bedürfniss berücksichtigend, leiten wir noch eine Formel für den Winkel her, welchen der sphärische Halbmesser Z_1R der Ellipse $R_0R_1R_2R_3$ mit der grossen Halbaxe Z_1R_1 macht. Die Tangente dieses Winkels ist nach der analytischen Sphärik $= \frac{x}{y}$, daher ist

$$(11.) \qquad \operatorname{tang} R'Z_1R = \frac{p}{q} = \sqrt{\frac{B(e^2 - hB)}{A(e^2 - hA)}} \cdot \operatorname{tnc} u = \sqrt{\frac{B(C-B)}{A(C-A)}} \cdot \frac{1}{\operatorname{tn} u} .$$

10.

Die Axe des Hauptmoments e ist, wie schon in (No. 2) erwähnt, eine Linie, welche eine unveränderliche Richtung im Raume hat und durch den Schwerpunct des Körpers geht. Wird die Kugelfläche von ihr in G und im Gegenpuncte G' geschnitten, so ist

$$(1.) \quad \cos GOX_1 = \frac{Ap}{e}, \quad \cos GOY_1 = \frac{Bq}{e} \quad \text{und} \quad \cos GOZ_1 = \frac{Cr}{e};$$

und eben diese Cosinus sind zugleich die den drei Axen Ox_1, Oy_1, Oz_1 parallelen Coordinaten des Punctes G.

Wir nennen die beiden festen Puncte G und G' die *festen* Pole des Körpers, und die Axe $G'OG$ die *feste* oder *unbewegliche* Axe des Körpers.

Gehen wir wieder zu den Tangenten der Axencoordinaten des Puncts G über, indem wir in (Fig. 3.) $\text{tang}\, Z_1P = x$ und $\text{tang}\, Z_1Q = y$ setzen, so ist wie immer, $x = \frac{\cos GOX_1}{\cos GOZ_1}$ und $y = \frac{\cos GOY_1}{\cos GOZ_1}$; daher findet sich jetzt

$$\text{(2.)} \quad \begin{cases} x = \frac{A \cdot p}{C \cdot r} \text{ und } y = \frac{B \cdot q}{C \cdot r} \\ \text{oder} \\ x = \sqrt{\frac{A(hC - e^2)}{C(e^2 - hA)}} \cdot \text{snc}\, u \text{ und } y = \sqrt{\frac{B(hC - e^2)}{C(e^2 - hB)}} \cdot \text{cnc}\, u. \end{cases}$$

$$\text{(3.)} \quad \begin{cases} \text{Setzt man nun } \text{tang}\, \beta_3 = \sqrt{\frac{A(hC - e^2)}{C(e^2 - hA)}} \text{ und } \text{tang}\, \alpha_3 = \sqrt{\frac{B(hC - e^2)}{C(e^2 - hB)}} \\ \text{woraus} \\ \sin \beta_3 = \sqrt{\frac{A(hC - e^2)}{(C - A)e^2}} \qquad \sin \alpha_3 = \sqrt{\frac{B(hC - e^2)}{(C - B)e^2}} \\ \text{und} \\ \cos \beta_3 = \sqrt{\frac{C(e^2 - hA)}{(C - A)e^2}} \qquad \cos \alpha_3 = \sqrt{\frac{C(e^2 - hB)}{(C - B)e^2}} \end{cases}$$

folgt, so ergeben sich die einfachen Formeln $x = \text{tang}\, \beta_3 \cdot \text{snc}\, u$ und $y = \text{tang}\, \alpha_3 \cdot \text{cnc}\, u$, mittelst welcher man die Lage des festen Poles G für jede Zeit t in Beziehung auf die drei Hauptaxen des bewegten Körpers bestimmen kann. Die Elimination der Modular-Functionen giebt die Gleichung

$$\frac{x^2}{\text{tang}^2 \beta_3} + \frac{y^2}{\text{tang}^2 \alpha_3} = 1.$$

Beschreibt man den sphärischen Kegelschnitt $G_0 G_1 G_2 G_3$, indem man $Z_1G_0 = Z_1G_2 = \beta_3$ und $Z_1G_1 = Z_1G_3 = \alpha_3$ macht, so sind G_0 und G_2 die Scheitel der kleinen und G_1 und G_3 die Scheitel der grossen Axe der Ellipse; Z_1 ist der innere Mittelpunct und X_1 und Y_1 sind die äusseren Mittelpuncte der Ellipse, in welcher zu jeder Zeit der feste Pol G enthalten sein wird.

Ist ferner wieder der Winkel $NZ_1G_0 = \psi$ die excentrische Anomalie des Punctes G, d. h. lässt man wieder von den Durchschnittspuncten M und N des Halbmessers Z_1N mit den beiden aus Z_1 beschriebenen Kreisen, deren Radien die Halbaxen β_3 und α_3 sind, die Perpendikel NQ und MP auf Z_1Y_1 und Z_1X_1 herab, welche sich in G schneiden, so ist wieder

$$(4.) \qquad \psi = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u.$$

Zu dem festen Pole G gehört also am Ende der Zeit t dieselbe excentrische Anomalie, wie zu dem schwankenden Pole R. Den Formeln $x = \operatorname{tang}\beta_3 . \operatorname{snc} u$ und $y = \operatorname{tang}\alpha_3 . \operatorname{cnc} u$ gemäss befindet sich der feste Pol G für $t = 0$ in G_0, für $t = T$ in G_1, für $t = 2T$ in G_2, für $t = 3T$ in G_3, und für $t = 4T$ wieder in G_0.

Ist $Z_1B = Z_1B'$ die Excentricität des Kegelschnitts, welche durch ε_3 bezeichnet werden soll, so ist bekanntlich $\cos\varepsilon_3 = \dfrac{\cos\alpha_3}{\cos\beta_3}$; daher hat man die Formeln

$$(5.) \quad \begin{cases} \cos\varepsilon_3 = \sqrt{\dfrac{(C-A)(e^2-hB)}{(C-B)(e^2-hA)}}, \\ \sin\varepsilon_3 = \sqrt{\dfrac{(B-A)(hC-e^2)}{(C-B)(e^2-hA)}}, \\ \operatorname{tang}\varepsilon_3 = \sqrt{\dfrac{(B-A)(hC-e^2)}{(C-A)(e^2-hB)}}; \end{cases}$$

und vergleicht man hiermit die Ausdrücke (4 in No. 3), wodurch die anfänglichen Modul k und k' bestimmt werden, so zeigt sich die Richtigkeit der Formeln

$$(6.) \qquad k = \sin\varepsilon_3 \quad \text{und} \quad k' = \cos\varepsilon_3;$$

wodurch also der Arcus des Moduls k construirt wird. Fället man vom Brennpuncte B auf Z_1N das Perpendikel BJ, so ist im Dreiecke BZ_1J bekanntlich $\cot JBZ_1 . \cot JZ_1B = \cos Z_1B$, also ist $\cot \boldsymbol{JBZ_1} = k' \operatorname{tang} \boldsymbol{JZ_1B} = k' \operatorname{tnc} u = \dfrac{\mathbf{1}}{\operatorname{tn} u}$, und folglich

$$(7.) \qquad \operatorname{am} u = \text{Winkel}\, \boldsymbol{JBZ_1},$$

wodurch demnach auch $\operatorname{am} u$ sehr einfach construirt wird;

Da nach den Principien der analytischen Sphärik $\dfrac{x}{y}$ die Tangente des Winkels ist, welchen der Halbmesser $\boldsymbol{Z_1G}$ der Ellipse mit der grossen Halbaxe macht, so ist

$$(8.) \qquad \operatorname{tang} \boldsymbol{GZ_1G_1} = \frac{Ap}{Bq} = \sqrt{\frac{A(e^2-hB)}{B(e^2-hA)}} \operatorname{tnc} u = \sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}} \cdot \frac{\mathbf{1}}{\operatorname{tn} u}.$$

Hierdurch ist die Richtung des Halbmessers bestimmt, in welchem der Punct $\boldsymbol{G}$, von $\boldsymbol{Z_1}$ aus betrachtet, liegt.

Beschreibt man aus dem festen Pole $\boldsymbol{G}$ oder $\boldsymbol{G'}$ einen Hauptkreis, so hat auch dieser eine unveränderliche Lage im Raume; wir nennen ihn daher den *festen Aequator* des Körpers; die Gleichung desselben ist in Beziehung auf die beweglichen Hauptaxen des Körpers:

$$(9.)\quad \begin{cases} Ap\,.\,X + Bq\,.\,Y + Cr\,.\,\boldsymbol{Z} = 0, \text{ oder} \\ Ap\,.\cos Mx_1 + Bq\,.\cos My_1 + Cr\,.\cos Mz_1 = 0, \end{cases}$$

wenn unter M irgend ein Punct des Hauptkreises verstanden wird. Da, dem so eben gefundenen Gesetze gemäss, der mit dem Körper auf eine unveränderliche Weise verbundene Kegelschnitt $\boldsymbol{G_0 G_1 G_2 G_3}$ mit dem Körper zugleich sich so bewegt, dass er fortwährend durch den festen Pol $\boldsymbol{G}$ geht, so folgt, dass der zu $\boldsymbol{G_0 G_1 G_2 G_3}$ gehörige reciproke Kegelschnitt zu jeder Zeit den unbeweglichen Aequator berührt, und ihn am Ende der Zeit t in einem Puncte berührt, welcher mit dem Puncte $\boldsymbol{G}$ durch das sphärische Reciprocitäts-Gesetz verbunden ist.

11.

Die Gleichung des reciproken Kegelschnitts, oder doch zunächst die Tangenten der Axen-Coordinaten des zu $\boldsymbol{G}$ gehörigen reciproken Puncts H in (Fig. 4) finden sich aus denen des Puncts $\boldsymbol{G}$, nämlich:

$$x = \operatorname{tang}\beta_3 \cos\psi \quad \text{und} \quad y = \operatorname{tang}\alpha_3\,.\,\sin\psi;$$

und zwar am leichtesten nach (§. 25) der analytischen Sphärik. Sie sind

$$(1.)\quad x = -\sqrt{\frac{C(e^2 - hA)}{A(hC - e^2)}}\,.\,\operatorname{snc} u \text{ und } y = -\sqrt{\frac{C(e^2 - hB)}{B(hC - e^2)}}\,.\,\operatorname{cnc} u\,.$$

$$(2.)\quad \begin{cases} \text{Setzt man nun } \operatorname{tang}\alpha_4 = \sqrt{\frac{C(e^2 - hA)}{A(hC - e^2)}}, & \operatorname{tang}\beta_4 = \sqrt{\frac{C(e^2 - hB)}{B(hC - e^2)}}, \\ \sin\alpha_4 = \sqrt{\frac{C(e^2 - hA)}{(C - A)e^2}}, & \sin\beta_4 = \sqrt{\frac{C(e^2 - hB)}{(C - B)e^2}}, \\ \cos\alpha_4 = \sqrt{\frac{A(hC - e^2)}{(C - A)e^2}}, & \cos\beta_4 = \sqrt{\frac{B(hC - e^2)}{(C - B)e^2}}, \end{cases}$$

so ist $\alpha_4 + \beta_3 = \frac{1}{2}\pi$ und $\beta_4 + \alpha_3 = \frac{1}{2}\pi$ und die Formeln (1) verwandeln sich in

$$x = -\operatorname{tang}\alpha_3\,.\,\operatorname{snc} u \text{ und } y = -\operatorname{tang}\beta_4\,.\,\operatorname{cnc} u.$$

Die Vorzeichen — deuten darauf hin, dass sich der reciproke Punct H während des ersten Zeitviertels T im Innern des dreirechtwinckligen Dreiecks X_1^1, $\boldsymbol{Z_1}$, Y_1^1 befindet, wenn nämlich X_1^1 der Gegenpunct von X_1 und Y_1^1 der Gegenpunct von Y_1 ist. Uebrigens ist $x = \operatorname{tang} \boldsymbol{Z_1 P}$ und $y = \operatorname{tang} \boldsymbol{Z_1 Q}$.

Ist $H_0 H_1 H_2 H_3$ der reciproke Kegelschnitt, welcher mit $\boldsymbol{G_0 G_1 G_2 G_3}$ dieselben drei Mittelpuncte X_1, Y_1 und $\boldsymbol{Z_1}$ hat, und sind H_0 und H_2 die Scheitel der grossen Axe $2\alpha_4$, und H_1 und H_3 die Scheitel der kleinen Axe $2\beta_4$, so befindet sich der reciproke Punct H für $t = 0$ in H_0, für $t = T$ in H_1, für $t = 2T$ in H_2, für $t = 3T$ in H_3 und endlich für $t = 4T$ wieder in H_0.

Es stelle NUN' den festen Aequator des Körpers vor, welcher vom Kegelschnitte zur Zeit t in H berührt wird, so wurde er für $t=0$ im Scheitel H_0, für $t = T$ im Scheitel H_1 berührt; am Ende der Zeit $2T$ war H_2 der Berührungspunct, und am Ende der Zeit $3T$ war es der Scheitel H_3; so dass am Ende der Zeit $4T$ wieder H_0 als Berührungspunct diente.

Zum Berührungspuncte H gehört dieselbe excentrische Anomalie, welche zum Puncte G gehörte, nämlich

$$\psi = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u;$$

nur mit dem Unterschiede, dass jetzt $Z_1 H_0$ der erste Schenkel dieses veränderlichen Winkels ist. Sind A und A' die beiden Brennpuncte dieser Ellipse, und wird die Excentricität $Z_1 A = Z_1 A' = \varepsilon_4$ gesetzt, so ist nach (§. 84) der analytischen Sphärik: $\cos\varepsilon_4 = \dfrac{\sin\beta_3}{\sin\alpha_3}$, $\sin\varepsilon_4 = \dfrac{\cos\beta_3}{\sin\alpha_3}\sin\varepsilon_3 = \dfrac{\operatorname{tang}\varepsilon_3}{\operatorname{tang}\alpha_3}$ und $\operatorname{tang}\varepsilon_4 = \dfrac{\sin\varepsilon_3}{\operatorname{tang}\beta_3}$, und danach findet man

$$(3.)\qquad \begin{cases} \cos\varepsilon_4 = \sqrt{\dfrac{A(C-B)}{B(C-A)}}, \\ \sin\varepsilon_4 = \sqrt{\dfrac{C(B-A)}{B(C-A)}}, \\ \operatorname{tang}\varepsilon_4 = \sqrt{\dfrac{C(B-A)}{A(C-B)}}. \end{cases}$$

Verbindet man den festen Pol mit dem Berührungspuncte H durch den Hauptbogen GH, so hat dieser bekanntlich die Länge eines Quadranten; auch ist er die gemeinschaftliche Normale der beiden reciproken Ellipsen $G_0 G_1 G_2 G_3$ und $H_0 H_1 H_2 H_3$, und man findet nach bekannten Regeln leicht die Gleichung dieser Normale; sie ist

$$(4.)\qquad \frac{C-B}{p}\cdot\cos Mx_1 + \frac{A-C}{q}\cdot\cos My_1 + \frac{B-A}{r}\cos Mz_1 = 0,$$

wenn M einen beliebigen Punct der Normale bezeichnet. Diese Gleichung setzt uns in den Stand, ein neues und bemerkenswerthes Gesetz zu beweisen, welches der schwankende Pol R in Beziehung auf den festen Pol G und seinen reciproken Punct H befolgt.

Da nämlich $\cos Rx_1 = \dfrac{p}{\omega}$, $\cos Ry_1 = \dfrac{q}{\omega}$ und $\cos Rz_1 = \dfrac{r}{\omega}$ ist, so befriedigen diese Werthe in Beziehung auf den Pol R, wenn wir ihn für M nehmen, die so eben gefundene Gleichung (4); woraus erhellet, dass der schwankende Pol R zu jeder Zeit in jener gemeinschaftlichen Normale GH enthalten ist, welche den festen Pol G mit dem reciproken Puncte H, d. h. mit dem Puncte verbindet, in

welchem der feste Aequator von dem Kegelschnitte $H_0H_1H_2H_3$ am Ende der Zeit berührt wird.

Da zu jeder sphärischen Ellipse ein Kegel zweiter Ordnung gehört, dessen Scheitel mit dem Mittelpuncte der Kugel zusammenfällt, so lässt sich das Gesetz der Bewegung des Körpers um seinen Schwerpunct auch so ausdrükken: *Der Körper bewegt sich so, dass seine feste Axe auf dem Mantel eines Kegels bleibt, und der feste Aequator von der reciproken Kegelfläche in einer geraden Linie berührt wird, welche mit der festen Axe eine Ebene bestimmt, in welcher jedesmal auch die schwankende Axe liegt, die sich ausserdem noch auf dem Mantel eines dritten Kegels zweiter Ordnung bewegt, welcher mit den beiden vorhin genannten Kegeln den festgehaltenen Schwerpunct des Körpers zum gemeinschaftlichen Scheitel hat.* Alle drei Kegelflächen sind auf eine unveränderliche Weise mit dem Körper verbunden und haben Theil an seiner Bewegung.

12.

In (Fig. 4) ist der Fall vorgestellt, in welchem die Zeit t zwischen den Grenzen **0** und T liegt. Der Berührungspunct H befindet sich noch im ersten Quadranten der Ellipse; er ist auf der Ellipse um den Bogen H_0H vorgerückt.

Rectificirt man diesen Bogen H_0H, so erhält man die ziemlich einfache Formel

$$(1.) \qquad H_0H = {}'C(u, a),$$

wo der frühere Modul $k = \sin\varepsilon_3 = \sqrt{\frac{(B-A)(hC-e^2)}{(C-B)(e^2-hA)}}$ als Modul der Modular-Functionen von u dient. Als Modul der Modular-Functionen des Parameters a dient der conjugirte Modul $k' = \cos\varepsilon_3 = \sqrt{\frac{(C-A)(e^2-hB)}{(C-B)(e^2-hA)}}$; wo dann ε_3 die Excentricität des reciproken Kegelschnitts $G_0G_1G_2G_3$ ist.

Das Argument u jenes Integrals ist das frühere $u = nt$, und der Parameter a des Modular-Integrals ${}'C(u, a)$ wird durch die einfachen Formeln

$$(2.) \qquad \mathrm{am}'a = \tfrac{1}{2}\pi - \varepsilon_4 \quad \text{und} \quad \mathrm{amc}'a = a_4$$

bestimmt, so dass:

$$(3.) \begin{cases} \mathrm{sn}'a = \cos\varepsilon_4 = \sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}} & \mathrm{snc}'a = \sin\alpha_4 = \sqrt{\frac{C(e^2-hA)}{(C-A)e^2}} \\ \mathrm{cn}'a = \sin\varepsilon_4 = \sqrt{\frac{C(B-A)}{B(C-A)}} & \mathrm{cnc}'a = \cos\alpha_4 = \sqrt{\frac{A(hC-e^2)}{(B-A)e^2}} \end{cases}$$

$$(3.)\quad \begin{cases} \frac{k'}{k}\,\mathrm{cn}'\,a = \frac{\sin\varepsilon_4}{\tang\varepsilon_3} = \tang\beta_4 = \sqrt{\frac{C(e^2-hB)}{B(hC-e^2)}} \text{ und } \mathrm{tnc}'\,a = \tang\alpha_4 = \sqrt{\frac{C(e^2-hA)}{A(hC-e^2)}} \\ \mathrm{tn}'\,a = \cot\varepsilon_4 = \sqrt{\frac{A(C-B)}{C(B-A)}} \qquad \mathrm{dnc}'\,a = \cos\beta_4 = \sqrt{\frac{B(hC-e^2}{(C-B)e^2}} \\ k'\,\mathrm{sn}'\,a = \cos\varepsilon_3\cos\varepsilon_4 = \frac{\tang\beta_4}{\tang\alpha_4} = \sqrt{\frac{A(e^2-hB)}{B(e^2-hA)}} \quad k'\,\mathrm{snc}'\,a = \sin\beta_4 = \sqrt{\frac{C(e^2-hB)}{(C-B)e^2}} \\ \mathrm{dn}'\,a = \frac{\sin\varepsilon^4}{\sin\alpha^4} = \frac{\sin\varepsilon_3}{\cos\beta_4} = \sqrt{\frac{(B-A)e^2}{B(e^2-hA)}} \text{ ist.} \end{cases}$$

Stellt man sich (Fig. 3) mit (Fig. 4) zu einer einzigen Figur vereinigt vor, so kann man auch die in (Nr. 10) gefundenen Constructionen von $\frac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u$ und $\mathrm{am}\,u$ selbst mit hierherziehen. Die Verlängerung von $\boldsymbol{Z_1 N}$ über $\boldsymbol{Z_1}$ hinaus fällt dann in den Quadranten $H_0 Z_1 H_1$ und macht mit $\boldsymbol{Z_1 H_0}$ den Winkel $\frac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u$, welcher auch die excentrische Anomalie des Punctes $\boldsymbol{H}$ ist, indem sie zu einer ähnlichen Construction des Puncts $\boldsymbol{H}$ mittelst zweier concentrischer Kreise, deren Radien α_4 und β_4 sind, die Veranlassung giebt, wie früher die Constructionen der Puncte $\boldsymbol{R}$ und $\boldsymbol{G}$.

Der Punct $\boldsymbol{H}$, mit welchem der Kegelschnitt $\boldsymbol{H_0 H_1 H_2 H_3}$ am Ende der Zeit t den festen Aequator NHN^1 berührt, wurde durch die Tangenten der Axen-Coordinaten

$$x = -\sqrt{\frac{C(e^2-hA)}{A(hC-e^2}} \cdot \mathrm{snc}\,u = -\sqrt{\frac{C(e^2-hA)}{A(hC-e^2)}} \cdot \frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$$

$$y = -\sqrt{\frac{C(e^2-hB)}{B(hC-e^2)}} \cdot \mathrm{cnc}\,u = -\sqrt{\frac{C(e^2-hB)}{B(hC-e^2)}} \cdot \frac{k'\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\,.$$

bestimmt. Wir leiten hieraus erstens die Bestimmung der Grösse des Winkels her, welchen der Halbmesser $\boldsymbol{Z_1 H}$ mit der Halbaxe $\boldsymbol{Z_1 H_0}$ macht. Die Tangente dieses Winkels ist $\frac{y}{x}$; daher ergiebt sich

$$(1.)\quad \begin{cases} \tang H Z_1 H_0 = \sqrt{\frac{A(e^2-hB)}{B(e^2-hA)}} \cdot \frac{1}{\mathrm{tnc}\,u} = \sqrt{\frac{A\cdot(e^2-hB)}{B\cdot(e^2-hA)}} \cdot k'\,\mathrm{tn}\,u = k'^2\,\mathrm{sn}'\,a\,\mathrm{tn}\,u \\ \qquad\qquad = \cos^2\varepsilon\,\sin\varepsilon_4\,\mathrm{tn}\,u\,. \end{cases}$$

Ferner leiten wir daraus die zu den Axen OX_1, OY_1, OZ_1 parallelen Coordinaten des Berührungspuncts H her. Da nämlich $x = \frac{X}{Z}$ und $y = \frac{Y}{Z}$ ist, wenn man die gesuchten Coordinaten durch $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ bezeichnet, so können wir

$$X = -\frac{\sqrt{\left(\frac{e^2-hA}{A}\right)}\cdot \mathrm{cn}\,u}{H}\,,\quad Y = -\frac{\sqrt{\left(\frac{e^2-hB}{B}\right)}\cdot k'\,\mathrm{sn}u}{H} \text{ und } \boldsymbol{Z} = +\frac{\sqrt{\left(\frac{hC-e^2}{C}\right)}\cdot \mathrm{dn}u}{H},$$

setzen; und da $\boldsymbol{X_2 + Y_2 + Z_2 = 1}$ sein muss, so ergiebt sich

$$H^2 = \frac{e^2 - hA}{A} \cdot \mathrm{cn}^2 u + \frac{e^2 - hB}{B} \cdot k'^2 \mathrm{sn}^2 u + \frac{hC - e^2}{C} \cdot \mathrm{dn}^2 u.$$

Da endlich $\mathrm{dn}^2 u = \mathrm{cn}^2 u + k'^2 \mathrm{sn}^2 u$ ist, so erhalten wir nach einigen leichten Reductionen:

$$H = e\sqrt{\frac{C - A}{AC}} \cdot \sqrt{(1 - \mathrm{dn}'^2 a \, \mathrm{sn}^2 u)};$$

und wird dieses benutzt, so ergeben sich die Ausdrücke

$$(2.) \quad \begin{cases} X = \cos Hx_1 = \dfrac{-\,\mathrm{snc}'a \cdot \mathrm{cn}\,u}{\sqrt{(1 - \mathrm{dn}'^2 a \cdot \mathrm{sn}^2 u)}}, \\ Y = \cos Hy_1 = \dfrac{-\,k'^2 \mathrm{sn}'a \cdot \mathrm{snc}'a \cdot \mathrm{sn}\,u}{\sqrt{(1 - \mathrm{dn}'^2 a \cdot \mathrm{sn}^2 u)}}, \\ Z = \cos Hz_1 = \dfrac{+\,\mathrm{cnc}'a \cdot \mathrm{dn}\,u}{\sqrt{(1 - \mathrm{dn}'^2 a \cdot \mathrm{sn}^2 u)}}. \end{cases}$$

Will man nicht die Modular-Functionen in den Formeln haben, sondern statt ihrer die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r, so findet man durch ein dem vorigen ähnliches Verfahren die Formeln

$$(3.) \quad \begin{cases} X = \cos Hx_1 = \dfrac{-(e^2 - hA)p}{e \cdot U}, \\ Y = \cos Hy_1 = \dfrac{-(e^2 - hB)q}{e \cdot U}, \\ Z = \cos Hz_1 = +\dfrac{(hC - e^2)r}{e \cdot U}; \end{cases}$$

und in diesen Formeln ist der veränderliche Factor des Nenners

$$(4.) \quad U = \sqrt{[e^3(p^2 + q^2 + r^2) - h^2]} = \sqrt{[(B - A)^2 p^2 q^2 + (C - A)^2 p^2 r^2 + (C - B)^2 q^2 r^2]}.$$

Vergleicht man endlich diese Resultate mit den frühern, so findet sich die Relation

$$(5.) \qquad U = \sqrt{\frac{(e^2 - hA)(hC - e^2)}{AC}} \cdot \sqrt{(1 - \mathrm{dn}'^2 a \, \mathrm{sn}^2 u)}.$$

14.

Es ist in (No. 11) bewiesen worden, dass der schwankende Pol R zu jeder Zeit in der Normale GH enthalten sei, welche als solche auf den Berührungslinien der beiden Curven $G_0G_1G_2G_3$ und $H_0H_1H_2H_3$ in G und H senkrecht steht und die Länge eines Quadranten hat.

Aus den Coordinaten der Puncte G und H, und zumal aus den Ausdrücken derselben durch die Winkelgeschwindigkeiten, findet sich nun leicht der

Cosinus des Bogens GR, welcher das Complement des Bogens HR ist, nach der allgemeinen Formel

$$\cos GR = \cos Gx_1 \cos Rx_1 + \cos Gy_1 \cos Ry_1 + \cos Gz_1 \cos Rz_1 .$$

Hiernach ist

$$(1.) \qquad \begin{cases} \cos GR = \sin HR = \dfrac{h}{e\omega} , \\ \sin GR = \cos HR = \dfrac{U}{e\omega} , \\ \operatorname{tang} GR = \cot HR = \dfrac{U}{h} ; \end{cases}$$

und in diesen Formeln hat U dieselbe Bedeutung wie in (Nr. **13**.)

Da ferner ω die Winkelgeschwindigkeit des Körpers um die schwankende Axe $R'OR$ ist, so ist $\omega \cos GR$ eine Seitengeschwindigkeit derselben, nämlich die Winkelgeschwindigkeit um die feste Axe $G'OG$; und da $\omega . \cos GR = \frac{h}{e}$ ist, so ist die Winkelgeschwindigkeit um die feste Axe $G'OG$ von unveränderlicher Grösse, nämlich $= \frac{h}{e}$.

Vermöge dieser Winkelgeschwindigkeit $\frac{h}{e}$ um den Punct G hat der Berührungs-Punct H eine gleichförmige Bewegung in dem Hauptkreise oder auf dem festen Aequator NHN', wodurch am Ende der Zeit t ein Hauptbogen beschrieben worden ist, dessen Länge $= \frac{h}{e} . t$ ist.

Ist nun U derjenige Punct des Hauptkreises in der Ebene des Hauptmoments e, oder derjenige Punct des festen Aequators, welcher von dem Kegelschnitte $H_0H_1H_2H_3$ zur Zeit $t = 0$ berührt wurde, indem der Scheitel H_0 damals in U war, so würde der Hauptbogen UH dem Bogen H_0H der Ellipse gleich sein, wenn sich der Körper auf dem festen Aequator mit der genannten Ellipse nur wälzte; aber wegen der vorhin erwähnten constanten Winkelgeschwindigkeit um die auf dem Aequator senkrechte Axe $G'OG$ wird UH länger als H_0H sein, so dass

$$(2.) \quad UH - H_0H = \frac{h}{e} . t .$$

Wird hierin für H_0H der in (Nr. **12**) angegebene Werth substituirt, so erhält man

$$(3.) \quad UH = \frac{h}{e} . t + {}'C(u, a) .$$

Da der Punct U ein genau bestimmter Punct im festen Aequator NHN' ist, so kann man UH als die sphärische Abscisse des schwankenden Poles R ansehen; die dazu gehörige senkrechte Applicate dieses Poles R ist dann der Hauptbogen HR, dessen Länge oben bestimmt wurde. Es scheint aber angemessener zu sein, die Lage des schwankenden Poles R durch Spiral-Coordinaten in Beziehung auf den festen Pol G zu bestimmen. Da der Bogen UH aber dem Winkel RGU gleich ist, so ist auch, wenn dieser Winkel durch R bezeichnet wird,

$$(4.)\quad \begin{cases} R = \frac{h}{e} \,.\, t + {}'C(u, a) \,. \\ \text{Wird nun ausserdem der sph. Leitstrahl } GR \text{ durch } \varsigma \text{ bezeichnet, so ist noch} \\ \operatorname{tang} \varrho = \sqrt{\frac{(e^2 - hA)(hC - e^2)}{ACh^2}} \,.\, \sqrt{(1 - \mathrm{dn}'^2 a \, \mathrm{sn}^2 u)} \,. \end{cases}$$

Könnte man aus diesen beiden Gleichungen $u = nt$ eliminiren, so würde man eine Gleichung erhalten zwischen dem Leitstrahle $GR = \varrho$ und dem veränderlichen Winkel $UGR = R$, welchen die Richtung des Leitstrahles ϱ mit seiner anfänglichen, völlig bestimmten Richtung GU macht. Durch diese Gleichung würde die Bahn des schwankenden Poles R um den festen Pol G herum characterisirt. Diese Elimination ist zwar allerdings nicht wohl ausführbar, aber aus den entsprechenden Differential-Gleichungen kann u eliminirt werden, wodurch man eine Differential-Gleichung von der Form $\partial R = f(\varrho) . \partial \varrho$ erhält, wenn $f(\varrho)$ eine algebraische Function von $\cos \varrho$ bezeichnet. Die Kenntniss einer solchen Differential-Gleichung reicht aber glücklicherweise zur weiteren Untersuchung der Curve und auch der reciproken Curve vollkommen hin. Im Folgenden werden noch mehrere sphärische Curven nachgewiesen, deren Gleichungen alle von ähnlicher Art sind, so dass von ihren Differential-Gleichungen dieselbe Bemerkung gilt. Eine ausführliche Behandlung dieser Curven würde aber für diese Abhandlung zu weitläufig sein.

Setzt man in der obigen Gleichung nur ϱ selbst statt $\operatorname{tang} \varrho$, so erhält man die Gleichung der Central-Projection der Ortscurve des Puncts R auf eine Ebene, von welcher die Kugelfläche in G berührt wird, und die also parallel ist zur Ebene des festen Aequators. Das Centrum der Projection ist der Mittelpunct der Kugel, und als Längeneinheit dient der Radius der Kugel.

Bezeichnet man durch ϱ_0 die anfängliche Länge des sphärischen Leitstrahls ϱ, d. h. seine Länge für $t = 0$, so hat man

$$\operatorname{tang} \varrho_0 = \sqrt{\frac{(e^2 - hA)(hC - e^2)}{h^2 \cdot AC}}, \text{ und gleichzeitig } R_0 = 0.$$

Bezeichnet man durch ϱ_1 die Länge des sphärischen Leitstrahls ϱ für $t = T$, so hat man

$$\operatorname{tang}\varrho_1 = \sqrt{\frac{(e^2 - hB)(hC - e^2)}{h^2 \cdot BC}}, \text{ und gleichzeitig } R_1 = \frac{h}{e}T + {}'C(K, a),$$

und mit Benutzung dieser Werthe lässt sich die allgemeine Formel auch also darstellen:

$$(5.) \qquad \operatorname{tang}\varrho = \sqrt{(\operatorname{tang}^2\varrho_0 \cdot \operatorname{cn}^2 u + \operatorname{tang}^2\varrho_1 \cdot \operatorname{sn}^2 u)}.$$

Sie dient nun, in Verbindung mit der frühern Formel (4) für R, dazu, die Lage des schwankenden Poles für jede beliebige Zeit t zu bestimmen. Man findet aber $\operatorname{tang}^2\varrho_0 - \operatorname{tang}^2\varrho_1 = \frac{e^2}{h^2} \cdot \frac{(B-A)(hC-e^2)}{ABC} = \frac{e^2}{h^2} \cdot \frac{(A-B)(e^2-hC)}{ABC}$, und hieraus folgt, dass immer $\operatorname{tang}\varrho_0 > \operatorname{tang}\varrho_1$ mithin auch $\varrho_0 > \varrho_1$ ist, es mag $A > B > C$, oder umgekehrt $A < B < C$ sein. In dem besonderen Falle, in welchem $A = B$ ist, wird der Leitstrahl

$$\varrho = \varrho_0 = \varrho_1;$$

d. h. der schwankende Pol R beschreibt dann einen Kreis mit dem sphärischen Radius $\varrho = \operatorname{arc\,tang}\left(\sqrt{\frac{(e^2 - hA)(hC - e^2)}{h^2 AC}}\right)$ um den festen Pol G herum.

Ist $e^2 = hC$, so hört der Pol R auf, schwankend zu sein; er fällt dann beständig mit dem festen Pole G zusammen.

Ist $e^2 = hB$, so wird $\varrho_1 = 0$ und also $\operatorname{tang}\varrho = \operatorname{tang}\varrho_0 \cdot \operatorname{cn} u$.

Im Allgemeinen ist ϱ_0 das Maximum und ϱ_1 das Minimum des Leitstrahls ϱ, und die vom schwankenden Pole beschriebene Curve selbst hat viele Aehnlichkeit mit derjenigen, welche von einem sphärischen Pendel beschrieben wird; sie läuft nur dann in sich zurück, wenn der für R_1 angegebene Werth mit der *Ludolphi*'schen Zahl commensurabel ist, obgleich sie immer zwischen den mit den Radien ϱ_0 und ϱ_1 aus dem festen Pole G beschriebenen Kreisen enthalten ist und diese abwechselnd berührt. Da sich der Pol R im Allgemeinen dem festen Pole G abwechselnd nähert und wieder von ihm entfernt, so haben wir ihn gerade wegen dieser Form seiner Bewegung den *schwankenden* Pol genannt. Näherungsweise mag seine Bahn unter gewissen Umständen ein sphärischer Kegelschnitt sein; streng genommen ist sie aber wohl nie eine sphärische Ellipse.

15.

Nun hält es nicht mehr schwer, auch die Lage der drei Hauptaxen Ox_1, Oy_1, Oz_1 des Körpers in Beziehung auf den festen Aequator und den

festen Pol zu finden; es reicht hin, die Lage der sphärischen Puncte x_1, y_1, z_1 für jede Zeit t bestimmen zu können. Wir wollen zunächst die drei Grössen NU, NX_1^1 und den Winkel N suchen.

Die Berührungslinie HN des Kegelschnitts $H_0H_1H_2H_3$ schneidet die Cardinale X_1Y_1 in einem Puncte N; und sind wieder x und y die Tangenten der Axencoordinaten des Berührungspuncts in einer beliebigen Curve, so ist nach der analytischen Sphärik im vorliegenden Falle

$$\text{tang}\, HN = -\frac{\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2 + (y\partial x - x\partial y)^2)}}{x\partial x + y\partial y}.$$

Setzt man für den Augenblick wieder $\frac{1}{2}\pi - \text{amc}\, u = \psi$ und $\text{tang}\, \alpha_4 = a$, $\text{tang}\, \beta_4 = b$, also $x = -a\cos\psi$, $y = -b\sin\psi$, so findet sich

$$\text{tang}\, HN = \frac{\sqrt{(a^2b^2 + a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi)}}{(a^2-b^2)\sin\psi\cos\psi}.$$

Da aber $\sin^2\varepsilon_4 = \frac{a^2-b^2}{1+a^2}$, $\text{tang}^2\varepsilon_4 = \frac{a^2-b^2}{1+b^2}$, $\sin^2\varepsilon_3 = \frac{a^2-b^2}{a^2+a^2b^2}$, so erhält man $HN = \frac{\text{tn}'a}{\text{dn}'a\,\text{su}\,u\,\text{snc}\,u}$, und also

$$(1.) \qquad HN = \tfrac{1}{2}\pi - \text{arc tang}\left(\frac{\text{dn}'a}{\text{tn}'a}\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u\right).$$

Wird hiervon der Ausdruck $Uh = \frac{h}{e}t + {}'C(u, a)$ subtrahirt, so erhält man

$$NU = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{h}{e}t - {}'C(u, a) - \text{arc tang}\left(\frac{\text{dn}'a}{\text{tn}'a}\cdot \text{sn}\,u\,\text{snc}\,u\right),$$

und da nach (§. 133) der Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale ${}'C(u, a) + \text{arc tang}\left(\frac{\text{dn}'a}{\text{tn}'a}\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u\right) = D(u, K'-a)$ ist, so reducirt sich die Formel noch auf

$$(2.) \qquad NU = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{h}{e}.t - D(u, K'-a),$$

Zieht man vom festen Pole G aus durch die drei Ecken X_1, Y_1, Z_1 die drei Radien $G\alpha$, $G\beta$ und $G\gamma$ nach dem Aequator, so stehen sie auf ihm senkrecht und sind Quadranten; daher zeigen sich $U\alpha$, $U\beta$, $U\gamma$ als die sphärischen Abscissen der Puncte X_1, Y_1, Z_1 in Beziehung auf den genau bestimmten Anfangspunct U, und es ist zunächst

$$H\gamma = \text{arc tang}\left(\frac{\text{dn}'a}{\text{tn}'a}\,\text{sn}\,u\,\text{snc}\,u\right), \quad \text{also}$$

$$(3.) \qquad U\gamma = \frac{ht}{e} + {}'C(u, a) + H\gamma = \frac{ht}{e} + D(u, K'-a)$$

Ferner ist der Winkel N = Bogen Gz, und da $\cos Hz_1 = \frac{Cr}{e}$, so ist auch $\cos N = \frac{C}{e} . r = \sqrt{\frac{(e^2 - hA) \cdot C}{(C-A) \cdot e^2}} . \mathrm{dn}\, u$ oder

(4.) $$\cos N = \sin \alpha_4 . \mathrm{dn}\, u = \mathrm{snc}' a . \mathrm{dn}\, u.$$

Da der Bogen NX_1^1 = Winkel $H_3 Z_1 G$ in (Fig. 4) = Winkel $G_1 Z_1 G$ in (Fig. 3), und nach (No. 10) die Tangente dieses Winkels $= \sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}} \cdot \frac{1}{\mathrm{tn}\, u}$ ist, so ist auch $\mathrm{tang}\, NX_1^1 = \sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}} \cdot \frac{1}{\mathrm{tn}\, u}$, oder

(5.) $$\mathrm{tang}\, NX_1^1 = \frac{\cos \varepsilon_4}{\mathrm{tn}\, u} = \frac{\mathrm{sn}\, a}{\mathrm{tn}\, u}.$$

Da weiter $\mathrm{tg}\, N\beta = \mathrm{tg}\, NY_1 . \cos N = \frac{\cos N}{\mathrm{tang}\, NX_1^1}$ ist, so ist $\mathrm{tang} N\beta = \frac{\mathrm{tn}\, u\, \mathrm{dn}\, u}{\mathrm{tn}' a\, \mathrm{dn}' a}$ $= \frac{\mathrm{snc}' a}{\mathrm{sn}' a} \cdot \frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{snc}\, u}$, also

$$N\beta = \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{snc}' a}{\mathrm{sn}' a} \cdot \frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{snc}\, u}\right), \text{ mithin } U\beta = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{h}{e} t - D(u, K' - a) + \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{snc}' a}{\mathrm{sn}' a} \cdot \frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{snc}\, u}\right),$$

und da nach (§. 133) der Theorie der Modular-Functionen auch $D(u, K' - a)$ $- \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{snc}' a}{\mathrm{sn}' a} \cdot \frac{\mathrm{sn}\, u}{\mathrm{snc}\, u}\right) = - \,'S(u, K' - a)$ ist, so ist

(6.) $$U\beta = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{h}{e} t + \,'S(u,\ K' - a).$$

Weiter ist $\mathrm{tg}\, N'\alpha\, \mathrm{tg}\, N' X_1 \cos N' = \mathrm{tang}\, NX_1^1 \cos N = \mathrm{sn}\, a\, \mathrm{snc}' a \frac{\mathrm{dn}\, u}{\mathrm{tn}\, u}$, also $N'\alpha = \mathrm{arc\,tang}\left(\mathrm{sn}\, a\, \mathrm{snc}' a . \frac{\mathrm{dn}\, u}{\mathrm{tn}\, u}\right)$ und $UN' = \pi - UN = \tfrac{1}{2}\pi + \frac{ht}{e} + D(u, K' - a)$, mithin

$$U\alpha = \tfrac{1}{2}\pi + \frac{ht}{e} + D(u, K' - a) + \mathrm{arc\,tang}\left(\mathrm{sn}' a\, \mathrm{snc}' a . \frac{\mathrm{dn}\, u}{\mathrm{tn}\, u}\right),$$

oder $$U\alpha = \pi + \frac{ht}{e} + D(u, K' - a) - \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\, u}{\mathrm{sn}' a\, \mathrm{snc}' a\, \mathrm{dn}\, u}\right),$$

und da nach (§. 129) der Theorie der Modular-Functionen

$$D(u, K' - a)\, \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\, u}{\mathrm{sn}' a\, \mathrm{snc}' a\, \mathrm{dn}\, u}\right) = - C(u, a)$$

ist, so reducirt sich die vorige Formel auf

(7.) $$U\alpha = \pi + \frac{ht}{e} - C(u, a).$$

Da ferner $\cos G y_1 = \frac{Bq}{e}$ und $\cos G x_1 = \frac{Ap}{e}$ ist, so ist $\cos G y_1 = \sqrt{\frac{B(hC - e^2)}{(C-B) e^2}} \cdot \mathrm{sn}\, u$

und $\cos Gx_1 = \sqrt{\frac{A(hC-e^2)}{(C-A)e^2}} \cdot \mathrm{cn}\,u$. Da ausserdem $Gz_1 = N$ ist, so ergeben sich die drei Formeln

$$(8.)\quad \begin{cases} \cos Gx_1 = \cos\alpha_4 \,\mathrm{cn}\,u = \mathrm{cnc}'a \,.\, \mathrm{cn}\,u\,, \\ \cos Gy_1 = \cos\beta_4 \,\mathrm{sn}\,u = \mathrm{dnc}'a \,.\, \mathrm{sn}\,u\,, \\ \cos Gz_1 = \sin\alpha_4 \,\mathrm{dn}\,u = \mathrm{snc}'a \,.\, \mathrm{dn}\,u\,; \end{cases}$$

und da die Winkel

$$(9.)\quad \begin{cases} UGx_1 = U\alpha = \pi + \frac{ht}{e} - C(u, a)\,, \\ UGy_1 = U\beta = \frac{1}{2}\pi + \frac{ht}{e} - 'S(u, K'-a), \\ UGz_1 = U\gamma = \frac{ht}{e} + D(u, K'-a)\,, \end{cases}$$

sind, so sind auch für jeden der drei Puncte x_1, y_1, z_1 die beiden Spiral-Coordinaten bekannt, und es kann hiernach die Lage eines jeden Puncts für jede beliebige Zeit t in Ansehung des festen Poles G und der ersten Richtung GU bestimmt werden.

16.

Vollendet man noch das dreirechtwinckelige Coordinaten-Dreieck UVG, indem man auf dem festen Aequator NUN', vom festen Puncte U aus, den Quadranten UV abschneidet und GV zieht, welches ebenfalls ein Quadrant sein wird, und stellt man sich drei im Raume feste Coordinaten-Axen Ox, Oy, Oz, ebenfalls vom Schwerpuncte O aus so gezogen vor, dass die Axe

$$(1.)\quad \begin{cases} Ox \text{ durch den sphärischen Anfangspunct } U, \\ Oy \text{ durch den so eben construirten Punct } V, \\ Oz \text{ durch den festen Pol } G \text{ geht,} \end{cases}$$

oder auch X einerlei ist mit U, Y mit V und Z mit G. Sind ferner x, y, z die drei, diesen Axen parallelen Coordinaten eines beliebigen Puncts M des Körpers, hingegen x_1, y_1, z_1 die drei den frühern Axen Ox_1, Oy_1, Oz parallelen Coordinaten desselben Puncts M, so ist bekanntlich, wenn man zur Abkürzung

$$(2.)\quad \begin{cases} \cos XOX_1 = a_1\,, & \cos XOY_1 = b_1\,, & \cos XOZ_1 = c_1\,, \\ \cos YOX_1 = a_2\,, & \cos YOY_1 = b_2\,, & \cos YOZ_1 = c_2\,, \\ \cos ZOX_1 = a_3\,, & \cos ZOY_1 = b_3\,, & \cos ZOZ_1 = c_3 \end{cases}$$

setzt, erstens:

$$(3.)\quad \begin{cases} x = a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1\,, \\ y = a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1\,, \\ z = a_3x_1 + b_3y_1 + c_3z_1\,; \end{cases}$$

und hiernach wird man aus den drei unveränderlichen Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Puncts M im Körper die Werthe der drei veränderlichen Coordinaten x, y, z desselben Puncts M für jede beliebige Zeit t berechnen können, falls nur die Coefficienten a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 als Functionen der Zeit t dargestellt worden sind.

Rückwärts hat man dann aber auch

$$(4.)\qquad \begin{cases} x_1 = a_1 x + a_2 y + a_3 z\,, \\ y_1 = b_1 x + b_2 y + b_3 z\,, \\ z_1 = c_1 x + c_2 y + c_3 z\,; \end{cases}$$

und hiernach wird man aus den nach irgend einer Zeit t gemessenen oder doch bekannten Coordinaten x, y, z eines Puncts M die Lage dieses Puncts im Körper in Beziehung auf seine drei Hauptaxen bestimmen können, deren Grösse von der Statt gehabten Bewegung ganz unabhängig ist.

Um aber die Coefficienten (2) als Functionen der Zeit darzustellen, drücken wir sie sämmtlich durch drei Grössen φ, ϑ und ψ aus, welche sich als Functionen der Zeit darstellen lassen. Wir wählen dazu im Grunde dieselben drei Grössen, welche im (§. 378) der Uebersetzung des Lehrbuchs der Mechanik von *Poisson* angenommen, aber nicht bestimmt worden sind, nämlich:

$$(5.)\qquad \begin{cases} \psi = Nx = NU = \frac{1}{2}\pi - \frac{h}{e}.\,t - D(u, K' - a)\,, \\ \vartheta = UNX_1 = N = \arccos(\mathrm{snc}'a\,.\,\mathrm{dn}\,u)\,, \\ \varphi = NX_1^1 \quad = \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{tn}\,u}\right); \end{cases}$$

nur mit dem Unterschiede, dass wir nicht mit *Poisson* den Bogen NX_1, sondern den Bogen $NX_1^1 = \varphi$ gesetzt haben, damit unser φ in dem Anfange der Bewegung, und überhaupt dann, wenn t zwischen den Grenzen Null und T enthalten ist, nicht grösser als ein Halbkreis sei. Setzt man wegen der angezeigten Abänderung in den Formeln von *Poisson* $\pi + \varphi$ statt φ, so werden sie sich auf die gegenwärtige Annahme beziehen. Sie sind dann:

$$(6.)\qquad \begin{cases} a_1 = \cos x x_1 = \cos U x_1 = -\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta\,, \\ b_1 = \cos x y_1 = \cos U y_1 = +\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\varphi\cos\vartheta\,, \\ c_1 = \cos x z_1 = \cos U z_1 = +\sin\psi\sin\vartheta\,, \\ a_2 = \cos y x_1 = \cos V x_1 = +\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta\,, \\ b_2 = \cos y y_1 = \cos V y_1 = -\sin\varphi\sin\psi - \cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta\,, \\ c_2 = \cos y z_1 = \cos V z_1 = +\cos\psi\sin\vartheta\,, \\ a_3 = \cos z x_1 = \cos G x_1 = +\sin\varphi\sin\vartheta\,, \\ b_3 = \cos z y_1 = \cos G y_1 = +\cos\varphi\sin\vartheta\,, \\ c_3 = \cos z z_1 = \cos G z_1 = +\cos\vartheta\,. \end{cases}$$

Man kann auch die Bedeutung der ursprünglich aus der Zeit t zu berechnenden Grössen ψ, ϑ und φ wie folgt angeben. Es ist

$$(7.)\quad \begin{cases} \psi = \text{Winkel } Z_1 G V = \frac{1}{2}\pi - \frac{h}{t}.\, t - D(u, k'-a), \\ \vartheta = \text{Bogen } G Z_1 = \arccos(\text{snc}'a \,.\, \text{dn}\, u), \\ \varphi = \text{Winkel } G Z_1 Y_1 = \text{arc tang}\left(\frac{\text{sn}'a}{\text{tn}\, u}\right); \end{cases}$$

und durch Anwendung dieser Ausdrucke wird sich nach den berechneten Werthen von ψ, ϑ und φ die Lage der drei Puncte X_1, Y_1, Z_1 in Beziehung auf das Coordinaten-Dreieck UVZ oder XYZ noch bequemer bestimmen lassen, als durch die anfänglichen Formeln (5).

17.

Schliesslich fügen wir noch hinzu, dass der Winkel NMX_1^1, unter welchem der feste Aequator von der Axe $X_1 Z_1 X_1^1$ geschnitten wird, gleich ist dem Bogen GY_1, und der Winkel $Y_1^1 L N^1$, unter welchem derselbe Aequator von der Axe $Y_1 Z_1 Y_1^1$ geschnitten wird, gleich dem Bogen ZX_1. Bezeichnen wir diese Winkel also durch M und N, so ergeben sich, ähnlich der Formel $\cos N = \text{snc}'a.\text{dn}\, u$, auch noch die Formeln $\cos M = \text{dnc}'a \,.\, \text{sn}\, u$ und $\cos L = \text{cnc}'a \,.\, \text{cn}\, u$. Ferner folgt aus der Gleichung des Kegelschnitts $\frac{x^2}{\text{tang}^2 \alpha_4} + \frac{y^2}{\text{tang}^2 \beta_4} = 1$ die Gleichung der Berührungslinie $\frac{xx^1}{\text{tang}^2 \alpha_4} + \frac{yy^1}{\text{tang}^2 \beta_4} = 1$, und setzt man hierin, um die Puncte M und L zu bestimmen, $y' = 0$ und $x' = -\text{tang}\, Z_1 M$, ferner $x' = 0$ und $y' = -\text{tang}\, Z_1 L$, so erhält man $\text{tang}\, Z_1 M = -\frac{\text{tang}^2 \alpha_4}{x}$ und $\text{tg} Z_1 L = -\frac{\text{tg}^2 \beta_4}{y}$. Werden hierin die auf den Berührungspunct H passenden Werthe $x = -\text{tang}\, \alpha_4 \,.\, \text{snc}\, u$ und $y = -\text{tang}\, \beta_4 \,.\, \text{cnc}\, u$ substituirt, so ergeben sich, coordinirt der Formel $\text{tang}\, \varphi = \frac{\text{sn}'a}{\text{tn}\, u}$, noch die beiden Ausdrücke

$$(1.)\quad \text{tang}\, Z_1 M = \frac{\text{tang}\, \alpha_4}{\text{snc}\, u} = \frac{\text{tnc}'a}{\text{snc}\, u} \text{ und } \text{tang}\, Z_1 L = \frac{\text{tang}\, \beta_4}{\text{cnc}\, u} = \frac{k'}{k} \cdot \frac{\text{cn}'a}{\text{cnc}\, u}.$$

Da ferner $M\beta = \frac{1}{2}\pi$, also $MN = \frac{1}{2}\pi - N\beta = \frac{1}{2}\pi - \text{arc tang}\left(\frac{\text{snc}'a}{\text{sn}'a} \cdot \frac{\text{sn}\, u}{\text{snc}\, u}\right)$ und $UN = \frac{1}{2}\pi - \frac{h}{e}t - D(u, K'-a)$ ist, so findet sich $UM = NM - NU = \frac{h}{e}t + D(u, K'-a) - \text{arc tang}\left(\frac{\text{snc}'a}{\text{sn}'a} \cdot \frac{\text{sn}\, u}{\text{snc}\, u}\right)$, d. h.

$$(2.) \qquad UM = \frac{h}{e} \cdot t - {}'S(u, K' - a)$$

Am leichtesten findet sich die Länge von UL. Da nämlich $UL = U\alpha - L\alpha$ und $L\alpha = \frac{1}{2}\pi$ ist, so ist

$$(3.) \qquad UL = \tfrac{1}{2}\pi + \frac{ht}{e} - C(u, a).$$

Diese Formeln bestimmen, in Verbindung mit $UN = \frac{1}{2}\pi - \frac{h}{e}t - D(u, K'-a)$, die drei Puncte L, M, N des festen Aequators, in welchen er von den durch die Hauptaxen des Körpers gehenden drei Ebenen Y_1Z_1, X_1Z_1 und X_1Y_1 geschnitten wird; und da die Winkel L, M, N vorhin gefunden wurden, so ist jetzt auch die Lage dieser drei Ebenen gegen den festen Aequator bestimmt.

18.

Nachdem in Beziehung auf den festen Pol G und den zugehörigen festen Aequator die Lage des schwankenden Poles, die Lage der drei Hauptaxen des Körpers, so wie die Lage der Ebenen, welche durch sie paarweise hindurch gelegt sind, und selbst die Lage eines beliebigen Puncts im Körper für das Ende der Zeit t bestimmt worden sind; auch ausserdem noch die Lage des Puncts H angegeben ist, in welchem der mit dem Körper verbundene Kegelschnitt $H_0H_1H_2H_3$, welcher sich auf dem festen Aequator wälzt, diesen am Ende der Zeit t berührt: so betrachten wir jetzt noch die Bewegung des Körpers in Beziehung auf den schwankenden Pol und den damit in Verbindung stehenden, zwar schwankenden, aber sich nicht drehenden Aequator.

Die Gleichung dieses Aequators ist bereits in (No. 9) angegeben worden, und es wurde schon erwähnt, dass bei der Bewegung des Körpers dieser Aequator immer von einem Kegelschnitte berührt werde, welcher mit dem in (No. 9) betrachteten Kegelschnitte durch das Reciprocitätsgesetz verbunden ist. Aus den daselbst angegebenen Tangenten der Axen-Coordinaten

$$x = \operatorname{tang}\beta_1 \,.\, \operatorname{snc} u \text{ und } y = \operatorname{tang}\alpha_1 \,.\, \operatorname{cnc} u$$

des schwankenden Pols finden sich leicht die des zugehörigen reciproken Puncts S in (Fig. 5):

$$(1.) \qquad x = -\sqrt{\frac{A(e^2 - hA)}{C(hC - e^2)}} \cdot \operatorname{snc} u \text{ und } y = -\sqrt{\frac{B(e^2 - hB)}{C(hC - e^2)}} \cdot \operatorname{cnc} u.$$

Setzt man

$$(2.)\begin{cases}\tan\alpha_2 = \sqrt{\frac{A(e^2-hA)}{C(hC-e^2)}} \text{ und } \tan\beta_2 = \sqrt{\frac{B(e^2-hB)}{C(hC-e^2)}}, \text{ also auch}\\ \sin\alpha_2 = \sqrt{\frac{A(e^2-hA)}{(C-A)(hA+hC-e^2)}}, \ \sin\beta_2 = \sqrt{\frac{B(e^2-hB)}{(C-B)(hB+hC-e^2)}},\\ \cos\alpha_2 = \sqrt{\frac{C(hC-e^2)}{(C-A)(hA+hC-e^2)}}, \ \cos\beta^2 = \sqrt{\frac{C(hC-e^2)}{(C-B)(hB+hC-e^2)}},\end{cases}$$

so verwandeln sich die Gleichungen (1) in

$$(3.)\quad x = -\tan\alpha_2 \cdot \operatorname{snc} u \text{ und } y = -\tan\beta_2 \cdot \operatorname{cnc} u;$$

und hieraus folgt die Gleichung $\frac{x^2}{\tan^2\alpha^2} + \frac{y^2}{\tan^2\beta} = 1$, welche die des Kegelschnitts $S_0S_1S_2S_3$ in (Fig. 5) ist, deren grosse Halbaxe $Z_1S_0 = Z_1S_2 = \alpha_2$ und deren kleine Halbaxe $Z_1S_1 = Z_1S_3 = \beta_2$ ist. Sind D und D' die Brennpuncte dieses Kegelschnitts, und setzt man die Excentricität desselben $Z_1D = Z_1D' = \varepsilon_2$, so giebt der Ausdruck $\frac{\cos\alpha^2}{\cos\beta^2} = \cos\varepsilon_2$ die Formeln

$$(4.)\qquad \begin{cases}\cos\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{(C-B)(hB+hC-e^2)}{(C-A)(hA+hC-e^2)}},\\ \sin\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{(B-A)(hA+hB-e^2)}{(C-A)(hA+hC-e^2)}},\\ \tan\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{(B-A)(hA+hB-e^2)}{(C-B)(hB+hC-e^2)}}.\end{cases}$$

Uebrigens ist noch $\alpha_2+\beta_1 = \frac{1}{2}\pi$ und $\beta_2+\alpha_1 = \frac{1}{2}\pi$, und nach (§. 84) der analytischen Sphärik ist ausserdem $\tan\varepsilon_1 = \frac{\sin\varepsilon_2}{\tan\beta_2}$; $\sin\varepsilon_1 = \frac{\tan\varepsilon_2}{\tan\alpha_2}$; $\cos\varepsilon_1 = \frac{\sin b_2}{\sin a_2}$, $\frac{\sin\varepsilon_2}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin\varepsilon_1}{\cos\beta_2} = \frac{\sin\varepsilon_1}{\sin\alpha_1}$.

Den Formeln (3) gemäss ist für $t = 0$ der Berührungspunct des Kegelschnitts mit dem schwankenden Aequator F_3SF_3' der Scheitel S_0; für $t = T$ kommt damit der Scheitel S_1 in Berührung, für $t = 2T$ der Scheitel S_2, für $t = 3T$ der Scheitel S_3 und für $t = 4T$ endlich wieder der Scheitel S_0.

Verbindet man den schwankenden Pol R mit seinem reciproken Puncte S durch den Hauptbogen RS, so hat dieser die Länge eines Quadranten und ist die gemeinschaftliche Normale der beiden Curven $S_0S_1S_2S_3$ und $R_0R_1R_2R_3$; d. h. er macht rechte Winkel mit den Berührungslinien derselben in R und S. Als Gleichung dieser Normale findet man leicht

$$(5.)\ \frac{(C-B)(hB+hC-e^2)}{p}\cdot\cos Mx_1 - \frac{(C-A)(hA+hC-e^2)}{q}\cos My_1 + \frac{(B-A)(hA+hB-e^2)}{r}\cos Mz_1 = 0,$$

wenn M einen beliebigen Punct dieses Hauptkreises bezeichnet.

Diese Normale ist im Allgemeinen verschieden von der Normale GRH, welche mit ihr den Punct R gemein hat, und deren Gleichung (4) in (No. 11) angegeben wurde. Es fallen aber die beiden Normalen in eine einzige zusammen, wenn zwei von den drei Trägheitsmomenten einander gleich sind, also wenn der Körper ein Rotationskörper ist. In einem solchen Falle befinden sich die vier Puncte G, H, R, S in demselben Hauptkreise, und die vier geraden Linien OG, OH, OR, OS befinden sich dann also zu jeder Zeit in derselben Ebene.

19.

Rectificirt man den Bogen $S_0S = s$ des Kegelschnitts $S_0S_1S_2S_3$, welcher Bogen während der Zeit t mit dem schwankenden Aequator ES in (Fig. 5.) in Berührung gekommen ist, so findet sich die ziemlich einfache Formel

(1.) $$S_0S = {}'C(\varphi,\ b)\ ,$$

in welcher die Functionen des Arguments φ sich wieder auf den Modul $\lambda = \sin\varepsilon_1$, also die des Parameters b auf den Modul $\lambda^1 = \cos\varepsilon_1$ beziehen. Ferner ist wieder

$$\tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,\varphi = \tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,u\ ,$$

oder

(2.) $$\mathrm{amc}\,\varphi = \mathrm{amc}\,u\ ,$$

so dass die Formeln (3) in (No. 18) auch also dargestellt werden können:

(3.) $$x = -\tan g\,\alpha_2 . \mathrm{snc}\,\varphi \text{ und } y = -\tan g\,\beta_2 . \mathrm{enc}\,\varphi\ .$$

Es ist wieder $\frac{1}{2}\pi - \mathrm{amc}\,\varphi$ die excentrische Anomalie der beiden Puncte S und R, woraus durch die in (No. 9) angegebene Construction $\mathrm{am}\varphi$ gefunden wird, wenn man sich (Fig. 2) mit (Fig. 5) zu einer einzigen vereinigt vorstellt. Der Parameter b des gefundenen Integrals wird aber durch die Formeln

(4.)
$$\begin{cases}
\mathrm{sn}'\,b = \cos\varepsilon_2 = \sqrt{\dfrac{(C-B)(hB+hC-e^2)}{(C-A)(hA+hC-e^2)}},\ \mathrm{snc}'\,b = \sin\alpha_2 = \sqrt{\dfrac{A(e^2-hA)}{(C-A)(hA+hC-e^2)}}\ ,\\
\mathrm{cn}'\,b = \sin\varepsilon_2 = \sqrt{\dfrac{(B-A)(hA+hB-e^2)}{(C-A)(hA+hC-e^2)}}\ ,\ \ \mathrm{cnc}'\,b = \cos\alpha_2 = \sqrt{\dfrac{C(hC-e^2)}{(C-A)(hA+hC-e^2)}}\ ,\\
\mathrm{tn}'\,b = \cot\varepsilon_2 = \sqrt{\dfrac{(C-B)(hB+hC-e^2)}{(B-A)(hA+hB-e^2)}}\ ,\ \ \mathrm{tnc}'\,b = \tan g\,\alpha_2 = \sqrt{\dfrac{A(e^2-hA)}{C(hC-e^2)}}\ ,\\
\mathrm{dn}'\,b = \dfrac{\sin\varepsilon_2}{\sin\alpha_2} = \dfrac{\sin\varepsilon_1}{\cos\beta_2} = \sqrt{\dfrac{(B-A)(hA+hB-e^2)}{A(e^2-hA)}}\ ,\ \ \mathrm{dnc}'\,b = \cos\beta_2 = \sqrt{\dfrac{C(hC-e_2)}{(C-B)(hB+hC-e^2)}}\ ;
\end{cases}$$

$\lambda' sn'\,b = \sqrt{\dfrac{B(e^2-hB)}{A(e^2-hA)}}$ bestimmt, so dass auch

(5.) $$\mathrm{am}'\,b = \tfrac{1}{2}\pi - \varepsilon_2\ ,\ \text{und}\ \ \mathrm{amc}'\,b = \alpha_2 \text{ ist.}$$

Wird der Hauptbogen RZ_1 bis zum Einschnitte γ^1 in die Tangente ES verlängert, so findet man auch auf ähnliche Art, wie zu Anfange von (No. 15), die Formel

$$(6.) \qquad S\gamma^1 = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{dn}'b}{\mathrm{tn}'b}\,\mathrm{sn}\,c\,\mathrm{snc}\,c\right).$$

20.

Es sollen nun, ehe wir weiter gehen, die zu den Axen Ox_1, Oy_1, Oz_1 parallelen Coordinaten des Berührungs-Puncts S hergeleitet werden; als Functionen von c betrachtet. Setzt man in den Formeln (3) von (No. 19) $x = \frac{X}{Z}$ und $y = \frac{Y}{Z}$, so geben sie

$$\frac{X}{Z} = -\sqrt{\frac{A(e^2-hA)}{C(hC-e^2)}}\cdot\frac{\mathrm{cn}\,v}{\mathrm{dn}\,v} \text{ und } \frac{Y}{Z} = -\sqrt{\frac{B(e^2-hB)}{C(hC-e^2)}}\cdot\frac{\lambda'\,\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{dn}\,v}.$$

Hieraus erhellet, dass man

$$X = -\frac{\sqrt{[A(e^2-hA)]}\cdot\mathrm{cn}\,v}{S}, \quad Y = \frac{-\sqrt{(B(e^2-hB))}\cdot\lambda'\,\mathrm{sn}\,v}{S} \text{ und } Z = \frac{\sqrt{(C(hC-e^2))}\cdot\mathrm{dn}\,v}{S}$$

setzen darf; und da $X^2+Y^2+Z^2 = 1$ sein muss, so ergiebt sich zur Bestimmung von S die Formel

$$S^2 = A(e^2-hA)\,\mathrm{cn}^2 v + B(e^2-hB)\cdot\lambda'^2\,\mathrm{sn}^2 v + C(hC-e^2)\,\mathrm{dn}^2 v.$$

Da aber $\mathrm{dn}^2 v = \mathrm{cn}^2 v + \lambda'^2\,\mathrm{sn}^2 v$ ist, so ist $S^2 = (A(e^2-hA)+C(hC-e^2))\,\mathrm{cn}^2 v + (B(e^2-hB)+C(hC-e^2))\lambda'^2\,\mathrm{sn}^2 v$, oder $S^2 = (C-A)(hA+hC-e^2)\cdot\mathrm{cn}^2 u + (C-B)(hB+hC-e^2)\lambda'^2\,\mathrm{sn}^2 v$. Wird hierin der Werth von λ'^2 substituirt, so erhält man

$$S = \sqrt{\frac{(C-A)(hA+hC-e^2)}{A(e^2-hA)}}\cdot\sqrt{[B(e^2-hB)\,\mathrm{sn}^2 v + A(e^2-hA)\,\mathrm{cn}\,v]} \text{ oder auch}$$

$$S = \sqrt{[(C-A)(hA+hC-e^2)]}\cdot\sqrt{(1-\mathrm{dn}'^2 b\,\mathrm{sn}^2 v)}.$$

Wird dieser Werth benutzt, so erhält man

$$X = \cos Sx_1 = \frac{-\,\mathrm{snc}'b\cdot\mathrm{cn}\,v}{\sqrt{(1-\mathrm{dn}'^2 b\,\mathrm{sn}^2 v)}},$$

$$Y = \cos Sy_1 = \frac{-\lambda'^2\,\mathrm{sn}'b\,\mathrm{snc}'b\,\mathrm{sn}\,v}{\sqrt{(1-\mathrm{dn}'^2 b\,\mathrm{sn}^2 v}},$$

$$Z = \cos Sz_1 = \frac{\mathrm{cnc}'b\cdot\mathrm{dn}\,v}{\sqrt{(1-\mathrm{dn}'^2 b\,\mathrm{sn}^2 v)}},$$

Vergleicht man diese Ausdrücke mit den in (No. 13) gefundenen Formeln (2), welche sich auf die Bestimmung der Lage des Puncts H bezogen, so sieht man, dass sie dieselbe Gestalt haben, und dass jene in diese übergehen, wenn man λ, λ', b, c statt der Grössen k, k', a, u, setzt.

Der durch diese Formeln bestimmte Punct S ist derjenige, welcher am Ende der Zeit t in dem schwankenden Aequator von dem mit dem Körper auf eine unabänderliche Weise verbundenen Kegelschnitte berührt wird.

21.

Der schwankende Aequator schneidet die Ebene der Hauptaxen des Körpers unter den drei Winkeln F_1, F_2, F_3, und es ist

$$F_1 = RX_1\,; \quad F_2 = RY_1\,; \quad F_3 = RZ_1\,;$$

daher ist $\cos F_1 = \cos RX_1 = \frac{p}{\omega} = \sqrt{\frac{hC-e^2}{A(C-A)}} \cdot \frac{\operatorname{cn} u}{\sqrt{(\omega_0^2 \operatorname{cn}^2 u + \omega_1^2 \operatorname{sn}^2 u)}} = \sqrt{\frac{hC-e^2}{A(C-A)}} \times \frac{\operatorname{snc} u}{\sqrt{\left(\omega_0^2 \operatorname{snc}^2 u + \frac{\omega_1^2}{k'^2} \operatorname{cnc}^2 u\right)}}$

$$\cos F_2 = \cos RY_1 = \frac{q}{\omega} = \sqrt{\frac{hC-e^2}{B(C-B)}} \cdot \frac{\operatorname{sn} u}{\sqrt{(\omega_0^2 \operatorname{cn}^2 u + \omega_1^2 \operatorname{sn}^2 u)}} = \sqrt{\frac{hC-e^2}{B(C-B)}} \times \frac{\operatorname{cnc} u}{\sqrt{(\omega_0^2 k'^2 \operatorname{snc}^2 u^2 + \omega_1^2 \operatorname{cnc}^2 u)}}$$

$$\cos F_3 = \cos RZ_1 = \frac{r}{\omega} = \sqrt{\frac{e^2-hA}{C(C-A)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 \operatorname{snc}^2 u + \frac{\omega_1^2}{k'^2} \operatorname{cnc}^2 u\right)}} \cdot$$

Da aber $\operatorname{amc} u = \operatorname{amc} v$ ist, so ist $\sqrt{\left(\omega_0^2 \operatorname{snc}^2 u + \frac{\omega_1^2}{k'^2} \operatorname{cnc}^2 u\right)} = \sqrt{\left(\omega_0^2 \operatorname{snc}^2 v + \frac{\omega_1^2}{k'^2} \operatorname{cnc}^2 v\right)}$, und da $\frac{\omega_1}{k'} = \frac{\omega_0}{\lambda'}$ nach (No. 8) ist, so ist $\sqrt{\left(\omega_0^2 \operatorname{snc}^2 u + \frac{\omega^2_1}{k'^2} \operatorname{cnc}^2 u\right)} = \frac{\omega_0}{\lambda'} \cdot \operatorname{dnc} v = \frac{\omega_0}{\operatorname{dn} v}$ und $\sqrt{\left(\omega_0^2 k'^2 \operatorname{snc}^2 u + \frac{\omega_1^2}{k'^2} \operatorname{cnc}^2 u\right)} = \frac{k'}{\lambda'} \omega_0 \operatorname{dnc} u = \omega_1 \cdot \operatorname{dnc} u.$

Daher erhält man $\cos F_1 = \frac{1}{\omega_0} \cdot \sqrt{\frac{hC-e^2}{A(C-A)}} \cdot \operatorname{cn} v$

$$\cos F_2 = \frac{1}{\omega_1} \cdot \sqrt{\frac{hC-e^2}{B(C-B)}} \cdot \operatorname{sn} v$$

$$\cos F_3 = \frac{1}{\omega_0} \cdot \sqrt{\frac{e^2-hA}{C(C-A)}} \cdot \operatorname{dn} v\,.$$

Werden hierin noch die Werthe von $\omega_0 = \sqrt{\frac{hA+hC-e^2}{AC}}$ und $\omega_1 = \sqrt{\frac{hB+hC-e^2}{BC}}$ substituirt, so erhält man endlich die Formeln

$$(1.) \quad \begin{cases} \cos F_1 = \cos Rx_1 = \operatorname{cnc}' b \,.\, \operatorname{cn} v\,, \\ \cos F_2 = \cos Ry_1 = \operatorname{dnc}' b \,.\, \operatorname{sn} v\,, \\ \cos F_3 = \cos Rz_1 = \operatorname{snc}' b \,.\, \operatorname{dn} v\,; \end{cases}$$

welche der Form nach wieder mit den in (No. 15) gefundenen Formeln (8) übereinstimmen, nur dass das Argument v nicht zur Zeit t proportional ist.

Ferner findet man noch die Formeln

$$(2.)\qquad \begin{cases} \text{tang } F_3X'_1 = \text{tang } Y_1Z_1R = \dfrac{\text{sn}'b}{\text{tn}\,v}\,, \\ \text{tang } F_2Z_1 = \text{tang } X_1Y_1R = \dfrac{\text{tnc}'b}{\text{snc}\,v}\,, \\ \text{tang } F_1Z_1 = \text{tang } Y_1X_1R = \dfrac{\lambda'}{\lambda}\cdot\dfrac{\text{cn}'b}{\text{cnc}v}. \end{cases}$$

22.

Man nehme jetzt an, der schwankende Aequator $F_1F_2F_3$ sei vom Kegelschnitte $S_0S_1S_2S_3$ durch den Scheitel S_0 im Anfange der Bewegung oder für $t = 0$ im Puncte E berührt worden, und bezeichne den Hauptbogen ES durch S, so hat dieser Bogen S einen unveränderlichen Anfangspunct E, und seine Länge ändert sich lediglich dadurch, dass sich im Fortgange der Bewegung der Punct S weiter von diesem festen Anfangspuncte E entfernt.

Zieht man den Kugelradius SO, so steht derselbe auf der schwankenden oder augenblicklichen Drehaxe OR senkrecht, und am Schlusse der Zeit t wird von diesem Radius OS, wegen der augenblicklichen Drehung des Körpers um die Axe OR mit der Winkelgeschwindigkeit ω, während des nächsten Zeitelements ∂t ein Winkel $\omega.\partial t$ beschrieben, welcher dem kleinen Hauptbogen gleich ist, den der Punct auf dem schwankenden Aequator von $\mathbf{S}$ aus beschreibt. Da wir nun voraussetzen, dass der schwankende Aequator sich nur insofern bewege, als sich die Axe OR bewegt, und er also an der Drehung des Körpers um diese Axe nicht Theil hat, so folgt, dass $\omega\,.\,\partial t$ ein Theil von $\partial\mathbf{S}$ ist. Wäre dieser Theil nicht vorhanden, so würde das Differential von $\mathbf{S}$ mit dem Differentiale des Bogens $\mathbf{S}_0\mathbf{S}$, d. h. mit $\partial' C(\varphi, b)$ übereinstimmen: so aber kommen beide Theile integrirend zusammen und es ist

$$\partial\mathbf{S} = \omega\,.\,\partial t + \partial' C(\varphi, b)\,, \text{ oder auch}$$
$$\partial\mathbf{S} = \partial W + \partial' C(\varphi, b)\,;$$

und hieraus folgt durch Integration $\mathbf{S} = W + 'C(\varphi, b)$. Eine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil alle drei Glieder für $t = 0$ verschwinden. Demnach ist also der Hauptbogen

$$(1.)\qquad ES = W + 'C(\varphi, b)\,.$$

Die in dieser Gleichung vorkommende Grösse der gesammten Drehung des Körpers ist mithin der Unterschied $ES - \mathbf{S}_0\mathbf{S}$ zwischen dem Bogen ES, welchen der Berührungspunct auf dem schwankenden Aequator zurückgelegt hat und dem Bogen $\mathbf{S}_0\mathbf{S}$, welchen er im Umfange der Ellipse durchlief.

Die in (No. 8) für W gefundenen Ausdrücke $W = \frac{v}{\mathrm{sn}'d\,\mathrm{snc}'d} - \mathbf{S}(c, d)$ $= \frac{v}{\mathrm{tn}'d\,\mathrm{dn}'d} + C(c, d) = \frac{\mathrm{dn}'d}{\mathrm{tn}'d} \cdot c + D(c, d)$ bestimmen alle drei auf gleich einfache Weise die Grösse W, welche in der gefundenen Formel zu substituiren sein würde

Werden wieder RX_1, RY_1, RZ_1 verlängert, bis der schwankende Aequator davon in α', β', γ' getroffen wird, so ist zunächst $E\gamma' = ES + S\gamma' = W + {}'C(c, b) + \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{dn}'b}{\mathrm{tn}'b}\,\mathrm{sn}\,c\,\mathrm{snc}\,c\right)$, also

(2.) $$E\gamma' = W + D(c,\ L' - b)\ ,$$

wenn L' den zum Modul λ' gehörigen Modular-Quadranten bezeichnet.

Weiter ist $\mathrm{tang}\,F_3\beta' = \mathrm{tang}\,F_3Y_1 . \cos F_3 = \frac{\mathrm{snc}'b}{\mathrm{sn}'b} \cdot \frac{\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{snc}\,v}$, und da $EF_3 = \frac{1}{2}\pi - E\gamma'$ oder

(3.) $$EF_3 = \tfrac{1}{2}\pi - W - D(c, L' - b)$$

ist, so ist $E\beta' = EF_3 + F_3\beta' = \frac{1}{2}\pi - W - D(c, L' - b) + \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{snc}'b}{\mathrm{sn}'b} \cdot \frac{\mathrm{sn}'v}{\mathrm{snc}'v}\right)$, oder

(4.) $$E\beta' = \tfrac{1}{2}\pi - W + {}'\mathbf{S}(c, L' - b)\ .$$

Weiter ist $\mathrm{tang}\,F'_3\alpha' = \mathrm{tang}\,F'_3X_1 . \cos F'_3 = \mathrm{tang}\,F_3X'_1 \cos F_3 = \frac{\mathrm{sn}'b\,\mathrm{snc}'b\,\mathrm{dn}\,v}{\mathrm{tn}\,v}$, also

$$F'_3\alpha' = \tfrac{1}{2}\pi - \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,v}{\mathrm{sn}'b\,\mathrm{snc}'b\,\mathrm{dn}\,v}\right),$$

und da $EF'_3 = \pi - EF_3 = \frac{1}{2}\pi + W + D(c, L' - b)$ ist, so ist

$$E\alpha' = \pi + W + D(c,\ L' - b) - \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,v}{\mathrm{sn}'b\,\mathrm{sn}\,{}'b\,\mathrm{dn}\,v}\right)$$

oder

(5.) $$E\alpha' = \pi + W - C(c, b)\ .$$

Da $F_2F_3 = \frac{1}{2}\pi - F_3\beta' = \frac{1}{2}\pi - \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{snc}'b}{\mathrm{sn}'b} \cdot \frac{\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{snc}\,v}\right)$ und $EF_3 = \frac{1}{2}\pi - W$ $- D(c, L' - b)$ ist, so ist $EF_2 = W + D(c, L' - b) - \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{snc}'b}{\mathrm{sn}'b} \cdot \frac{\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{snc}\,v}\right)$, oder auch

(6.) $$EF_2 = W - {}'\mathbf{S}(c, L' - b)\ .$$

Da $EF_1 = E\alpha' - F_1\alpha' = \frac{1}{2}\pi$ ist, so ist endlich

(7.) $$EF_1 = \tfrac{1}{2}\pi + W - C(c, b)\ .$$

Stellt man die Formeln zusammen, so wird die Hauptaxe $\mathbf{O}x_1$ des Körpers, d. h. der Punct X_1t durch den Leitstrahl RX_1 und den Winkel REX_1 mittels der Formeln

$$\cos RX_1 = \mathrm{cnc}'b\ \mathrm{cn}\,c \text{ und } ERX_1 = \pi + W - C(c, b)\ .$$

bestimmt. Der Punct Y_1 wird durch die Formeln

$$\cos RY_1 = \mathrm{dnc}'b \,.\, \mathrm{sn}\,c \text{ und } ERY_1 = \tfrac{1}{2}\pi - W + {}'S(c,\ L'-b).$$

und der Punct Z_1 durch die Formeln

$$\cos RZ_1 = \mathrm{snc}'b \,.\, \mathrm{dn}\,c \text{ und } ERZ_1 = W + D(c,\ L'-b).$$

bestimmt. Die Lage der Ebene Y_1Z_1 wird durch die Formeln

$$EF_1 = \tfrac{1}{2}\pi + W - C(c,\ b) \text{ und } F_1 = \arccos(\mathrm{cnc}'b\,\mathrm{cn}\,c),$$

die Lage der Ebene X_1Z_1 durch die Formeln

$$EF_2 = W - {}'S(c,\ L'-b) \text{ und } F_2 = \arccos(\mathrm{dnc}'b\,\mathrm{sn}\,c).$$

und die Lage der Ebene X_1Y_1 durch die Formeln

$$EF_3 = \tfrac{1}{2}\pi - W - D(c,\ L'-b) \text{ und } F_3 = \arccos(\mathrm{snc}'b\,\mathrm{dn}\,c).$$

bestimmt. Hiernach kann also die Lage der drei Hauptaxen des Körpers und auch die Lage der drei Ebenen, in welchen sie paarweise liegen, in Beziehung auf den schwankenden Pol und den schwankenden Aequator, für jede beliebige Zeit durch Rechnung bestimmt werden, und die Formel (1) giebt endlich noch den vom Körper oder vielmehr von der Ellipse $S_0S_1S_2S_3$ auf dem schwankenden Aequator während der Zeit t beschriebenen Bogen ES.

23.

Substituirt man nun einen der drei für W gefundenen Ausdrücke, und zwar den angemessensten, so wird man eine Vereinigung der beiden in der Formel zusammenkommenden Modular-Integrale beabsichtigen. Da sich solche zwei Modular-Integrale auf dieselben Modul λ und λ' und auf dasselbe Argument c beziehen, so steht einer solchen Vereinigung zu einem einzigen Integrale auch kein Hinderniss entgegen; nur muss dabei ein cyklischer, leicht zu bestimmender Arcus additiv oder subtractiv hinzukommen, und es kommt dabei hauptsächlich auf die Bestimmung der sich auf den Modul λ' beziehenden Modular-Functionen des neuen Parameters an.

Der Parameter des neuen Integrals ist aber immer, entweder $b-d$, oder $L'-(b-d)$, und es wird daher für alle mögliche Fälle gesorgt, wenn man die Modular-Functionen von $b-d$ selbst, und zugleich die des Complements herleitet.

Man findet durch Zusammensetzung:

$$\mathrm{tn}'b\,\mathrm{dn}'d = \sqrt{\frac{C(C-B)}{A(B-A)}} \text{ und } \mathrm{tn}'d\,\mathrm{dn}'b = \sqrt{\frac{(C-B)(B-A)}{AC}};$$

daher ist $\mathrm{tn}'b\,\mathrm{dn}'d - \mathrm{tn}'d\,\mathrm{dn}'b = (A+C-B)\,.\,\sqrt{\dfrac{C-B}{AC(B-A)}}$

und $1 + \mathrm{tn}'b\,\mathrm{dn}'d\,.\,\mathrm{tn}'d\,\mathrm{dn}'b = 1 + \frac{C-B}{A} = \frac{A+C-B}{A}$, daher ist

$$(1.)\qquad \mathrm{tn}'(b-d) = \sqrt{\frac{A(C-B)}{C(B-A)}} \quad \text{oder} \quad \mathrm{am}'(b-d) = \tfrac{1}{2}\pi - \varepsilon_4$$

weil in (No. 11) $\mathrm{tang}\,\varepsilon_4 = \sqrt{\frac{C(B-A)}{A(C-B)}}$ gefunden wurde, und also

$$\mathrm{tn}'(b-d) = \cot\varepsilon_4 = \mathrm{tang}(\tfrac{1}{2}\pi - \varepsilon_4) \text{ ist.}$$

Hieraus folgt $\lambda\,\mathrm{tn}'(b-d) = \frac{\sin\varepsilon_1}{\mathrm{tang}\,\varepsilon_4} = \frac{(hC-e^2)(hA+hB-e^2)}{(e^2-hA)(hB+hC-e^2)}$ und es ist also

$$\mathrm{tn}\,c'(b-d) = \sqrt{\frac{(e^2-hA)(hB+hC-e^2)}{(hC-e^2)(hA+hB-e^2)}} = \frac{\mathrm{tang}\,\varepsilon_4}{\sin\varepsilon_1}$$

Ferner erhält man $\lambda'\,\mathrm{sn}'(b-d) = \sqrt{\frac{(e^2-hB)hA+hC-e^2)}{(e^2-hA)(hB+hC-e^2)}}$, und hieraus folgt

$$\mathrm{dn}'(b-d) = \sqrt{\frac{C(B-A)h^2}{(e^2-hA)(hB+hC-e^2)}}$$

Daher hat man überhaupt die Formeln

$$(2.)\quad \begin{cases} \mathrm{sn}'(b-d) = \cos\varepsilon_4 = \sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}}, & \mathrm{snc}'(b-d) = \sqrt{\frac{(e^2-hA)(hB+hC-e^2)}{B(C-A)h^2}}, \\ \mathrm{cn}'(b-d) = \sin\varepsilon_4 = \sqrt{\frac{C(B-A)}{B(C-A)}}, \text{ und } \mathrm{cnc}'(b-d) = \sqrt{\frac{(hC-e^2)(hA+hB-e^2)}{B(C-A)h^2}}, \\ \mathrm{tn}'(b-d) = \cot\varepsilon_4 = \sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}}, & \mathrm{tnc}'(b-d) = \sqrt{\frac{(e^2-hA)(hB+hC-e^2)}{(hC-e^2)(hA+hB-e^2)}}, \\ \mathrm{dn}'(b-d) = \sqrt{\frac{C(B-A)h^2}{(e^2-hA)(hB+hC-e^2)}}, & \mathrm{dnc}'(b-d) = \sqrt{\frac{(hC-e^2)(hA+hB-e^2)}{A(C-B)h^2}}. \end{cases}$$

Man sieht, dass die Ausdrücke der Modular-Functionen von $b-d$ und auch die seines Complementes einfach genug sind. Sie beziehen sich auf die Rectification eines Kegelschnitts, welcher eine ähnliche Lage hat, wie der Kegelschnitt $H_0H_1H_2H_3$; er hat dieselbe Excentricität, wie dieser, und die Excentricität seines reciproken Kegelschnitts stimmt überein mit der des Kegelschnitts $R_0R_1R_2R_3$; seine beiden Halbaxen sind

$$\arccos\left(\sqrt{\frac{(hC-e^2)(hA+hB-e^2)}{B(C-A)h^2}}\right) \text{ und } \arccos\left(\sqrt{\frac{(hC-e^2)(hA+hB-e^2)}{A(C-B)h^2}}\right).$$

Mit ihrer weiteren Benutzung halten wir uns aber nicht auf. Will man wieder das Problem auflösen, aus den Coordinaten x_1, y_1, z_1 eines beliebig im Körper gewählten Puncts, welche parallel sind zu den Hauptaxen Ox_1, Oy_1, Oz_1 desselben, die Coordinaten xyz desselben Punctes in Beziehung auf den schwankenden Aequator und den schwankenden Pol R herzuleiten, so vollende man das dreirechtwinkelige sphärische Coordinaten-Dreieck ELR in (Fig. 5), indem

man EL gleich einem Quadranten macht und RL zieht. Die neuen Coordinaten-Axen sind dann OE, OL und OR. Nimmt man nun x parallel mit OE, y parallel mit OL und z parallel mit OR an, so gelten wieder die in (No. 16) aufgestellten Formeln (3, 4, und 6); nur ist die Bedeutung der drei Elemente φ, ϑ und ψ im gegenwärtigen Falle eine andere: es ist nun zu setzen

$$\psi = EF_3 = \text{Winkel } Z_1RL = \tfrac{1}{2}\pi - W - D(c, L' - b),$$

$$\vartheta = \text{Winkel } F_3 = RZ_1 = \arccos(\text{snc}'b \,.\, \text{dn}\, c) = \arccos(\sin\alpha_2 \,.\, \text{dn}\, c),$$

$$\varphi = NX_1 = \text{Winkel } Y_1Z_1R = \text{arc tang}\left(\frac{\text{sn}'b}{\text{tn}\, v}\right) = \text{arc tang}\left(\frac{\cos\varepsilon_2}{\text{tn}\, v}\right).$$

Bezeichnet man die Werthe dieser Grössen für $t = 0$ durch ψ_0, ϑ_0, φ_0, so hat man insbesondere

$$\psi_0 = \tfrac{1}{2}\pi \quad , \quad \vartheta_0 = \tfrac{1}{2}\pi - \alpha_2 \quad , \quad \varphi_0 = \tfrac{1}{2}\pi, \quad \text{daher ist dann}$$

$a_1 = -\sin\alpha_2$	$a_2 = 0$	$a_3 = \cos\alpha_2$
$b_1 = 0$	$b_2 = -1$	$b_3 = 0$
$c_1 = +\cos\alpha_2$	$c_2 = 0$	$c_3 = \sin\alpha_2$.

Bezeichnet man die zu Anfange der Bewegung zu den Axen OE, OL und OR parallelen Coordinaten des Puncts M durch x_0, y_0, z_0, so hat man die folgenden Anfangswerthe:

$$x_0 = -\sin\alpha_2 \,.\, x_1 + \cos\alpha_2 \,.\, z_1$$
$$y_0 = -y_1$$
$$z_0 = \cos\alpha_2 \,.\, x_1 + \sin\alpha_2 \,.\, z_1;$$

und in diesen sind x_1, y_1, z_1 die zu den Hauptaxen Ox_1, Oy_1, Oz_1 des Körpers parallelen Coordinaten desselben Puncts M.

Als Anfangswerthe der Coordinaten x, y, z in (No. 16) findet man in ähnlicher Weise

$$x_0 = -\sin\alpha_4 \,.\, x_1 + \cos\alpha_4 \,.\, z_1,$$
$$y_0 = -y_1$$
$$z_0 = \cos\alpha_4 \,.\, x_1 + \sin\alpha_4 \,.\, z_1.$$

Man sieht also, dass man überhaupt die Lage eines beliebigen Puncts des Körpers, eben sowohl in Beziehung auf den schwankenden Aequator, als in Beziehung auf den festen Aequator nach einer beliebigen Zeit t bestimmen kann.

Die weitere Ausführung würde zu der umständlichen und gesonderten Betrachtung der am Schlusse von (No. 4) bezeichneten particulären Fälle führen, welche aber keine Schwierigkeit haben und die wir hier daher der Kürze

wegen füglich übergehen dürfen. Die früher betrachteten sphärischen Ellipsen erhalten zum Theil die Form von sphärischen Zweiecken, welche bekanntlich ebensowohl drei sphärische Mittelpuncte haben, als die sphärischen Ellipsen. Die grosse Halbaxe, und somit auch die Excentricität eines Zweiecks, ist ein Quadrant, und die kleine Halbaxe kann, wie bei den Ellipsen, im Allgemeinen eine beliebige Grösse haben, welche nun dem halben Winkel des Zweiecks gleich ist.

Münster, den 4. Februar 1846.

9.

Mémoire de mécanique, relatif au mouvement de rotation et au mouvement naissant des corps solides.

(Par Mr. *Steichen*, professeur à l'école militaire de Bruxelles.)

Nous nous proposons de traiter diverses questions de mécanique qui ne sont encore resolues que d'une manière *indirecte* ou *incomplète*, et qui se rapportent plus particulièrement au mouvement de rotation fini ou naissant des corps solides.

§. 1.

Nouvelle analyse du centre de percussion.

Un corps solide est retenu par deux points fixes A et B, et se trouve ébranlé par une force de percussion instantanée ou immensément considérable: on demande déterminer la vitesse angulaire communiquée, qu'on appelle Ω, et les percussions souffertes pendant l'instant du choc, le corps étant percuté ou ébranlé par une force dont le point d'application extérieur se trouve compris dans l'intervalle des points A et B.

Pour plus de simplicité, et sans nuire à la généralité de ce qu'on a en vûe, on peut admettre que la force de percussion F soit située dans un plan normal à l'axe AB. Soit v la vitesse, que F imprimerait instantanément à un point matériel libre de masse μ: on pourra prendre pour mesure de F la valeur $F = \frac{\mu \cdot v}{dt}$; et si elle produisait seulement la quantité de mouvement μv pendant les très court intervalle de temps $4t$, on prendrait $F = \frac{\mu \cdot v}{4t}$. Ainsi là où l'on voudra substituer une force de pression immense à l'hypothèse idéalement permise, mais physiquement absurde d'une force instantanée, on n'aura qu'à rem

placer l'élément dt du temps par $4t$: intervalle pendant lequel se consomme tout choc et toute communication de mouvement; et cet intervalle doit être considéré comme, une quantité connue dans les recherches mécaniques générales, quoique jusqu'à ce jour l'expérience nous ait appris fort peu de chose à cet égard. Cela posé, nommons f le bras de levier de F autour de l'axe AB; dm, dm', dm''... (plus exactement $4m$, $4m'$, $4m''$.....) les éléments de masse du solide; r, r', r''... leurs distances à l'axe: on devra établir qu'il y a équilibre entre l'action et les réactions d'inertie de la matière du solide; ce qui donne immédiatement l'équation connue:

$$F \cdot f = \frac{\Omega r \cdot dm}{dt} \cdot r + \frac{\Omega r' \cdot dm'}{dt} \cdot r' + etc. = \frac{\Omega}{dt} \cdot \int r^2 dm.$$

partant

$$\frac{\Omega}{dt} = \frac{F \cdot f}{\int r^2 dm}, \quad \text{ou } \Omega = \frac{\mu \cdot v \cdot f}{\int r^2 dm}.$$

La quantité $\int r^2 dm$ étendue à la masse entière du solide exprime son moment d'inertie par rapport à l'axe donné AB. De même, puisqu'il y a équilibre entre l'action F et les réactions d'inertie, pendant l'instant du choc, par le moyen de l'axe fixe, il faut que toutes les forces se transmettent parallèlement à elles-mêmes, en partie sur le point fixe A situé d'un côté du plan de percussion, et en partie sur le point fixe B situé de l'autre côté de ce plan. Nommons yox ce plan qui coupe AB en (o); z', z'' les distances des points A, B, à yox, et prenons $z' + z'' = a$. La quantité de force transmise par F au point A sera: $F \cdot \frac{z''}{a}$; au point B elle sera $F \cdot \frac{z'}{a}$. Soient x, y, z les coordonnées rectangles de dm, rapporté à ox, oy, et à l'axe AB pris pour celui des z. En supposant que l'impulsion se fasse de oy positif vers ox positif pour chaque molecule ayant un x et un y positif, l'élément dm réagira avec une force $\Omega \cdot \frac{r\,dm}{dt}$ dont les composantes parallèles aux axes ox, oy sont

$$-\Omega \cdot \frac{y\,dm}{dt}(z'' - z) \quad \text{et} \quad +\Omega \cdot \frac{x\,dm}{dt}(z'' - z).$$

Si donc on dénote par A, B, les angles formés par la ligne d'action de F avec les axes ox, oy, on aura les composantes π_x, π_y de la pression totale en A par les formules suivantes:

$$(A.) \quad \begin{cases} \pi_x = \frac{Fz''}{a} \cos A - \frac{\Omega}{a \cdot dt} \cdot \int y z'' dm + \frac{\Omega}{a \cdot dt} \cdot \int y z dm, \\ \pi_y = \frac{Fz''}{a} \cos B - \frac{\Omega}{a \cdot dt} \cdot \int x z'' dm + \frac{\Omega}{a \cdot dt} \cdot \int x z'' dm. \end{cases}$$

Les signes d'intégration s'étendant sur tous les éléments de masse, on aura de même pour les composantes rectangulaires de la pression en B:

$$(B.)\quad \begin{cases} \pi'_x = \dfrac{Fz'}{a}\cos A - \dfrac{\Omega}{a\cdot dt}\cdot\int yz'\,dm - \dfrac{\Omega}{a\cdot dt}\cdot\int yz\,dm, \\ \pi'_y = \dfrac{Fz}{a}\cos B + \dfrac{\Omega}{a\cdot dt}\cdot\int xz'\,dm + \dfrac{\Omega}{a\cdot dt}\cdot\int xz\,dm. \end{cases}$$

Soient $(x_1 y_1 z_1)$ les coordonnées du centre d'inertie I du solide, à l'instant du choc; on aura donc, M exprimant sa masse entière:

$$\int yz''\,dm = Mz''y_1\,,\quad \int yz'\,dm = Mz'y_1,\ etc.$$

Si dont on fait, pour abréger, $\int r^2\,dm = MK^2$, $\int xz\,dm = Mp^2$, $\int yz\,dm = Mq^2$, on obtiendra par (A et B), et par la valeur de $\left(\dfrac{\Omega}{dt}\right)$:

$$(A'.)\quad \begin{cases} \pi_x = \dfrac{F\cdot z''}{a}\cos A - \dfrac{F\cdot f}{a\cdot K^2}\cdot z''y_1 + \dfrac{F\cdot f}{a\cdot K^2}q^2, \\ \pi_y = \dfrac{F\cdot z''}{a}\cos B - \dfrac{F\cdot f}{a\cdot K^2}\cdot p^2 + \dfrac{F\cdot f}{a_1 K^2}\cdot z''x_1. \end{cases}$$

$$(B'.)\quad \begin{cases} \pi_x' = \dfrac{F\cdot z'}{a}\cos A - \dfrac{F\cdot f}{a\cdot K^2}\cdot z'y_1 - \dfrac{F\cdot f}{a\cdot K^2}\cdot q^2, \\ \pi_y' = \dfrac{F\cdot z'}{a}\cos B + \dfrac{F\cdot f}{a\cdot K^2}\cdot z'x_1 + \dfrac{F\cdot f}{a\cdot K^2}\cdot p^2. \end{cases}$$

Pour que l'axe n'éprouve aucune percussion, il sera nécessaire et suffisant que deux quelconques de ses points, tels que A et B, n'en éprouvent aucune; ce qui donne:

$$\pi_x = 0,\ \pi_y = 0,\ \pi^{x'} = 0,\ \pi_y' = 0,\ \text{ou en développement:}$$

par $(A'.)$
$$\begin{cases} z''K^2\cdot\cos A - f\cdot z''y_1 + fq^2 = 0, \\ z''K^2\cdot\cos B - f\cdot p^2 + fz''x_1 = 0. \end{cases}$$

par $(B'.)$
$$\begin{cases} z'K^2\cdot\cos A - f\cdot z'y_1 - fq^2 = 0, \\ z'K^2\cdot\cos B + f\cdot z'x_1 + fp^2 = 0. \end{cases}$$

Si l'on ajoute la première à la troisième, et la seconde à la quatrième, on obtient:

$$(C.)\qquad \cos A = \frac{f\cdot y_1}{K^2},\quad \cos B = -\frac{fx_1}{K^2}.$$

De plus, en faisant la somme des carrés de ces dernières, et observant que $MK^2 = Mk^2 + Mr_1^2$, Mk^2 expriment le moment d'inertie du solide par rapport à un axe central parallèle à AB, r_1 la distance de I à AB, on obtiendra:

$$(D.)\qquad f = r_1 + \frac{k^2}{r_1}.$$

Substituant ensuite ces valeurs de $\cos A$, $\cos B$ dans les formules déduites de (A') et de (B'), on a: $q^2 = 0$, $p^2 = 0$, par les deux premières, et la même chose par les deux autres; partant $\int xz\,dm = 0$, $\int yz\,dm = 0$: De plus, le plan (I, AB) normal par hypothèse au plan de percussion AYX, ou yox, coupera celui-ci suivant une droite, parallèle à y, et faisant avec ox, oy des angles dont les cosinus sont: $\frac{x_1}{r_1}$, $\frac{y_1}{r_1}$. Donc, comme on a identiquement, eu égard à (C):

$$\cos A \,.\, \frac{x_1}{r_1} + \cos B \,.\, \frac{y_1}{r_1} = 0,$$

il s'ensuit que pour avoir une secousse ou une percussion nulle sur l'axe AB, cet axe doit être pour l'un des ses points un axe permanent de rotation du solide. Puis la force de percussion doit avoir une direction perpendiculaire au plan mené suivant l'axe et par le centre d'inertie. Enfin elle doit agir avec un bras de levier $f = r_1 + \frac{k^2}{r_1}$, et dans le plan yox normal à l'axe, qui passe par le point pour lequel l'axe AB est permanent. Le point de rencontre de la force F ainsi appliquée, avec le plan (I, AB), est ce que l'on nomme *le centre de percussion* du solide. Mais pour parvenir à ces conclusions, nous avons égalé à la fois à zéro les pressions sur deux points A, B. On pourrait donc croire que l'on puisse encore parvenir à d'autres consequences ou à une théorie plus générale, en ne considérant plus qu'un seul point fixe: mais l'examen de ce nouveau cas échappe à l'analyse précédente, puisque dans celle-ci on part de l'hypothèse de deux points fixes donnés. Cette analyse ne conduit donc à rien qui ne soit déja connu par la théorie ordinaire; mais elle montre mieux que celle-ci qu'il y a peut être encore quelque chose à faire, et nous indique en quelque sorte la nouvelle question qu'il faut se poser, pour en venir à cette généralisation de théorie que nous exposerons plus loin.

Faisons remarquer aussi que dans la méthode précédente on peut encore raisonner de la manière suivante. Si la force F est appliquée dans le plan normal même passant par A, on a

$$z' = 0,\ \pi_x' = -\frac{\Omega}{a\cdot dt}\cdot\int yz\,dm,\quad \pi'' = \frac{\Omega}{a\cdot dt}\cdot\int xz\,dm.$$

On voit immédiatement par là que si l'axe AB est pour le point A un axe permanent du solide, on peut se dispenser du second point fixe B: qu'en outre la fixité du point A devient elle-même superflûe par les nouvelles équations:

$$\pi_x = F\cos A - \frac{\Omega}{a\cdot dt}\,.\,My_1 = 0.$$

$$\pi_y = F\cos B + \frac{\Omega}{a\cdot dt}\,.\,Mx_1 = 0.$$

mais ce ne seroit là qu'une tournure différente de la même analyse, et ramenant littéralement à ce que l'on sait déjà.

§. 2.

Mouvement de rotation naissant d'un point matériel et d'un corps solide.

Concevons un point matériel fini, sans poids, (Fig. I), assujetti à un point fixe (0), et soumis à l'action simultanée de deux ou de plusieurs forces F, F', situées chacune, avec le point fixe, dans un plan particulier: le mobile ne pourra décrire pendant chaque instant qu'un seul arc de cercle élémentaire autour du point fixe. Examinons les circonstances du mouvement naissant d'un tel point. Soit OAH le plan de la force F, et OAK celui de la force F'; ces deux plans se couperont évidemment suivant une droite AO qui passe par le point fixe (o). En un point quelconque A de cette ligne d'intersection appliquons, normalement à OA, deux forces P, P', situées l'une dans le plan OAH, et l'autre dans le plan OAK, et donc les énergies de rotation principales soient respectivement équivalentes à celles des deux forces primitives, estimées par rapport au point fixe (o); de sorte que si f désigne le bras de levier de F, et f' celui de F', on doit prendre:

$$P.AO = F.f \;\; ; \;\; P'.AO = F'.f'.$$

Du point O, comme centre, avec un rayon AO, décrivons une sphère qui sera coupée par les deux plans OAH, OAK, suivant deux arcs de grand cercle AH, AK. La force F peut être remplacée par P, quant à l'effet dynamique instantané dont elle est susceptible; de même P' pourra être substituée à F'. En effet, comme P est située dans le plan OAH de la force F, elle fera mouvoir dans le premier instant dt de son action, son point d'application A dans ce plan même, et lui fera décrire un espace circulaire AB; et le mobile lui-même, de masse M, qui doit se trouver quelque part sur la ligne OA, décrira par conséquent un espace semblable; de sorte que, sous le rapport de la direction du mouvement, l'effet produit par P, est absolument le même que celui qui serait produit par la force F dans le même instant. Je dis qu'il est aussi le même sous le rapport de la grandeur de l'espace décrit: car en nommant γ l'accélération angulaire que la force P serait capable d'imprimer au mobile, et partant au point A autour du centre (o), l'accélération imprimée en l'instant dt aura la valeur $\gamma.dt$ et l'on obtient par là, en supposant que A passe de A en B autour de (o):

$$\hat{AOB} = \tfrac{1}{2} I.\gamma dt^2 \;\; ; \;\; P.AO = MR^2\gamma;$$

R désignant la distance du point matériel entraîné par P, à l'axe ou au centre de rotation: distance d'ailleurs plus grande ou plus petite que la droite AO. Si l'on substitue dans la première de ces relations, la valeur de γ fournie par la seconde, on obtient:

$$A\hat{O}B = \tfrac{1}{2} I dt^2 . \left(\frac{P \cdot AO}{MR^2}\right).$$

On prouverait de même que la force F est capable de faire parcourir à son point d'application, partant au point A et par suite à M, un espace angulaire situé encore dans le plan OAH et égal à $\frac{1}{2} dt^2 \left(\frac{F \cdot f}{MR^2}\right)$: et comme on a pris $P \,.\, AO = F.f$, il s'ensuit que ces deux espaces sont égaux en grandeur et en position; ils seront d'ailleurs infiniment petits du second ou du premier ordre, selon que les forces sont de pression, ou de percussion instantanée. Il est donc démontré ainsi que les forces F, F' peuvent être remplacés par celles, P, P', déterminées d'après les conditions prescrites. Si l'on désigne encore par $A\hat{O}C$ l'espace angulaire que la force P' est capable de faire parcourir au mobile ou au point A quand elle agit seule, il résulte du principe ou de l'hypothèse de l'indépendance des forces, qu'elle produira encore le même effet suivant sa direction sur ce point, déjà soumis à l'action de la force P suivant la ligne AB; donc, pendant que P transporte le point A d'un intervalle AB suivant sa direction, la force P' le fait descendre suivant sa propre direction constante, d'un espace égal et parallèle à celui AC qui repond à son action séparée; de sorte qu'après l'instant dt, le point A, considéré comme mobile, se trouve à l'extrêmité P de la diagonale AD du parallèlogramme $ABDC$, et parcourt instantanément le chemin unique AD. Mais si l'on applique en A, normalement à AO, dans le plan DAO', une force unique X, celle-ci sera capable de faire décrire dans son plan, au point A, pendant l'instant dt, un certain espace angulaire plus grand ou plus petit que $A\hat{O}D$: et dès qu'on voudra avoir cet espace égal à celui $A\hat{O}D$, on devra poser, comme précédemment, l'équation:

$$A\hat{O}D = \tfrac{1}{2} I \,.\, dt^2 . \left(\frac{X \cdot AO}{MR^2}\right).$$

De plus, on pourra remplacer la force X, ainsi déterminée, et son bras de levier AO, par une autre force Z, située dans le plan AOD, et douée d'un bras de levier z, pourvu qu'on assujettisse les deux grandeurs arbitraires Z, z à la condition unique

$$Z \,.\, z = X \,.\, AO$$

Ainsi quand deux ou plusieurs forces sont appliquées *directement* ou *indirectement* à un point matériel fini, lié à un point fixe, on peut trouver d'une infinité de manières différentes, une force unique capable de produire le même effet de mouvement naissant, que la totalité des forces proposées; mais toutes ces forces devront être situées dans le plan diagonal résultant.

D'ailleurs, d'après ce qui précède, la détermination de ce plan résultant est bien facile. En effet le parallélogramme $ABCD$ donne:

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 + 2AB \,.\, BD \cos B\hat{A}C.$$

Mais en multipliant les espaces $A\hat{O}C$, $A\hat{O}B$, $A\hat{O}D$ par le rayon AO, on obtient les arcs $\widehat{AB}$, $\widehat{AC}$, $\widehat{AD}$, savoir:

$$\widehat{AB} = \tfrac{1}{2} dt^2 . \frac{P \cdot AO^2}{MR^2} \; ; \; \widehat{AC} = \tfrac{1}{2} I . dt^2 . \frac{P' AO^2}{MK^2} \; , \; \widehat{AD} = \tfrac{1}{2} I . dt^2 . \frac{X \cdot AO^2}{MR^2},$$

d'où l'on déduit:

$$Z^2 z^2 \text{ ou } X^2 . AO^2 = F^2 f^2 + F'^2 f'^2 + 2 . Ff . F'f' . \cos B\hat{A}C.$$

Ainsi le moment de rotation de l'une quelconque des résultantes instantanées est en grandeur et en direction la diagonale du parallélogramme, construit sur deux droites qui représentent les deux moments des composantes et se coupent en même temps sous un angle égal à l'inclinaison des plans des deux forces composantes.

De plus, pour avoir l'inclinaison du plan du mouvement résultant, sur les plans des mouvements composants, on n'a qu'à considérer le triangle BAD qui; donne:

$$\sin D\hat{A}B = \sin B\hat{A}C X \frac{F'f'}{Z \cdot z}; \quad \sin D\hat{A}C = \sin B\hat{A}C \cdot \frac{Ff}{Z \cdot z} .$$

L'analogie de ce qui précède avec les résultantes et les composantes est manifeste. Seulement les forces sont ici remplacées par leurs moments; ce qui provient de ce que l'espace angulaire, décrit au premièr instant, est proportionnel, non plus à la force sollicitante, mais au moment de la force.

Rémarque I. Dans ce qui précède on a supposé tacitement que les forces F, F' soient appliquées toutes deux au point matériel fini qu'elles vont mouvoir; mais lors même qu'elles seraient appliquées en deux points quelconques invariablement liés entr'eux et au mobile matériel, elles auraient encore d'une infinité de manières, une résultante instantanée de rotation. En effet, je ne changerai en rien l'action de la force F', si je conçois son point d'application

aussi invariablement lié au point de rencontre p' de la ligne d'action avec la droite d'intersection AO des plans OAF, OAF', et que je lie ce point de rencontre lui-même au point matériel, mais dès lors je puis transporter le point d'application de F' en ce point de rencontre lui-même; de même je pourrai transporter celui de F au point de rencontre p de F avec AO; ensuite on pourra remplacer F' appliquée en p', par une force F'' appliquée en p, pourvu qu'on prenne F'' dans le plan de (F', O) et le moment de F'' autour de (o) égal à celui de F' dans le même plan et autour du même point. Mais les forces (F, F''), reduites au même point d'application, ont d'une infinité de manières différentes une résultante de rotation, et il en est par conséquent de même de deux forces (F, F') considérées dans leur mode d'application primitif. Il est donc absurde d'insinuer d'une manière *vague* et *absolue* que deux forces non situées dans une même plan n'ont pas de résultante: sans doute elles n'ont pas de résultante absolue, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de force unique capable à la fois des mêmes *effets de mouvement et de pression* pour le cas d'un point fixe; mais en revanche, la résultante dynamique, c'est-à-dire la force capable des mêmes effets de mouvement seulement, existera d'une infinité de manières. Que si l'on nous objectait que ce sont là des distinctions subtiles de peu d'importance, nous déclarerions, quant à nous, qu'en mécanique la distinction des idées est très essentielle et qu'elle doit contribuer à complèter et généraliser de certaines théories fondamentales.

Rémarque II. L'analogie entre la composition des forces et celle des moments principaux peut encore être envisagée d'un autre point de vûe; mais cette recherche sortirait entièrement de l'echelle d'idées que nous nous proposons de suivre dans cette discussion.

§. 3.

Suite du §. 2.

On sait par la statique générale que quand une force sollicite un corps solide pourvu d'un point fixe (0), elle le fait tourner ou tend à le tourner instantanément autour d'un certain axe. Cela admis, nommons γ l'accéleration de vitesse angulaire que la force, supposée constante de grandeur et de direction, imprimerait au corps autour de cet axe, considéré comme fixe. Pendant l'instant initial dt de son action, elle lui imprimerait donc une accélération $\gamma.dt$, et lui ferait décrire un angle $AOB=\frac{1}{2}I.\gamma.dt^2$. De plus, à cause de l'équilibre entre l'action et les réac-

tions des forces d'inertie, on aurait $Ff = \gamma . \int r^2 dm$; $\int r^2 dm$ dénotant le moment d'inertie géométrique du solide par rapport à l'axe instantané, et Ff le moment de rotation de la force F autour de cet axe. Or comme le mouvement élémentaire a lieu spontanément autour de cet axe, et qu'il n'est par conséquent en rien troublé par la fixité instantanée de cet axe, les relations précédentes dans lesquelles γ conserve le sens qu'on lui a attribué, sont encore vraies pour le cas de l'axe libre et du seul point fixe (o); de sorte que tout mouvement initial, infiniment petit du second ou du premier ordre, s'exprime par les formules:

$$A\hat{O}B = \tfrac{1}{2} I.\gamma.dt^2, \quad \text{et } F.f = \gamma . \int r^2 dm,$$

dont la combinaison donne encore

$$A\hat{O}B = \tfrac{1}{2}.dt^2 \times \frac{F \cdot f}{\int r^2 dm}.$$

Nous disons: le mouvement initial, parceque si l'on considérait le mouvement pendant un instant quelconque, où les différents éléments matériels auraient déjà des vitesses finies, l'energie dynamique de leurs forces centrifuges se combinerait avec celle de la force extérieure, et il ne serait plus permis de considérer l'axe OI, qui correspond à la force F pendant cet instant, comme l'axe de rotation instantané. C'est pourquoi aussi, en traitant des mouvements et deplacements infiniment petits dans la statique, on ne peut les considérer qu'à partir du repos, et pendant un instant initial, où les forces centrifuges sont encore nulles. Pour avoir le chemin élémentaire décrit par un point quelconque du corps solide pendant cet instant, on n'a qu'à multiplier la rotation $A\hat{O}B$ par le rayon de ce point, c'est-à-dire par sa distance à l'axe de rotation.

Si le corps était soumis en outre à l'action d'une seconde force F', douée d'une énergie de rotation $F'f'$ autour de l'axe instantané OI' qui lui correspond, il décrirait sur cet axe un angle $A\hat{O}C$ donné par l'équation

$$A\hat{O}C = \tfrac{1}{2} dt^2 \left(\frac{F'f'}{\int r'^2 dm} \right),$$

dans laquelle $\int r'^2 dm$ exprime le moment d'inertié du solide par rapport au nouvel axe OI'. Supposons que A soit à la fois un point du solide et le point d'application commun des deux forces sollicitantes, il décrira un espace unique AD qui résulte de AB et de $BD = AC$, et donné par l'équation:

$$AD^2 = AO^2.(A\hat{O}B)^2 + AO^2(A\hat{O}C)^2 + 2\,AO^2.A\hat{O}C\,.\,A\hat{O}B.\cos B\hat{A}C:$$

équation dans laquelle tous les termes du second membre sont connus, puisque

$B\hat{A}C$ exprime l'angle des deux plans ou des deux axes qui leur sont perpendiculaires. Le rapport $\left(\frac{AD}{AO}\right)$ marque l'espace angulaire résultant $A\hat{O}D$, décrit sur l'axe résultant par un point du corps situé à l'unité de distance de cet axe. En nommant Zz le moment résultant de la force unique autour de cet axe, on pourra faire encore:

$$\frac{Z\cdot z}{\int\varrho^2 dm^2} = \frac{2\cdot AD}{AO\cdot dt^2} = \sqrt{\left[\left(\frac{Ff}{\int r^2 dm}\right)^2 + \left(\frac{F'f'}{\int r'^2 dm}\right)^2 + 2\cdot\frac{Ff}{\int r^2 dm}\times\frac{F'f'}{\int r'^2 dm}\cdot\cos B\hat{A}C\right]}.$$

Dans cette équation $\int.\varrho^2 dm$ dénote le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de la rotation résultante. Quant à l'inclinaison du plan résultant AOD sur le plan AOB, elle est marquée par l'angle $D\hat{A}B$, et l'on trouve:

$$\sin D\hat{A}B = \sin B\hat{A}C\cdot\frac{F'f'}{Z\cdot z}\times\frac{\int\varrho^2 dm}{\int r'^2 dm} = \sin B\hat{A}C\cdot\frac{F'f'}{\int r'^2 dm}:\frac{Z\cdot z}{\int\varrho^2 dm}.$$

Cette inclinaison est donc connue en valeur des quantités $F'f', \int r'^2 dm, Ff, \int r^2 dm$. La position de l'axe rèsultant est donc connue aussi par rapport aux axes composants: on pourra parsuite évaluer au besoin le moment d'inertie $\int.\varrho\, dm$; ce qui fera connaître aussi le moment résultant. Mais rien dans ce qui précède ne détermine la direction des axes composants OI, OI' du point fixe (o) du solide: cette question revient à déterminer l'axe autour duquel une force tend à tourner instantanément un corps solide pourvu d'un point fixe; mais pour embrasser le sujet dans toute sa généralité, nous allons nous occuper de la solution de la question suivante.

§. 4.

Un corps solide est fixé par son centre d'inertie ou par tout autre point, et vient à être sollicité par une ou par plusieurs forces, connues de grandeur, de direction, et de points d'application: faire connaître les circonstances relatives à l'effet dynamique instantané de ces forces, et assigner notamment la position de l'axe instantané de rotation: (Fig. 2.).

Solution: Examinons d'abord le cas d'une force unique, de pression ou de percussion, agissant sur un corps fixé par son centre d'inertie. Soient I ce centre; Ix, Iy, Iz les trois axes d'inertie ou principaux du solide; AB la direction et la ligne d'action de la force sollicitante; A le point d'intersection de cette ligne avec le plan (yIx);

$$AI = l, \quad A\hat{I}x = \eta : \quad BA_1x = \alpha, \quad B\hat{A}_1y = \beta, \quad B\hat{A}_1z = \gamma;$$

$d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ les rotations élémentaires dont la force ferait tourner le solide autour des trois axes coordonnés Ix, Iy, Iz, respectivement, s'ils étaient fixes successivement; N, M, L les moments de la force autour des mêmes axes; $d\xi$ la rotation élémentaire, dont elle fait tourner le corps autour de l'axe instantané qu'on nommera IO; C_1, B_1, A_1 les angles de IO avec les axes respectifs Ix, Iy, Iz; μ' le moment de la force autour de IO; A, B, C les trois moments d'inertie principaux du solide; δ l'inclinaison de l'axe IO sur le plan xy; E l'angle compris entre sa projection sur ce plan et l'axe Ix.

La difficulté de la question se réduit à évaluer les quantités $(d\xi_1, C_1, B_1, A_1)$ ou $(d\xi, \varepsilon, \vartheta)$, qui sont inconnues, en valeur des quantités connues A, B, C, N, M, L, α, β, γ, η, e. Or on trouve d'abord par un raisonnement facile, P etant la force:

$$\text{(I.)} \quad \begin{cases} N = -P.l.\cos\gamma.\cos\eta \ldots\ldots (Ix), \\ M = +P.l.\cos\gamma.\cos\eta \ldots\ldots (Iy), \\ L = +P.l.(\cos\alpha\sin\eta - \cos\beta\cos\eta) \ldots\ldots (Iz). \end{cases}$$

Il résulte ensuite des notations admises et de l'effet de rotation des forces, déjà exposé aux paragraphes précédents, que l'on doit avoir:

$$\text{(II.)} \quad d\psi = \tfrac{1}{2}\,dt^2.\frac{N}{A} \quad ; \quad d\omega = \tfrac{1}{2}dt^2.\frac{M}{B} \quad , \quad d\varphi = \tfrac{1}{2}\,dt^2.\frac{L}{C} \ldots\ldots$$

Mais le principe de la composition des rotations rectangulaires, que nous admettons comme exposé et démontré déjà dans la statique, et sur lequel nous pourrons d'ailleurs revenir, nous donne immédiatément:

$$d\psi = d\xi.\cos C_1, \; d\omega = d\xi.\cos B_1, \; d\varphi = d\xi.\cos A_1:$$

$$\text{partant } d\xi = \sqrt{(d\psi^2 + d\omega^2 + d\varphi^2)} = \tfrac{1}{2}.M^2\left(\frac{N^2}{A^2} + \frac{M^2}{B^2} + \frac{L^2}{C^2}\right).$$

Si donc on pose pour abréger:

$$\sqrt{\left(\frac{N^2}{A^2} + \frac{M^2}{B^2} + \frac{L^2}{C^2}\right)} = K,$$

la quantité K exprimera un nombre abstrait et connu pour chaque cas particulier donné du solide et de la force: et l'on aura:

$$d\xi = \tfrac{1}{2}I.K.dt^2 \ldots\ldots$$

$$d\psi = \tfrac{1}{2}.K.dt^2 \times \cos C_1, \; d\omega = \tfrac{1}{2}K.dt^2.\cos B_1, \; d\varphi = \tfrac{1}{2}K.dt^2.\cos A_1:$$

Si l'on substitue ces valeurs de $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$ dans les équations (II), on en deduit pour la direction de l'axe:

$$\text{(III.)} \quad \cos C_1 = \frac{N}{K \cdot A}\,;\ \cos B_1 = \frac{M}{K \cdot B}\,,\ \cos A_1 = \frac{L}{K \cdot C} \ldots\ldots$$

Si l'on veut fixer la direction de cet axe par les seules quantités ε, δ, on remarquera que

$$\cos C_1 = \cos\varepsilon \,.\, \cos\delta\,, \quad \cos B_1 = \sin\varepsilon \,.\, \cos\delta\,, \quad \cos A_1 = \sin\delta$$

$$\text{partant } \operatorname{tang}\varepsilon = \frac{\cos B_1}{\cos C_1}\,, \quad \operatorname{tang}\delta = \frac{\cos A_1}{\sqrt{\cos^2 B_1 + \cos\varepsilon^2\, C_1}}\,,$$

ou bien, par substitution:

$$\text{(IV.)} \quad \operatorname{tang}\varepsilon = \frac{A \cdot M}{B \cdot N}\,:\ \operatorname{tang}\delta = \frac{A \cdot B \cdot L}{C \cdot \sqrt{(A^2 M^2 + B^2 \,.\, N^2)}}\,.$$

Substituant encore dans celles-ci les valeurs de N, M, L, on obtient en fonction des données immédiates de la question:

$$\text{(V.)} \quad \begin{cases} \operatorname{tang}\varepsilon = -\dfrac{A}{B} \,.\, \operatorname{cotg}\eta\,; \quad \operatorname{tang}\delta = \dfrac{(\cos\beta\cos\eta - \cos\alpha\sin\eta)\, A \cdot B}{C \cdot \cos\gamma \cdot \sin\eta \cdot \sqrt{(B^2 + A^2 \operatorname{cotg}^2\eta)}} \\ d\xi = \frac{1}{2} dt^2 \,.\, P \,.\, l \,.\, \sqrt{\left[\cos^2\gamma \left(\dfrac{\sin^2\eta}{A^2} + \dfrac{\cos^2\eta}{B^2}\right) + \dfrac{(\cos\beta\cos\eta \cdot \cos\alpha\sin\eta)^2}{C^2}\right]}. \end{cases}$$

Si l'on remarque enfin que d'après la théorie des moments on doit avoir:

$$\mu' = N \,.\, \cos C_1 + M \cos B_1 + L \,.\, \cos A_1\,,$$

et qu'on substitue les valeurs fournies par les équations (III), on a:

$$\text{(VI.)} \quad \mu' = \frac{N^2}{K \cdot A} + \frac{M^2}{K \cdot B} + \frac{L^2}{K \cdot C}\,, \text{ et } d\xi = \tfrac{1}{2} \,.\, K \,.\, dt^2.$$

Les formules (I, III, VI) resolvent complètement la question, et dans le cas même où il y aurait plusieurs forces; car alors on n'aura qu'a faire des seconds membres de (I) des sommes de moments. Les formules (IV) pourront au besoin être substituées aux équations (III); les formules (V) ne pourront servir que dans l'hypothèse d'une force unique. Dans celle de plusieurs forces, il faut entendre par N, M, L des sommes de moments autour des axes principaux. Si le point fixe du solide est ailleurs qu'au centre d'inertie, il faudra entendre par A, B, C les moments d'inertie relatifs aux axes permanents en ce point, qui seront alors choisis à leur tour comme axes coordonnés rectangles. Nous pouvons donc considérer la question générale comme complètement resolue par ce qui précéde: il ne reste plus qu'à signaler les principales conséquences qui résultent de cette solution.

Rémarque I. Les valeurs de ε et δ montrent que la direction de l'axe autour duquel le solide se trouve ébranlé, est indépendante de l'intensité de la force et de la distance au point fixe à laquelle elle coupe l'un des trois plans d'inertie principaux: mais qu'elle dépend de la forme mécanique du corps, de la

direction de la force et de la direction de la droite AI, rapportées aux trois axes principaux. Ainsi l'axe d'ébranlement restera le même, si l'on déplace la force parallélement à elle-même dans un plan mené suivant la ligne AI.

Rémarque II. On voit par la seconde formule (VI) et par la deuxième équation (V) que la trépidation angulaire du solide autour de l'axe instantané, est proportionnelle à la force et à la distance l de l'origine au point où elle coupe le plan principal; de sorte qu'en déplaçant la force parallèlement à elle-même dans le plan mené suivant AI, on obtient des rotations élémentaires proportionnelles aux distances IA.

Rémarque III. Le nombre abstrait K, qui entre dans la valeur de la rotation $d\xi$, de la même manière que l'accéleration angulaire, pour le cas d'un simple point matériel, est ce qu'on pourrait nommer en conséquence *l'accélération angulaire* du solide, correspondante à une force donnée, ou à plusieurs. On en obtient la valeur, en cherchant le moment de la force autour de chaque axe principal, divisant le carré de ce moment par le moment d'inertie du solide relatif à cet axe, faisant la même opération par rapport à chaque axe principal, et enfin en extrayant la racine carrée de la somme des carrés des trois résultats ainsi obtenus.

Rémarque IV. On demande quelle doit être la direction d'une force P connue de grandeur, et appliquée en un point donné A du plan principal yIx, pour que l'axe d'ébranlement correspondant soit situé dans un plan perpendiculaire à la direction de la force? On doit donc poser l'équation de condition suivante:

$$\cos\alpha \,.\, \cos C_1 + \cos\beta \,.\, \cos B_1 + \cos\gamma \,.\, \cos A_1 = 0,$$

$$\text{partant } \frac{N}{A}\cos\alpha + \frac{M}{B}\cos\beta + \frac{L}{C}\,.\,\cos\gamma = 0.$$

Si l'on substitue dans celle-ci les valeurs de N, M, L, données par les formules (I), et que l'on fasse $\cos\alpha = \cos\varepsilon' \,.\, \cos\delta$, $\cos\beta = \cos\delta' \,.\, \sin\varepsilon'$, $\cos\gamma = \sin\delta'$, on obtiendra:

$$Pl \,.\, \cos\delta' \,.\, \sin\delta' \,.\, \left[\left(\frac{I}{C} - \frac{I}{A}\right)\cos\varepsilon' \sin\eta + \left(\frac{I}{B} - \frac{I}{C}\right)\cos\eta \,.\, \sin\varepsilon'\right] = 0;$$

ou, en rejetant d'abord le facteur $Pl\cos\delta'\sin\delta'$ dont l'égalité à zero peut toutes fois donner aussi des solutions, on trouve:

$$\text{tang}\,\varepsilon' = \text{tang}\,\eta \cdot \frac{B\cdot(A-C)}{A\cdot(B-C)}.$$

Ainsi il suffira généralement de tracer sur le plan d'inertie yIx, et au point A,

qu'on considère, une droite faisant avec l'axe Ix un angle E' déterminé par cette dernière égalité, et de choisir la force demandée d'une manière arbitraire dans le plan mené suivant cette droite, normalement au plan yIx. Du reste, le point A lui-même reste arbitraire, quoiqu' on l'ait d'abord considéré comme donnè; seulement, ce point étant donné, l'angle η en résulte; et η étant donné, le point A devra se trouver partout oú l'on voudra sur la droite qui part de I et qui fait cet angle η avec l'axe Ix.

Rémarque V. Si la ligne d'action de la force rencontre l'axe Ix, c'est-à-dire l'un quelconque des trois axes d'inertie qu'on pourra toujours prendre pour celui des x, on obtient:

$$\operatorname{tang}\varepsilon = \infty\ , \quad \operatorname{tang}\delta = B\cos\beta : C\cos\gamma.$$

L'axe de rotation Io se trouvera donc dans le plan des deux autres axes principaux et y occupera une position dépendante des quantités B, C, β, γ.

Rémarque VI. Si la force est perpendiculaire à l'un des trois plans d'inertie, à celui yIx par exemple, on a $\cos\alpha = 0$, $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 1$, $\operatorname{tang}\varepsilon = -\frac{A}{B}.\cot\eta$, $\operatorname{tang}\delta = 0$; et dès lors l'axe de la rotation sera situé dans le même plan d'inertie.

Rémarque VII. Si la force est dirigée dans l'un des trois plans d'inertie, dans celui xy par exemple, on a $\cos\gamma = 0$, et $\operatorname{tang}\delta = \infty$; et l'axe d'ébranlement coïncidera avec la perpendiculaire à ce plan.

Rémarque VIII. Quelle doit être la forme et la constitution d'un solide ébranlé par une force unique, pour que l'axe correspondant soit perpendiculaire *au plan principal de la force*, relatif au point fixe donné? Ou sait que le moment principal de la force est $\sqrt{(N^2+M^2+L^2)}$, et que l'axe principal a sur les trois axes coordonnés des inclinaisons dont les cosinus sont:

$$\frac{N}{\sqrt{(N^2+.....)}}, \quad \frac{M}{\sqrt{(.....)}}, \quad \frac{L}{\sqrt{(.....)}}$$

On doit donc faire, d'après les conditions de la question:

$$\frac{N^2}{K\cdot A}+\frac{M^2}{K\cdot B}+\frac{L^2}{K\cdot C}=\sqrt{(N^2+M^2+L^2)},\ \frac{N}{K\cdot A}=\frac{N}{\sqrt{(N^2+M^2+L^2)}},\ \frac{M}{K\cdot B}=\text{etc.};$$

égalités qui donnent $A = B = C$.

Mais il convient de remarquer que la superposition des axes a lieu, si l'on pose seulement les deux égalités

$$N : KA = N : \sqrt{(N^2+M^2+L^2)}\ , \quad M : KB = M : \sqrt{(N^2+M^2+L^2)};$$

et la troisième $L : KC = L : \sqrt{(N^2+M^2+L^2)}$ qui est une conséquence des deux

premières, pourra être remplacée par l'hypothèse de $L=0$, et sans qu'il soit nécessaire de prendre $C=A=B$. Ainsi la question est toujours possible, et les conditions prescrites ont toujours lieu pour les solides de première espèce, qui ont toujours leurs trois moments d'inertie principaux, égaux entre eux. Mais pour les solides de seconde espèce qui n'ont que deux moments égaux entr'eux, la question est seulement possible quand la force appliquée au solide a un moment de rotation nul autour de l'axe du moment d'inertié principal inégal. Enonçons ces conséquences d'une manière plus formelle:

Tout système matériel rigide de première espèce, tel que le cube et la sphère homogène, se trouvent toujours ébranlé par des forces quelconque autour de leur axe principal, c'est-à-dire autour d'un axe au point fixe, perpendiculaire au plan principal de ces forces: pour qu'un solide de seconde espèce, pourvu d'un point fixe, soit ébranlé par une ou plusieurs forces, autour de l'axe principal de celles-ci, il est nécéssaire et suffisant que ces forces aient un moment de rotation nul autour de l'axe du solide à moment d'inertie inégal.

Cette dernière condition sera remplie par exemple, lorsque la force appliquée a sa ligne d'action est située dans l'un des deux plans d'inertie qui renferment l'axe du moment inégal. Ainsi, pour les solides de révolution, il suffira que la force agisse dans un plan central renfermant l'axe de figure. Cette seconde propriété s'accorde parfaitement avec une propriété déjà reconnue plus haut; car un plan quelconque, conduit suivant l'axe de la figure, est toujours un plan d'inertie dans les solides de ce genre, censés homogènes.

Rémarque IX. Comment faut-il appliquer une ou plusieurs forces à un corps rigide, fixé par son centre d'inertie ou par tout autre point, pour qu'il soit ébranlé autour d'un axe d'inertie, ou d'un axe permanent de rotation? Pour fixer les idées, supposons que l'axe d'ébranlement doive coïncider avec l'axe d'inertie Iz. On doit donc avoir

$$\cos C_1 = 0,\ \cos B_1 = 0,\ \text{partant } N = 0,\quad M = 0$$

d'après les egalités (III); ce qui signifie que l'énergie de la force autour des deux autres axes d'inertie doit être nulle. Ces conditions donnent pour le cas d'une force unique:

$$l\,.\cos\gamma\,.\sin\eta = 0\quad,\quad l\,.\cos\gamma\,.\cos\eta = 0.$$

Et comme il est impossible d'avoir à la fois $\cos\eta = 0$ et $\sin\eta = 0$, elles ne sont satisfaites en général que par l'hypothèse de $\gamma = 90^0$. Ainsi la force doit croiser

à angle droit l'axe Iz. *Mais doit-elle être située dans les plan d'inertie même yIx? ou bien, suffit-il qu'elle agisse dans un plan parallèle à celui-là?*

Dans le premier cas la longueur $l = IA$ reste arbitraire, ce qui est facile à expliquer par les moments; et la condition $l.\cos\gamma = 0$ est satisfaite par $\gamma = 90^0$. Dans le second cas la longueur l devient infinie, et la condition $l.\cos\gamma = 0$ ne saurait être remplie. Ainsi la force doit agir dans le plan d'inertie même, qui est normal à l'axe autour duquel l'ébranlement doit se faire. On est amené à la mème conclusion en remplaçant N et M par leurs expressions plus usitées

$$P(z\cos\beta - y\cos\gamma) = 0 \quad , \quad P(x\cos\gamma - z\cos\alpha) = 0.$$

Au premier abord il semble en résulter des valeurs déterminées pour α, β, γ et différentes de celles de $\gamma = 90^0$; car le point d'application (x, y, z) de la force est bien connu, et paraît même devoir être considéré comme donné: mais des trois quantités x, y, z il y en a toujours une qu'on peut prendre à volonté, puisque dans le cas d'un système rigide, le point d'application d'une force peut être transporté en tel point qu'on veut de sa ligne d'action. Or quelle que soit la direction de cette ligne, elle devra rencontrer l'un au moins des trois plans d'inertie. Supposons que ce soit celui des zx, et transportons en ce point de rencontre le point d'action de la force; on aura donc $y = 0$,

$$z\cos\beta = 0 \quad , \quad x\cos\gamma - z\cos\alpha = 0.$$

La solution $z = 0$, $x = 0$ doit être rejetée, puisqu'elle placerait le point d'application au centre ou au point fixe même, et qu'ainsi tout mouvement serait impossible. Mais ces mêmes équations sont satisfaites par $z = 0$, $\gamma = 90^0$; ce qui reproduit la solution déjà reconnue plus haut.

On pourra faire encore: $\cos\beta = 0$, $\cos\gamma = 0$, et $z = 0$, ce qui ne donne qu'une solution particulière, déjà comprise dans l'autre.

Quant au cas d'une pluralité de forces, propres à satisfaire à la condition prescrite, il suffit de les soumettre aux équations de conditions

$$\Sigma.Pl.\cos\gamma.\sin\eta = 0 \quad , \quad \Sigma.Pl.\cos\gamma.\cos\eta = 0,$$

qui pourront être remplies d'une infinité de manières. La question ne serait pas plus difficile, si l'on exigeait que l'axe de rotation initial eût une direction quelconque déterminée.

Rémarque X. Reprenons la seconde formule (VI), savoir $d\xi = \frac{1}{2}IK.dt^2$, mais en dénotant par $\int\varrho^2 dm$ le moment d'inertie du solide, relatif à l'axe instantané IO; nous avons d'aprés les (§. 2 et 3): $d\xi = \frac{1}{2}.dt^2 \times \frac{u}{\int\varrho^2 dm}$. Cette double valeur de $d\xi$ donne la condition

$$K.\int.\varrho^2\,dm = \mu' = N\cos C_1 + M\cos B_1 + L\cos A_1.$$

Mais eu égard aux égalités (II), on a: $N = \frac{2d\psi}{dt^2}A$; $M = \frac{2d\omega}{dt^2}.B$, $L = \frac{2d\varphi}{dt^2}.e$.

De plus, en remarquant que $\frac{2d\psi}{dt^2} = K\cos C_1$, $\frac{2d\omega}{dt^2} =$ etc. ....., on obtient:

$$N = K.A.\cos C_1\ , \qquad M = K.B.\cos B_1\ , \qquad L = K.C.\cos A_1:$$

ce qui donne par la substitution de ces valeurs de N, M, L;

$$\int\varrho^2\,dm = A.\cos^2 C_1 + B.\cos^2 B_1 + C.\cos^2 A_1;$$

et ce n'est là qu'un résultat bien connu dans la transformation des moments d'inertie géométriques de corps matériels.

Rémarque XI. Avant que d'aller plus loin, nous devons présenter quelques observations importantes, sans lesquelles nous pourrions paraître commettre un cercle vicieux, quant à quelques unes de propriétés qui restent à établir. Dans ce qui précède, nous n'avons admis que les quelques notions fondamentales de la science de l'équilibre et du mouvement, savoir 1) L'égalité à zéro de la somme des moments de plusieurs forces qui se font équilibre sur un corps rigide, pourvu d'un axe fixe. 2) Le théorème de l'immortel *Euler* sur le déplacement infiniment petit d'un corps solide, pourvu d'un point fixe. 3) Le principe de l'équilibre entre l'action et les réactions d'inertie, qui est une généralisation du principe dynamique de *Newton*, et dont nous avons pris l'idée dans les ouvrages profonds de Mr. *Poncélet* sur la mécanique appliquée. Or le principe (1) que l'on pourrait nommer le principe général du treuil, résulte aisement de l'antique principe du levier et de la composition des forces. Le principe (2) d' *Euler* est une propriété purement géométrique, dont ont connait diverses démonstrations. Le principe (3) peut être rendu évident par quelques considérations analogues à celles qu'on emploie pour démontrer la méthode de *D'Alembert* qui lui est analogue, mais qui est loin d'être aussi directe. Après cela, faisons observer que la théorie des axes principaux des solides se déduit de transformations analytiques, et de la notion du principe du treuil et de la force centrifuge; et il devient clair que nous n'avons admis que les notions fondamentales de la statique et de la dynamique, et sans admettre d'avance aucune des conséquences, que nous allons établir ou qui résultent du moins de ce qui précède.

Trouver les conditions nécessaires pour que des forces données, appliquées à un corps pourvu d'un point fixe, puissent être remplacées par une force unique, égale à leur résultante de transport.

Solution. Il faut donc que cette résultante, convenablement appliquée, ébranle le corps autour du même axe, et avec la même energie de rotation que la pluralité des forces données. Nommant d'après cela (a, b) son point de rencontre avec le plan d'inertie; (xIy), N', M', L' ses moments autour des axes Ix, Iy, Iz; X, Y, Z les projections des forces partielles sur ces axes, et posant pour abréger:

$$V\left(\frac{N'^2}{A^2}+\frac{M'^2}{B^2}+\frac{L'^2}{C^2}\right)=K',$$

on trouvera, eu égard aux conditions enoncées:

(1.) $\quad K'=K,\quad N'=N,\quad M'=M,\quad L'=L.$

La première de ces égalités provient de ce que la rotation de la force unique doit être égale à celle des forces partielles proposées; les trois autres résultent de ce que l'axe d'ébranlement doit être le même dans l'un et dans l'autre cas; ce qui donne $N' : AK' = N : AK'$ etc. On voit aussi de quelle façon les quantités A, B, C, disparaissent ici. De plus, comme on exige aussi que la résultante effective R' soit égale d'intensité à la résultante de transport R des forces données, on aura, en nommant X', Y', Z' les projections orthogonales de K':

(2). $\quad R'=R,\quad X'=X,\quad Y'=Y,\quad Z'=Z.$

Mais dans les équations (1) j'ai $N'=-bZ'$, $M'=+aZ'$, $L'=bX-aY'$; ce qui les ramène à celles-ci:

$$-bZ'=N,\qquad aZ'=M,\qquad bX'-aY'=L.$$

Tirant des deux premières les valeurs de (a, b) et le substituant dans la dernière, on obtiendra, eu égard aux egalités (2), la fameuse équation de condition bien connue, et donc la signification est aujourd'hui bien connue aussi. Mais si l'on se contente de rechercher seulement la résultante dynamique, c'est-à-dire la force unique capable simplement de l'effet de mouvement même des forces proposées, la reponse à la question sera différente; il faut toujours que l'on ait:

(1'.) $\quad K'=K,\quad N'=N,\quad M'=M,\quad L'=L,$

N', M', L' exprimant les moments de la force unique cherchée, autour des axes coordonnés. Soit π cette force, et (a, b) son point de rencontre avec le plan (xy), on aura:

(2.) $\quad N'=-\pi.\cos\nu.b\ ;\ M'=+\pi.\cos\nu.a : L'=\pi(b\cos\lambda-a\cos\mu),$

λ, μ, ν dénotant les trois angles qui fixent la direction de π, par rapport aux axes. Substituant dans la troisième les valeurs de a, b déduites des premières, puis supprimant les accents sur les lettres N', M', L', ce qui est permis d'après celles (1'), on trouve:

$$(3'.) \qquad L\cos\nu + M\cos\mu + N\cos\lambda = 0,$$

$$a = \frac{M}{\pi\cos\nu} \quad , \quad b = -\frac{N}{\pi\cos\nu}.$$

Or nous avons toujours cinq inconnues, savoir les angles $(\lambda, \mu, \varepsilon)$ qui ne comptent que pour deux, la grandeur de π, et les deux coordonnées (a, b); mais il n'y a que trois équations de condition auxquelles elles doivent satisfaire: on peut donc pour le cas d'un solide pourvu d'un point fixe, trouver d'une infinité de manières différentes une force unique résultante dynamique des forces proposées. Mais en vertu de la condition (3') et d'après ce qui est démontré dans notre mèmoire sur le centre de forces, cette résultante doit à chaque fois se trouver dans le plan principal des forces, relatif au point fixe donné.

Rémarque XII. Trouver les conditions nécessaires pour que l'axe instantané de rotation du solide coïncide avec la direction de la résultante de transport des forces proposées? Nommons R cette résultante de transport; x, y, z ses projections sur les axes: on aura, eu égard aux equations (III):

$$X : R = N : AK \quad ; \quad Y : R = M : BK \quad , \quad Z : R = L : CK.$$

L'une quelconque de celles-ci est d'ailleurs une conséquence analytique des deux autres; ce qui est évident aussi par l'intuition géométrique. En les combinant deux-à-deux on peut les réduire à celles-ci:

$$A.M.X = B.N.Y \quad , \quad A.L.X = C.N.Z.$$

On voit que la condition prescrite peut être remplie d'une infinité de manières, par le moyen de forces données de grandeurs et de directions, dont on déterminera la position ou les points d'application extérieurs, d'après les deux équations de condition précédentes. Pour mieux faire saisir cette solution, nommons α, β, γ les angles de chaque force P avec les axes, on aura:

$$X = \Sigma . P\cos\alpha \ , \quad Y = \Sigma P\cos\beta \ , \quad Z = \Sigma . P\cos\gamma \ .$$

$N = -\Sigma . P.l\cos\gamma\sin\eta$, $M = \Sigma P l\cos\gamma\cos\eta$, $L = \Sigma . Pl(\cos\alpha\sin\eta - \cos\beta\cos\eta)$.

On obtient ainsi entre les données immédiates de la question les conditions générales

$$A.\Sigma . Pl\cos\gamma\cos\eta . \Sigma P\cos\alpha + B.\Sigma Pl\cos\gamma\sin\eta . \Sigma . P\cos\beta = 0 ,$$

$$A.\Sigma Pl(\cos\alpha.\sin\eta - \cos\beta\cos\eta)\Sigma . P\cos\alpha + C\Sigma Pl\cos\gamma\sin\eta . \Sigma P\cos\gamma = 0 .$$

Connoissant donc les intensités et les directions des forces, et leurs points de rencontre, a l'exception d'un seul, avec le plan YIX, on pourra calculer les coordonnées (η', l') de ce dernier point de rencontre par les deux équations de condition précédentes; et dès lors tout sera connu d'après la condition préscrite. Pour le cas d'une scule force les équations deviennent:

$$A\cos\eta\cos\alpha + B\cos\beta\,.\,\sin\eta = 0$$
$$A(\cos\alpha\,\sin\eta - \cos\beta\,\cos\eta) + C\,.\,\cos^2\gamma\,\sin\eta = 0;$$

partant impossibles, puisque dans la supposition contraire elles donneraient pour une même quantité η deux valeurs différentes à la fois, ce qui est absurde. Il est d'ailleurs assez manifeste par soi-même qu'une force unique ne saurait ébranler un solide autour d'un axe parallèle à sa direction.

Rémarque ***XIII.*** Déterminer un système de forces dont la résultante de transport parallèle soit située dans un plan normal à l'axe d'ébranlement instantané. On fera dans la valeur générale:

$$\cos\overset{A}{R},IO) = \frac{X}{R}\cdot\frac{N}{KA} + \frac{Y}{R}\cdot\frac{M}{KB} + \frac{Z}{R}\cdot\frac{L}{K\cdot C}$$

la quantitè $\cos(\overset{A}{R},IO) = 0$, ce qui donne

$$B\,.\,C\,.\,N\,.\,X + A\,.\,C\,.\,M\,.\,Y + A\,.\,B\,.\,L\,.\,Z = 0\,.$$

S'il était question d'un solide de première espèce, on serait ramené immédiatement par cette équation à une conclusion déjà connue. Si toutes les forces agissent dans un même plan d'inertie, dans celui yIx par exemple, l'équation obtenue est satisfaite identiquement; car alors $Z = 0$, $N = 0$, $M = 0$: donc le solide s'èbranlera autour de l'axe normal à ce plan.

Si toutes les forces sollicitantes sont situées dans un même plan, normal au plan xy, et passant par le point I, la somme de leurs moments à tourner le solide autour de Iz, sera évidemment nulle. C'est ce qu'on peut aussi verifier analytiquement. En effet, toutes les projections des forces sur (xIy) coïncideront ensemble; elles feront par conséquent toutes l'angles η avec l'axe Ix. Mais on a $\cos\alpha = \cos\eta\,.\,\sin\gamma$, $\cos\beta = \sin\eta\,\sin\gamma$; partant le moment de chaque force autour de Iz devient

$P.l.(\cos\alpha\,.\,\sin\eta - \cos\beta\,\cos\eta) = P.l\,(\cos\eta\,.\,\sin\gamma\,.\,\sin\eta - \sin\eta\,.\,\sin\gamma\,.\,\cos\eta) = 0$,
ce qui donne aussi identiquement $L = \Sigma.P.l.(\cos\alpha\,.\,\sin\eta - \cos\beta\cos\eta) = 0$.
D'après cela l'équation générale devient
$B.N.X + AMY = 0$: ou bien $(A-B)\sin\eta\,.\,\cos\eta\,.\,(\Sigma.Pl.\cos\gamma)(\Sigma.P.\sin\gamma) = 0$.

Pour une forme de corps quelconque qui aurait $A >$ ou $< B$, cette dernière pourra encore être remplie de trois manières différentes: savoir par $\Sigma P\sin\gamma = 0$, $\Sigma Pl\cos\eta = 0$, $\sin\eta\cos\eta = 0$, respectivement. L'égalité à zéro du facteur $\sin\eta\cos\eta$, ramène à ce qu'on connaît déjà: celle $\Sigma Pl.\cos\gamma = 0$ ne saurait être admise pour une disposition générale des forces dans le plan dont il s'agit, puisqu'elle exprime la somme de leurs moments autour d'un axe perpendiculaire à ce plan, et partant situé dans le plan d'inertie yIx. Il ne reste donc

que l'égalité $\Sigma . P . \sin\gamma = 0$ qui nous montre que si la somme des projections de plusieurs forces situées dans un plan du point fixe, perpendiculaire à un plan principal, est nulle sur ce dernièr plan, ces forces ébranleront le solide autour d'un axe normal à leur résultante. Enfin, l'égalité à zéro du facteur $(A-B)$ nous ramène à une propriété des solides de seconde espèce; déjà étudiée plus haut (voir Rémarque VIII).

Rémarque XIV. Sans nous arrêter à signaler des conséquences de notre solution, dèjà bien connues dans la science élémentaire, nous examinerons le cas de l'effet dynamique instantané d'un système de deux forces parallèles, égales, mais contraires, et qui ne sont pas diamètralement opposées. On demande de déterminer l'axe d'ébranlement du corps, correspondant à un tel système de forces?

Soient (a, b), (a', b') les points de rencontre des deux forces proposées avec le plan d'inertie (xIy): α, β, γ les angles de la direction de l'une d'elles avec les axes coordonnés: on aura pour les moments autour des trois axes:

$$N = -P(b-b')\cos\gamma : M = P(a-a')\cos\gamma;$$
$$L = P.(b-b')\cos\alpha - P(a-a')\cos\beta:$$

partant, en vertu des formules (III):

$$\cos C = -\frac{P\cos\gamma(b-b')}{K_1 \cdot A} \quad ; \quad \cos B_1 = \frac{P\cos\gamma(a-a')}{K_1 \cdot B}$$
$$\cos A_1 = \frac{P\cos\alpha(b-b') - P\cos\beta(a-a')}{K_1 \cdot C},$$

valeurs dans lesquelles on a fait pour abréger:

$$K_1 = P . \sqrt{\left[\left(\left(\frac{b-b'}{A}\right)^2\right) + \left(\frac{a-a'}{B}\right)^2 \cos^2\gamma + \left(\frac{b-b'}{C}\cos\alpha - \frac{a-a'}{C}\cos\beta\right)^2\right]}.$$

Pour que les deux forces du système tendent à tourner et tournent en effet le solide autour d'un axe instantané, perpendiculaire à leur plan partout à leur commune direction, il faut que la valeur générale de l'angle compris entre l'axe et la direction $(\alpha\beta\gamma)$ soit droit, ce qui donnera:

$$\cos\alpha\cos C_1 + \cos\beta\cos B_1 + \cos\gamma . \cos A_1 = 0.$$

Cette condition devient par substitution:

$$-\frac{\cos\alpha\cos\gamma(b-b')}{K_1 \cdot A} + \frac{\cos\beta\cos\gamma(a-a')}{K_1 \cdot B} + \cos\gamma . \frac{\cos\alpha(b-b') - \cos\beta(a-a')}{C \cdot K_1} = 0.$$

et revient à celle-ci:

$$\left[(b-b')\cos\alpha . \left(\frac{1}{C} - \frac{I}{A}\right) + (a-a')\cos\beta . \left(\frac{I}{B} - \frac{1}{C}\right)\right] . \cos\gamma = 0.$$

Or on n'a pas généralement $\cos\gamma = 0$, ni $A = B = C$; et l'équation de condition obtenue n'est parconséquent pas identique en général, et fournit pour β autant de valeurs différentes que l'on voudra attribuer de valeurs différente à α; mais elle devient identique: 1) pour $\gamma = 90^0 - 2$); pour $\alpha = 90^0$, $\beta = 90^0$. Ainsi deux forces parallèles, égales et contraires, tourneront bien le solide autour d'un axe perpendiculaire dans de certains cas particuliers, faciles à énoncer; mais en général la rotation se fera autour d'un axe oblique à leur plan. Ainsi ce que l'on nomme l'axe *d'un couple* (la perpendiculaire au plan des forces) est loin d'être généralement l'axe effectif de la tendence à la rotation.

Cet axe de couple n'est donc qu'une ligne idéale qui peut entraîner, les commençants surtout, aux idées les plus fausses sur l'effet dynamique instantané des forces. On nous objectera vainement que dans la théorie des moments, on conçoit pareillement et souvent un axe idéal; cas alors qu'on en vient à cette théorie, on a déjà de bonnes idées sur la science élémentaire; et d'ailleurs, en concevant les moments et leur théorie de la manière indiquée sommairement dans notre premier mémoire, on évite entièrement le grave inconvénient, particulièrement inhérent à ce qu'on nomme parfois de nos jours la théorie des couples, quoique ce ne soit, selon nous, ni une théorie, ni un principe nouveau; c'est simplement un moyen de recherche ingenieux pour le cas où il faut raisonner sur des forces appliquées à un corps rigide, et où alors la notion des moments peut aussi toujours être employée avec succés et simplicité. D'ailleurs nous ignorons si la question dont nous venous de donner la solution, concernant la direction de l'axe de rotation d'un couple, appliqué à un solide pourvu d'un point fixe, a été déjà resolue. Quoiqu'il en soit, elle constitue la premiere base de ce qu'il conviendrait de nommer la *théorie dynamique des couples;* et plus loin on en examinera les effets sur un corps solide parfaitement libre; ce qui ne constitue qu'un cas tout spécial de la question générale du (§. 9), relative au mouvement naissant d'un corps libre. Quant aux propriétés statiques des couples, elles ne sont que des conséquences des principes fondamentaux de la science, et l'idée premiere qu'éveille la définition du couple nous paraît-trop vague, trop dynamique que pour pouvoir être prise à son tour comme base, comme point de départ de ces notions elles-mêmes. Celles-ci aussi ont, il est vrai, leur côté metaphysique; mais elles sont plus simples, plus directes, plus saisissantes. Eh quoi, on va jusqu'à vouloir deguiser l'antique principe du levier sous une forme embarassante dont il faut de nouveau le depouiller quand une fois il s'agit d'en venir aux applications si fréquentes et si immédiates, dont il est susceptible. —

§. 5.

Quand un corps solide est en équilibre sous l'action de plusieurs forces par le moyen d'un point fixe, ce point souffre une pression égale en grandeur et en direction à la résultante de transport de ces forces. En effet, N, M, L étant les sommes des moments des forces autour des axes Ix, Iy, Iz du point fixe, nous aurons d'après les conditions d'équilibre connues, nécessaires et suffisantes:

$$N = 0 \quad , \quad M = 0 \quad , \quad L = 0.$$

Mais en désignant par N', M', L' les moments de la force unique π, capable du même effet de mouvement sur le solide, on à évidemment, et aussi par les équations (I') de la rémarque XI: $N' = N$, $M' = M$, $L' = L$, partant $N' = 0$, $M' = 0$, $L' = 0$. Les équations (2') donnent donc:

$$-\pi \cos \varphi \,.\, b = 0 \quad , \quad \pi \cos \varphi \,.\, a = 0 \quad , \quad \text{d'où } a = 0 \quad , \quad b = 0.$$

Ainsi la force unique π, capable du même effet de mouvement, ou la résultante dynamique des forces proposées, doit passer par l'origine ou par le point fixe du corps; ce qui était d'ailleurs évident d'avance: mais de ce que $N=0$, $M=0$, $L=0$, l'equation de condition d'une résultante effective est satisfaite identiquement; de sorte que les forces équilibrantes ont une résultante effective; et celle-ci doit passer par le point fixe; car dans la supposition contraire elle aurait une certaine énergie à faire turbiner le corps autour du point fixe; contrairement à l'hypothèse de l'équilibre. Donc le point fixe éprouve une pression égale à la résultante de transport ou à la résultante effective; ce qui ici revient au même par démonstration. Ainsi, quand des forces se font équilibre sur un corps solide par le moyen d'un point fixe, la pression soufferte est la même que si les forces se transmettaient parallèlement à elles-mêmes en ce point. On nommera cet énoncé, pour abréger, *le principe de la transmission des forces équilbriantes.* Ce-ci étant admis, proposons nous d'évaluer la pression soufferte par le centre d'inertie fixe d'un corps rigide qui se trouve soumis à l'activité simultanée de diverses forces, et s'ébranle par suite de leur action, d'une rotation instantanée, infiniment petite du second ou du premier ordre? Soient (fig. 3) IO l'axe d'ébranlement; A la position d'un élément quelconque dm du solide; At une tangente en A au cercle que dm tend à décrire autour de IO; AB le rayon de ce cercle; BD une droite parallèle à At. Les trois droites IO, BA, BD sont donc deux-à-deux normales entr'elles, et forment comme trois axes coordonnés rectangulaires. Posons, comme plus haut:

$$\mathbf{O}\hat{I}X = C_1 \quad , \quad \mathbf{O}\hat{I}y = B_1 \quad , \quad \mathbf{O}\hat{I}z = A_1 \, , \quad \text{et ensuite:}$$

$$(DB, \hat{I}X) = C_1' : (DB, \hat{I}y) = B_1' \, ; \; (DB, \hat{I}Z) = A_1'.$$

Si l'on nomme encore x, y, z les coordonnées du point A à l'instant de la secousse ou de la pression; x', y', z' celles du pied B de la perpendiculaire $AB = \lambda$. on aura:

$$\cos(A\hat{B}, x) = \frac{x - x'}{\lambda} \, , \quad \cos(A\hat{B}, y) = \frac{y - y'}{\lambda} \, , \quad \cos(A\hat{B}, z) = \frac{z \cdot z'}{\lambda} :$$

La réaction d'inertie de l'élément dm en A sera

$$\frac{2d\xi}{dt^2} . \lambda . dm$$

et dirigée suivant la tangente At, si la rotation est censée tendre de A vers C, ou de droite à gauche pour un observateur fictif, qui aurait l'oeil en (0) et qui regarderait de (0) vers I, la partie du solide supérieure à l'axe IO. Si l'on considère ensuite que la ligne At est à la fois normale aux droites AB, AI, on trouvera à l'aide d'une transformation qu'au besoin on fera connaître plus loin:

$$\cos(t\hat{A}, x) \text{ ou } \cos C_1' = \cos B_1 \cos(B\hat{A}, z) - \cos A_1 \cos(B\hat{A}, y)$$

$$\cos(t\hat{A}, y) \text{ ou } \cos B_1' = \cos A_1 \cos(B\hat{A}, x) - \cos C_1 \cos(B\hat{A}, z),$$

$$\cos(t\hat{A}, z) \text{ ou } \cos A_1' = \cos C_1 \cos(B\hat{A}, y) - \cos B_1 \cos(B\hat{A}, x):$$

d'où:

$$\cos C_1' = \cos B_1 . \left(\frac{z - z}{\lambda}\right) - \cos A_1 \left(\frac{y - y'}{\lambda}\right)$$

$$\cos B_1' = \cos A_1 . \left(\frac{x - x'}{\lambda}\right) - \cos C_1 \left(\frac{z - z'}{\lambda}\right)$$

$$\cos A_1' = \cos C_1 . \left(\frac{y - y'}{\lambda}\right) - \cos B_1 \left(\frac{x - x'}{\lambda}\right).$$

Ainsi la force d'inertie tangentielle de l'élément en A aura parallèlement aux trois axes d'inertie les trois composantes:

$$\frac{2d\xi}{dt^2} . \lambda . dm . \cos C_1' = \frac{2d\xi}{dt^2} (\cos B_1 z dm - \cos B_1 z' dm + \cos A_1 y' dm - \cos A y dm)$$

$$\frac{2d\xi}{dt^2} . \lambda . dm . \cos B_1' = \frac{2d\xi}{dt^2} (\cos A_1 x dm - \cos A_1 x' dm + \cos C_1 z' dm - \cos C z dm)$$

$$\frac{2d\xi}{dt^2} . \lambda . dm . \cos A_1' = \frac{2d\xi}{dt^2} (\cos C_1 y dm - \cos C_1 y' dm + \cos B_1 x' dm - \cos B x dm).$$

(La suite au cahier prochain.)

10.

Mémoire de mécanique, relatif au mouvement de rotation et au mouvement naissant des corps solides.

(Par Mr. *Steichen*, professeur à l'école militaire de Bruxelles.)

(Suite du mémoire No. 9. du cahier précédent.)

Pour avoir les projections des réactions d'inertie totales sur les trois axes coordonnés, on n'aura qu'à intégrer les valeurs précédentes dans toute l'étendue de la masse; et comme, par hypothèse, c'est le centre d'inertie qui est fixe, on a, par définition: $\int x\,dm = 0$, $\int y\,dm = 0$, $\int z\,dm = 0$: de sorte qu'il ne reste plus pour la projection totale sur l'axe des abscisses que la valeur simplifiée:

$$\frac{2\,d\xi}{dt^2}\left(\cos A_1 \int y'\,dm - \cos B_1 \int z'\,dm\right).$$

Et si l'on pose pour un moment $BI = u$, on a $x' = u\cos C_1$, $y' = u\cos B_1$, $z' = u\cos A_1$, partant $\int y'\,dm = \cos B_1 \int u\,dm$, $\int z'\,dm = \cos A_1 \int u\,dm$: partant identiquement:

$$\cos A_1 \int y'\,dm - \cos B_1 \int z'\,dm = 0;$$

et cette égalité à zéro du premier membre subsisterait par conséquent encore dans la supposition plus générale que le solide ait un point fixe quelconque. On voit donc d'abord que la somme des projections des réactions d'inertie tangentielles, dûes à l'ébranlement sur l'un quelconque des axes coordonnés, ou sur l'une quelconque des trois lignes d'inertie du solide, est nulle; partant que la résultante de transport de ces forces est nulle, toutes les fois que le corps solide, sur lequel on agit, est fixé par son centre d'inertie. Mais d'un autre côté il doit y avoir équilibre entre les forces sollicitantes et les réactions d'inertié qu'elles provoquent. Donc toutes ces forces doivent se transmettre parallèlement à elles-mêmes sur le point fixe; et comme la résultante des réactions est nulle, il s'ensuit que lors de l'ébranlement le centre d'inertie souffre une pression ou une percussion égale à la résultante de transport des forces sollicitantes de pression ou de percussion. De là on conclut encore qu'un corps solide, fixé par son centre mécanique, ne saurait jamais être ébranlé ni percuté, sans qu'il y ait en même temps pression ou trépidation sur ce point: cette pression ne saurait être nulle que pour un couple de forces dont la résultante de transport est nulle évidemment; et encore pour le cas d'une force infiniment petite, appliquée au corps à une distance infinie; ce qui est impossible à realiser dans l'état réel des choses.

§. 6.

Continuation. Examen d'un cas plus général.

Maintenant nous sommes en état aussi d'évaluer la pression du point fixe, alors même qu'il diffère du centre, et qu'il se trouve à l'exterieur ou à l'intérieur du solide proposé. En effet, en nommant π_x, π_y, π_z les composantes suivant les coordonnés ox, oy, oz du point fixe (o), composantes des réactions tangentielles d'inertie, ou aura d'après le No. précédent, μ exprimant la masse, et x, y, z les coordonnées du centre d'inertie, rapporté à ces axes:

$$\pi_x = \frac{2d\xi}{dt^2} \cdot \mu z_1 \cos B_1 = \frac{2d\xi}{dt^2} \mu y_1 \cos A_1$$

$$\pi_y = \frac{2d\xi}{dt^2} \cdot \mu x_1 \cos A_1 = \frac{2d\xi}{dt^2} \cdot \mu z_1 \cos C_1$$

$$\pi_z = \frac{2d\xi}{dt^3} \cdot \mu y_1 \cos C_1 = \frac{2d\xi}{dt^2} \mu x_1 \cos B_1.$$

Si l'on tient compte de la valeur de la rotation élémentaire $d\xi$, fournie par la dernière équation (VI) en fonction des quantités N, M, L, A, B, C, qui expriment ici les énergies de rotation des forces autour des nouveaux axes et les moments d'inertie du solide relatifs à ces axes, on pourra faire aussi en quantités toutes finies:

$$\text{(A.)} \qquad \begin{cases} \pi_x = (z_1 \cos B_1 - y_1 \cos A_1) \cdot \mu K \\ \pi_y = (x_1 \cos A_1 - z_1 \cos C_1) \cdot \mu K \\ \pi_z = (y_1 \cos C_1 - x_1 \cos B_1) \cdot \mu K. \end{cases}$$

Si l'on tient compte des relations qui lient entr'elles les rotations composantes à la rotation résultante, on pourra faire encore:

$$\pi_x = \frac{2d\omega}{dt^2} \mu z_1 - \frac{2d\varphi}{dt^2} \cdot \mu y_1$$

$$\pi_y = \frac{2d\varphi}{dt^2} \mu x_1 - \frac{2d\psi}{dt^2} \cdot \mu z_1$$

$$\pi_z = \frac{2d\psi}{dt^2} \mu y_1 - \frac{2d\omega}{dt^2} \cdot \mu x_1.$$

En substituant dans celle-ci les valeurs des rotations élémentaires $d\psi$, $d\omega$, $d\varphi$, fournies par les égalités (III. §. 4), on obtient les équations non moins symétriques:

$$\text{(B.)} \qquad \begin{cases} \pi_x = \frac{M}{B} \mu z_1 - \frac{L}{C} \cdot \mu y_1 \\ \pi_y = \frac{L}{C} \mu x_1 - \frac{N}{A} \cdot \mu z_1 \\ \pi_z = \frac{N}{A} \mu y_1 - \frac{M}{B} \cdot \mu x_1. \end{cases}$$

Autrement encore. On peut donner de la même question une solution plus simple encore, et non moins rigoureuse que la première. Puisque d'après le principe

de la composition des mouvements, la rotation élémentaire totale autour de l'axe OK (cet axe se nomme IO, quand I est fixe), se compose des trois rotations instantanées et partielles autour des axes coordonnés rectangles (ox,oy,oz), la réaction tangentielle totale en A, dirigée de A vers t (Fig. 3 et 4), doit résulter pour chaque molécule dm, des réactions tangentielles qui correspondent aux rotations fictives $(d\psi, d\omega, d\varphi)$ et qui agissent dans des plans normaux aux axes directeurs, en sens contraires de ces mouvements partiels. Or, en comptant l'axe résultant OK de (o) vers K, et l'amenant d'abord sur celui de z positif, l'observateur, qui regarderait de K vers (o), verrait dans l'angle (yox), je suppose, la rotation se faire sur oz de droite à gauche. Ainsi tout élément inerte, ébranlé, et situé dans l'angle (yox), réagit avec une énergie tangentielle dûe à $d\varphi$, égale à $\frac{2d\varphi}{dt^2}.OA.dm$, et dirigée dans le sens de Af de A vers f. Cet élément donne donc lieu à une composante qui se réduit suivant l'axe des x à $-\frac{2d\varphi}{dt^2}.OA.dm.\frac{y}{OA} = -\frac{2d\varphi}{dt^2}.ydm$ et suivant l'axe oy à celle $= \frac{2d\varphi}{dt^2}.xdm$.

La rotation élémentaire $d\omega$ autour de l'axe oy engendre les forces partielles

$$+\frac{2d\omega}{dt^2}.zdm \quad \text{parallèlement à } ox,$$

$$-\frac{2d\omega}{dt^2}.xdm \quad \text{parallèlement à } oz.$$

De même, la rotation autour de ox donne les composantes

$$-\frac{2d\psi}{dt^2}.zdm \quad \text{parallèlement à } oy,$$

$$+\frac{2d\psi}{dt^2}.ydm \quad \text{parallèlement à } oz.$$

Ainsi la projection orthogonale de la force élémentaire totale, sur les trois axes coordonnés a les valeurs:

$$\frac{2d\omega}{dt^2}.zdm - \frac{2d\varphi}{dt^2}.ydm \text{ parallèlement à } ox,$$

$$\frac{2d\varphi}{dt^2}.xdm - \frac{2d\psi}{dt^2}.zdm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots oy,$$

$$\frac{2d\psi}{dt^2}.ydm - \frac{2d\omega}{dt^2}.xdm \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots oz.$$

Or il est manifeste que pour avoir la résultante de transport de toutes les réactions d'inertie tangentielles, relatives aux différents éléments de la masse, il faut faire la somme, ou prendre l'intégrale de chaque groupe de forces, et extraire la racine carrée de la somme des carrés des trois intégrales définies, ainsi formées.

Divisant ensuite chaque intégrale partielle par cette racine carrée, on obtiendra les cosinus des angles compris entre la direction de la résultante de transport et entre les trois axes coordonnés. Ces sommes ou intégrales partielles sont précisement les valeurs trouvées par la premiere méthode pour les quantités π_x, π_y, π_z. Si en outre $\tilde{\omega}$ exprime la résultante de transport des réactions, et λ, μ, ν les angles de sa direction avec les axes ox, oy, oz, on aura:

$$\tilde{\omega} = \sqrt{(\pi_x^2 + \pi_y^2 + \pi_z^2)}\ , \quad \cos\lambda = \frac{\pi_x}{\tilde{\omega}}\ , \quad \cos\mu = \frac{\pi_y}{\tilde{\omega}}\ , \quad \cos\nu = \frac{\pi_z}{\tilde{\omega}};$$

et les quantités π_x, π_y, π_z sont connues par les équations (B).

Nous ne devons pas omettre de faire observer que dans les deux derniers No. on a considéré comme positive toute rotation se faisant de droite à gauche: partant que dans les valeurs données par les équations (B), et ses analogues, les moments N, M, L doivent être pris avec des signes contraires à ceux qu'on leur attribue habituellement par suite d'une convention différente.

Rémarque I. Est-il possible de trouver un système de forces, capable d'ébranler ou de percuter le corps autour d'un point fixe excentrique, sans que celui-ci souffre d'autre pression que celle dûe aux forces sollicitantes?

Pour remplir les conditions du problème, il faut faire à la fois $\pi = 0$, $\pi_y = 0$, $\pi_z = 0$: et les équations (A) donneront:

$\cos B_1 z_1 - \cos A_1 y_1 = 0$, $\cos A_1 x_1 - \cos C_1 z_1 = 0$, $\cos C_1 y_1 - \cos B_1 x_1 = 0$: résultats dont l'un quelconque est une conséquence identique des deux autres. De plus, en attribuant pour un instant à x, y, z, une signification d'indéterminée, on voit qu'ils représentent les équations de l'axe instantané de rotation, et que cet axe passe par le centre I du solide. Donc, pour que la question soit possible, non seulement pour $x_1, y_1, z_1 = 0$, mais par un point fixe quelconque, les forces doivent être disposées de façon qu'elles ébranlent le solide autour d'un axe du point fixe, passant par le centre d'inertie. Ainsi, dans le cas où ces deux points sont donnés, de même que la position du solide, on déterminera un système de forces propres à satisfaire aux conditions trouvées, lesquelles se reduisent en vertu des valeurs de $C_1 B_1 A_1$ à ces autres:

$$C.M.z_1 = B.L.y_1 \ : \ A.L.x_1 = C.N.z_1.$$

Celles-ci deviennent dans l'hypothèse d'une seule force P dont les composantes rectangles seraient X, Y, Z, et le point d'application (a, b, c):

$$C.z_1(aZ - c.X) = B.y_1(bX - aY)$$
$$A.x_1(bX - a.Y) = C.z_1(cY - bZ).$$

Comme l'une quelconque des trois coordonnées reste arbitraire, on peut faire

$c = 0$: ce qui simplifie ces conditions. De plus, comme il recte cinq indéterminées X, Y, Z, a, b, et qu'il n'y a que deux équations de condition, on voit que la question est susceptible d'une infinité de solutions.

Rémarque II. Les valeurs de π_x, π_y, π_z des équations (B) conduisent à une conséquence curieuse, en ce qu'elles montrent que la résultante de transport des réactions tangentielles, estimée suivant la droite OI qui joint le centre et le point fixe, est nulle, et que parconséquent elle doit être elle-même parallèle à la ligne d'intersection d'un plan normal à l'axe OK de rotation avec un plan normal à la ligne centrale OI. En effet, dans le raisonnement des No. 5 et 6, les axes ox, oy, oz, quoique rectangles, sont restés arbitraires de direction. Rien n'empêche donc de diriger le premier ox suivant OI, ce qui donnera à la fois:

$$y_1 = 0, \quad z_1 = 0, \text{ partant } \pi_x = 0, \ \pi_y = \frac{L}{C}\mu x_1, \ \pi_z = -\frac{M}{B}\cdot\mu x_1.$$

Mais pour énoncer qu'ici nous adoptons un système particulier d'axes coordonnés, accentuons tout ce qui s'y rapporte; et soient ox', oy', oz' les désignations du nouveau système: d'où

$$\pi_{x_1} = 0 \ , \quad \pi_{y_1} = \frac{L'}{C'}\cdot\mu x_1' \ : \quad \pi_{z_1} = -\frac{M'}{B'}\cdot\mu x_1' \ .$$

La résultante et sa direction seront données par les équations

$$\tilde{\omega} = \mu x_1'\cdot\sqrt{\left(\frac{L'^2}{C'^2} + \frac{M'^2}{B'^2}\right)}$$

$$\cos(\tilde{\omega}\hat{,}y') = \frac{L'}{C'} : \sqrt{\left(\frac{L'^2}{C'^2} + \frac{M'^2}{B'^2}\right)} \ , \quad \cos(\tilde{\omega}\hat{,}z') = -\frac{M'}{B'} : \sqrt{\left(\frac{L'^2}{C'^2} + \frac{M'^2}{B'^2}\right)} :$$

expressions dans lesquelles les quantités B', C' sont les moments d'inertie du corps par rapport à des axes rectangles tracés dans le plan $y'z'$, normal en (0) à la ligne centrale ox' ou OI, tandis que M', L' sont les moments des forces à tourner le corps autour de ces axes. La direction de l'axe de rotation sera donnée par les formules

$$\cos(K\hat{o}x') = \frac{N'}{A'K'} \ , \quad \cos(K\hat{o}y') = \frac{M'}{B'K'} \ , \quad \cos(K\hat{o}z') = \frac{L'}{C'K'} :$$

Si les forces sont toutes dirigées dans des plans qui se coupent suivant la ligne centrale, on aura $N'=0$: partant $\cos(k\hat{o}z') = \cos(\tilde{\omega}\hat{,}y')$, $\cos(ko\hat{\ }y') = -\cos(\tilde{\omega}\hat{,}z')$; et il faudra parconséquent que l'axe ok soit alors normal à la direction de la résultante d'inertie, et située avec elle dans plan le $(z'oy')$.

Concevons de nouveau que le tout soit rapporté à un système d'axes coordonnés rectangles quelconques que nous pouvons faire coïncider, soit avec les axes permanents en (o), soit avec des droites parallèles aux trois lignes d'inertie

centrales. Puisque l'on vient de reconnaître que la résultante d'inertie croise à angle droit la droite *OI*, il s'ensuit qu'en faisant

$$x_1 = \nu_1 \cos\alpha_1 \ , \quad y_1 = \nu_1 \cos\beta \ , \quad z_1 = \nu_1 \cos\gamma \ ,$$ on doit avoir:

$$\cos\alpha \cos\lambda + \cos\beta . \cos\mu + \cos\gamma . \cos\nu = 0;$$

ou bien: $$x_1 . \pi_x + y_1 . \pi_y + z_1 . \pi_z = 0:$$

équation de rotation qu'on peut déduire aussi des équations (B), en multipliant la première par x_1, la seconde par y_1, et la troisième par z_1:

Les moments anti-dynamiques des réactions doivent être égaux à la somme des moments dynamiques des actions, à cause de l'équilibre qu'il y a entr'elles. Donc, pour que les réactions puissent avoir une résultante unique, égale à celle de leur transport parallèle, il faudra avoir, comme pour les forces actives:

$$N . \pi_x + M . \pi_y + L . \pi_z = 0.$$

Or, eu égard à l'avant-dernière équation de condition, on voit que la dernière est satisfaite toutes les fois que les forces sont disposées de façon à avoir des moments de rotation autour des axes *ox*, *oy*, *oz*, respectivement proportionnels aux projections de la ligne *OI* sur ces mêmes axes: car cette hypothèse fait rentrer la dernière équation dans l'autre, qui est toujours satisfaite.

Rémarque III. Trouver dans le cas d'une force unique, appliquée au solide, les conditions nécessaires pour que la pression transmise au point fixe et dûe à l'action et aux réactions à la fois, soit nulle.

Dirigeons les axes coordonnés suivant les lignes *ox'*, *oy'*, *oz'* (Voir. rémarq. II.). La condition du problème exige donc que l'on ait:

$$\pi_{x'} + X' = 0 \ , \quad \pi_{y'} + Y' = 0 \ , \quad \pi_{z'} + Z' = 0,$$

X', Y', Z' désignant les projections orthogonale de la force sur ses axes. La première condition devient $X' = 0$, en vertu de ce qui est déjà dit, et montre que la force sollicitante doit être dirigée dans un plan normal à ox', c'est-à-dire à la ligne centrale. De plus, à cause de la direction des axes coordonnés, on a $z_1' = 0$, $y_1' = 0$; partant:

$$\pi_{y'} = \frac{L'}{C'} \mu x_1' \ , \quad \pi_{z'} = -\frac{M'}{B'} \mu x_1' : \quad \text{ce qui donne:}$$

$$Y' = -\frac{L'}{C'} . \mu x_1' \ , \quad Z' = +\frac{M'}{B'} . \mu x_1' .$$

De plus, la condition $X' = 0$ réduit les valeurs des moments L', M', N' à

$$L' = -Y' . x \ , \quad M' = Z' . x \ , \quad N' = Y' z - Z' . y \ ,$$

(x, y, z) dénotant toujours les coordonnées du point d'application de la force unique proposée. Les signes des moments s'expliquent par l'observation présentée à la fin du (§. 6) même; et comme cette force, quelle que soit sa direction, doit couper, ou le plan (z', x'), ou le plan (y', x'), puisqu' elle doit se trouver dans un plan parallèle à $z'oy'$, perpendiculaire à OI, on pourra faire encore $y=0$; alors (x, z) seront les coordonnées de son point de rencontre avec (z', y'): cela donne:

$$L' = -Y'.x \quad ; \quad M' = +Z'.x \quad ; \quad N' = Y'.z :$$

Substituant ces valeurs des moments dans celles de Y', Z', en $\pi_{y'}$, $\pi_{z'}$, dont les valeurs mêmes sont données par la remarque précédente, on obtient les conditions

$$\mu x.x_1' = C' \quad , \quad \mu x.x_1' = B'$$

lesquelles sont seulement possibles dans le cas de $B' = C'$: ce qui suppose que l'on puisse trouver dans le plan $z'oy'$, normal à OI en (o), deux axes rectangulaires oz', oy' par rapport auxquels les moments d'inertie du solide soient égaux entr'eux. Nous examinerons plus bas la possibilité de cette condition. En l'admettant ici, on a la direction de l'axe d'ébranlement par les équations

$$\cos(K\hat{o}I) = \frac{N'}{A'K'} \quad , \quad \cos(K\hat{o}y') = \frac{M'}{B'K'} \quad , \quad \cos(K\hat{o}z') = \frac{L'}{BK'} :$$

$$= \frac{Y'.z}{A'K'} \quad , \quad = \frac{Z'x}{B'K'} \quad , \quad = -\frac{Y'.x}{B'K'} .$$

Si l'on multiplie ces équations, la première par $\frac{X'}{R}$, (R étant la force totale), la seconde par $\frac{Y'}{R}$, la troisième par $\frac{Z'}{R}$, qu'ensuite on les ajoute membre-à-membre, ou obtient, eu égard à l'égalité $X' = 0$, l'équation suivante:

$$\cos K\hat{O}I)\cos(R\hat{O}I) + \cos(K\hat{o}y')\cos(R\hat{o}y') + \cos(Koz')\cos(R\hat{o}z') = 0,$$

qui démontre que l'axe d'ébranlement et la direction de la force R se croisent à angle droit dans l'espace; et cette circonstance s'accorde parfaitement avec ce que l'on a déjà vu sur la direction de la résultante de transport des réactions tangentielles.

Si la ligne d'action de la force R vient couper la ligne centrale OI en un point I', on a $z = 0$, $\cos K\hat{O}I = 0$; et l'axe d'ébranlement se trouvera dans le plan $(z'oy')$, dans une position perpendiculaire à la projection de la force R sur ce plan. De plus, la distance x du plan de R au plan parallèle $(z'oy')$, est donnée par l'équation obtenue plus haut:

$$x = \frac{C'}{\mu x_1'} = \frac{B'}{\mu x_1'}.$$

Rémarque IV. Concevons par le centre d'inertie un plan normal à IO, et traçons dans ce plan deux axes Iy'', Iz'' respectivement parallèles à Ox', Oy'; ceux-ci étant censés déterminés de direction par la condition $C' = B'$. Si l'on nomme μk^2, μl^2 les moments d'inertie du solide, relatifs à ces nouveaux axes en I, on aura, d'après une transformation connue:

$$C' = \mu l^2 + \mu x_1'^2 \quad , \quad B' = \mu k^2 + \mu . x_1'^2 :$$

partant $\mu l^2 = \mu k^2$, en vertu de la condition $C' = B'$; et

$$(A.) \qquad x = \frac{\mu x_1'^2 + \mu k^2}{\mu . x_1'} = x_1' + \frac{k^2}{x_1'} :$$

Nous voyons par là que si l'on peut trouver au centre d'inertie d un solide deux axes rectangles à moments égaux, on n'aura qu'à élever en ce point une perpendiculaire au plan des axes; et que tout point (o) de cette droite sera propre à donner la solution de la question. Fixant donc un tel point (o) du solide, on ébranlera-celui-ci par une force appliquée d'une manière quelconque dans un plan P, *normal* à la ligne OI, et *distant* du plan $(z'oy')$ d'une quantité x que détermine l'équation (A), et on aura une pression nulle sur le point fixe. Car dans cet état des choses, la résultante de transport des réactions tangentielles d'inertie est égale et contraire à la force de pression ou de percussion appliquée au corps. C'est en effet ce que l'on peut vérifier immédiatement; car en reprenant les valeurs des quantités $\cos(\tilde{\omega}, y')$, $\cos(\tilde{\omega}, z')$, données dans la rémarque (II), et y substituant pour L', M' leurs valeurs $L' = -Y'x$, $M' = Z'x$, et de plus introduisant la condition $C' = B'$, on trouvera pour $\cos(\tilde{\omega}, y')$, $\cos(\tilde{\omega}, z')$ des valeurs indépendantes de la nature même du solide percuté, à savoir:

$$\cos(\tilde{\omega}, y') = -Y' : \sqrt{(y'^2 + Z'^2)} = -y' : R \quad , \quad \cos(\tilde{\omega}, z') = -Z' . R: \text{ partant:}$$

$$\cos(\tilde{\omega}, y') = -\cos(R, y') \quad , \quad \cos(\tilde{\omega}, z') = -\cos(R, z').$$

Faisons rémarquer que tout cela est vrai encore pour les cas de plusieurs forces sollicitantes, pourvu qu'elles soient reductibles à une force unique qui soit située de la manière indiquée ci-dessus.

On a ensuite pour la direction de l'axe de rotation:

$$\cos(K\delta I) = \mu . Y' . z . x_1' : \sqrt{[\mu^2 Y'^2 . z^2 . x_1'^2 + A'^2 (Y'^2 + Z'^2)]},$$

$$\cos(K\delta y') = A' . Z' : \sqrt{(\mu^2 Y'^2 z^2 x_1'^2)} + \text{etc.}$$

$$\cos(K\delta z') = -A' . Y' : \sqrt{(\mu^2 Y'^2 z^2 x_1'^2)} + \text{etc.}$$

Ne perdons pas de vue ce qui est déjà démontré, à savoir que quelle que soit la direction de la force R dans son plan P, elle ébranlera le solide autour d'un axe OK, qui la croise à angle droit. Puisque donc P est normal à ox', ou à la ligne centrale OI, il s'ensuit que R est aussi normale de direction avec OI, partant que cette force est perpendiculaire au plan mené en (o) suivant les deux droites OK, OI. Ainsi, connaissant un point convenable, et se donnant l'axe de rotation instantanée OK, il faudra choisir la force (R) dans le plan P, et la diriger normalement au plan IOK. Soit $\delta\delta'$ la ligne d'intersection du plan IOK avec le plan P: R devra agir dans P, et normalement à la ligne $\delta\delta'$. Mais en quelque point de $\delta\delta'$ qu'on fasse agir une force ainsi dirigée, on obtiendra sur le point fixe une secousse ou une pression nulle. Le point d'application exterieur d'une force unique, ainsi appliquée, est ce qu'on peut nommer *un point de percussion extérieur* du solide, et son point de rencontre avec la ligne $\delta\delta'$, ou avec le plan IOK, est ce qu'on peut nommer *un point de percussion intérieur*. Mais peu importe qu'on admette ou qu'on n'admette pas ces dénominations. La question essentielle consistait pour nous à reconnaître les circonstances et les conditions générales dans lesquelles le solide peut être ébranlé, sans qu'il en résulte une pression sur le point fixe. Cette question se trouve maintenant resolue, quoiqu' elle n'embrasse pas comme cas tout particulier la théorie ordinaire du centre de percussion. D'ailleurs cette théorie ordinaire, telle qu'on l'établit habituellement dans les traités de mécanique rationnelle, nous parait même erronée en ce sens qu'on y admet tacitement qu'on ne saurait ébranler un solide sur un point fixe, sans que celui-ci éprouve une *pression* ou *secousse*, que dans le cas où l'axe d'ébranlement serait un axe permanent de rotation. En outre, cette théorie n'assigne pas même d'une manière précise et préalable le mode d'application de la force, requis pour que l'ébranlement se fasse autour d'un axe permanent, dans le cas d'un seul point fixe; puisqu'elle prend les choses d'un point de vue plus restreint encore, et qu'elle part de la supposition d'un axe d'abord fixe: ce qui est tout différent de la supposition d'un simple point fixe.

Pour éviter ici tout mal-etendu, transcrivons les conclusions de cette théorie, formulées par *Poisson* t. II. p. 87:

„Quand un corps solide, retenu par un axe fixe, est frappé par un second „corps dont la masse demeure attachée a celle du premier, il faut, pourqu'il n'yait „aucune percussion sur l'axe fixe, 1) que le choc soit dirigé dans le plan de deux „droites qui font avec l'axe fixe un système rectangulaire d'axes principaux du corps „formé des deux masses réunies; 2) que sa direction soit perpendiculaire au plan

„du centre de gravité de corps et de l'axe fixe; 3) que cette direction du choc ren-„contre ce plan en un point dont la distance f à l'axe de rotation est donnée par „la formule $f = \int r^2 dm : Mr_1$; ce point se nomme *centre de percussion.*"

Cet énoncé, pris dans un sens rigoureux, comme on doit le faire en pareil cas, n'est pas exact, puisque notre analyse prouve que l'on peut obtenir une percussion d'action et de réaction nulle sur le point fixe (o), et partant sur toute l'étendue de l'axe OK, sans que cet axe ait besoin dêtre un axe permanent de rotation; il serait plus exact d'affirmer que si les conditions (1, 2, 3) sont remplies, la percussion sur l'axe fixe est nulle; et dès lors aussi il n'y a plus d'apparence de contradiction entre les conclusions précédentes, Cela posé, reprenons notre propre analyse.

Pour le cas particulier, où la force R, qui peut être de percussion ou de pression, *matérielle* ou *idéale*, rencontre elle-même, comme son plan P', la ligne centrale OI en un point I', nous aurons toujours x ou $OI = x_1' + \frac{k^2}{x_1'}$; mais l'ordonnée $z=0$; d'où $\cos(KOI) = 0$; ainsi dès lors l'axe d'ébranlement en (o) sera situé dans le plan $z'oy'$. Je dis en second lieu que si les conditions générales d'une percussion nulle du point fixe sont remplies, les réactions tangentielles d'inertie ont une résultante effective, située nécessairement dans le plan de percussion P. En effet, en substituant dans l'équation de condition connue $N'.\pi_{x'} + M'.\pi_{y'} + L'.\pi_{z'} = 0$, les valeurs des moments qui conviennent aux conditions prescrites, rémarquant que $\pi_{x'} = 0$, on la ramene à l'équation identique

$$Y'Z'.x - Y'.Z'x = 0.$$

Rémarque V. Il résulte de la rémarque (IX. §. 4.) qu'une force unique ne saurait ébranler un solide pourvu d'un point fixe donné (o), autour d'un axe permanent de ce point, que quand elle se trouve dirigée dans le plan des deux autres axes permanents de ce point. Supposons que Oz' soit un axe permanent en (o). Dans le plan perpendiculaire à Oz' traçons deux autres axes rectangles quelconques Ox, Oy', et appliquons au solide une force qui agisse dans ce plan. Soient N', M', L' ses moments à tourner le solide autour de Ox', Oy', Oz', X', Y', Z' ses somposantes rectangulaires, parallèles à ces axes: on aura évidemment:

$$N' = 0 \quad , \quad M' = 0 \quad , \quad Z' = 0 \quad , \quad L' = X'y - Y'x.$$

(x, y) marquent les coordonnées de son point d'application ou d'un point quelconque de sa ligne d'action. Soient toujours π_x, π_y, π_z, les composantes des réactions d'inertie tangentielles provoquées dans le solide par l'action momentanée

de la force proposée. Pour avoir encore une fois une pression totale nulle sur le point fixe, il faudra de nouveau poser les conditions

$$\pi_{x'} + X' = 0 \quad , \quad \pi_{y'} + Y' = 0 \quad , \quad \pi_{z'} + Z' = 0 \quad , \quad \text{ou } \pi_{z'} = 0.$$

Or en vertu des égalites $N' = 0$, $M' = 0$, on deduit des équations (B), en y appliquant les notations prèsentes, que l'égalité $\pi_{z'} = 0$ est identiquement satisfaite, et que l'on obtient en outre par les deux premières les résultats

$$X' = \frac{L'}{C'} \cdot \mu . y_1' \quad : \quad Y' = -\frac{L'}{C'} \mu . x_1'.$$

$(x_1' y_1' z_1')$ marquent les coordonnées du centre d'inertie I par rapport au système d'axes adopté, et C' le moment d'inertie relatif à l'axe Oz; et substituant dans celle-ci la valeur convenable de L', et les divisant ensuite membre-à-membre, les deux résultats:

$$\left.\begin{aligned} X'C' &= (X'.y - Y'.x).\mu.y_1' \\ Y'C' &= -(X'.y - Y'.x)\mu x_1' \end{aligned}\right\}, \quad \text{d'où } X' = -Y'.\frac{y_1'}{x_1'}.$$

Substituant dans l'une ou l'autre la valeur de X' en Y', on obtient également:

$$C' = \mu(x.x_1' + y.y_1').$$

Mais rien n'empêche de faire passer le plan $z'ox'$ par le centre d'inertie même du solide, et de prendre pour point d'action de la force son point de rencontre avec l'axe Ox' ainsi disposé; ce qui donne à la fois $y_1' = 0$, $y = 0$, partant

$$C' = \mu . x . x_1' .$$

De plus, en concevant par le centre d'inertie un axe parallèle à Oz' et rencontrant le plan $y'ox'$ en un point y, projection de I sur ce plan, et nommant μk^2 le moment d'inertie du corps par rapport à cet axe yI, on aura:

$$\mu k^2 + \mu . x_1'^2 = C' \quad , \quad \text{partant } x = x_1' + \frac{k^2}{x_1'};$$

et par cette disposition X' devient nulle, de sorte que la composante, parallèle à l'axe Oy', redevient ainsi la force totale R. On voit donc par là que si l'on veut obtenir une percussion nulle sur le point fixe donné, dans la supposition que le solide soit ébranlé autour d'un axe permanent en ce point, il est nécessaire que la force de percussion soit normale au plan de l'axe et du centre d'inertie, et qu'elle agisse à une distance de l'axe marquée par $x_1' + \frac{k^2}{x_1'}$. Il est entendu de soi-même qu'elle doit être située dans le plan des deux autres axes permanents du solide, relatifs au point fixe donné, puisque dans toute autre disposition elle ne saurait ébranler

le solide autour de l'axe permanent prescrit. La théorie du centre de percussion, telle qu'on l'avait conçue jusqu'à ce jour, résulte donc aussi de notre analyse avec cette simplicité et cette précision qui ne laissent plus rien de vague dans les idées. Hatons nous d'ajouter que, comme il y a en chaque point fixe (o) d'un solide trois axes permanents de rotation, il y a également trois centres de percussion correspondants, dont la construction géométrique est manifeste, dès que les axes permanents sont connus. Faisons rémarquer aussi qu'il serait peu exact d'affirmer d'une manière absolue que la premiere manière d'obtenir une percussion nulle soit plus gènérale que la seconde, ou reciproquement; car dans l'une, l'axe d'ébranlement ne doit pas, il est vrai, être un axe permanent; mais le point fixe (o) paraît jusqu'ici ne pas pouvoir être pris au hasard. Dans la seconde manière au contraire le point fixe est tel point du solide que l'on voudra; mais on prescrit à l'avance la condition que l'axe instantané soit l'un des axes permanents du solide en ce point. Chaque manière d'envisager la question a donc un caractère propre de généralite et d'individualité. Du reste, de quelque façon qu'on envisage cette importante matière: les raisonnements que l'on fait sont applicables aux forces de pression aussi bien qu'à celles de percussion, qui après tout ne sont que efforts finis, immensément considérables; et il serait certes plus exact de substituer la dénomination de *centre de réaction tangentielle* à celle de *centre de percussion*, qui semble énoncer l'idée, que nous y attachons d'après tout ce qui précède, d'une façon trop *restreinte*, et trop *exclusive*.

Rémarque VI. Il nous reste maintenant à examiner le cas où le solide, pourvu d'un point fixe, est soumis à plusieurs forces à la fois. En rapportant le tout, points matériels et points d'application, à un système d'axes rectangles ox, oy, oz, en ce point, nous avons déjà les valeurs des composantes des réactions tangentielles par les équations (A) du (§. **6**.), lesquelles subsistent pour tous les cas; ainsi pour avoir les conditions d'une pression nulle sur (o), il faut poser les équations

$$X+\pi_x=0\ ,\qquad Y+\pi_y=0\ ,\qquad Z+\pi_z=0,$$

et substituer dans celles-ci les valeurs fournies par les équations citées; ce qui donnera les formules:

$$(1.)\qquad \begin{cases} X=(\cos A_1.y_1-\cos B_1.z_1).\mu.K \\ Y=(\cos C_1.z_1-\cos A_1.x_1).\mu.K \\ Z=(\cos B_1.x_1-\cos C_1.y_1).\mu.K. \end{cases}$$

Si l'on multiplie ces équations, la première par $\cos C_1$, la deuxième par $\cos B_1$, et

la troisième par $\cos A_1$, et qu'on les ajoute ensuite membre-à-membre, on obtient la condition générale

$$\cos(R\hat{O}K) = \mu.K.\hat{O} = 0;$$

R dénotant la résultante de transport de toutes les forces proposées, et $R\hat{O}K$ l'angle de R avec l'axe de rotation OK. On voit donc: **1**) que pour avoir une percussion ou pression nulle sur le point fixe, la résultante de transport de forces doit croiser à angle droit l'axe d'ébranlement. Cette condition, eu égard aux valeurs des cosinus de C_1, B_1, A_1, revient à l'égalité

$$(2.) \qquad \frac{X\cdot N}{A\cdot K} + \frac{Y\cdot M}{B\cdot K} + \frac{Z\cdot L}{C\cdot K} = 0.$$

Nommons toujours x_1, y_1, z_1 les coordonnés du centre d'inertie du solide à l'instant de la secousse, et prenons:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r_1^2 \;:\; x_1 = r_1\cos\alpha\,,\quad y_1 = r_1\cos\beta\,,\quad z_2 = r_1\cos\gamma.$$

La ligne centrale OI sera désignée ainsi par r_1, et fera avec les axes coordonnés les angles α, β, γ. Par la substitution de ces valeurs, les équations (1) deviendront:

$$(3.)\quad \begin{cases} R\cos(R,\hat{x}) = r_1(\cos A_1\cos\beta - \cos B_1\cos\gamma).\mu.K \\ R\cos(R,\hat{y}) = r_1(\cos C_1\cos\gamma - \cos A_1\cos\alpha).\mu.K \\ R\cos(R,\hat{z}) = r_1(\cos B_1\cos\alpha - \cos C_1\cos\beta).\mu.K. \end{cases}$$

Concevons une droite OH, normale en (o) au plan (OI, OK) formé par la ligne centrale et par l'axe de rotation. En nommant φ l'angle compris entre ces lignes OI, OK, nous pourrons faire, d'après une transformation que l'on démontrera plus loin:

$$(4.)(\cos A_1\cos\beta - \cos B_1\cos\gamma)^2 + (\cos C_1\cos\gamma - \cos A_1\cos\alpha^2 + (\cos B_1\cos\alpha - \cos C_1\cos\beta)^2 = \sin^2\varphi.$$

Carrant donc les équations, (3) et les ajoutant membre-à-membre, on obtiendra en vertu de cette formule:

$$R^2 = \mu^2.K^2.r_1^2\sin^2\varphi \quad,\quad R = \mu.K.r_1.\sin\varphi.$$

Substituant cette valeur de R de nouveau dans les équations (B), on en déduit:

$$(5.)\quad \begin{cases} \cos(\hat{k},x) = (\cos A_1\cos\beta - \cos B_1\cos\gamma)\cdot\dfrac{I}{\sin\varphi} \\ \cos(\hat{k},y) = (\cos C_1\cos\gamma - \cos A_1\cos\alpha)\cdot\dfrac{I}{\sin\varphi}\cdot \\ \cos(\hat{k},z) = (\cos B_1\cos\alpha - \cos C_1\cos\beta)\cdot\dfrac{I}{\sin\varphi} \end{cases}$$

Mais la transformation sur laquelle repose la condition (4), donne avant tout, les formules fondamentales

$$\cos H\hat{o}\,x = (\cos A_1 \cos\beta - \cos B_1 \cos\gamma) \cdot \frac{I}{\sin\varphi} \cdot$$

$$\cos H\hat{o}\,y = \ldots\ldots \quad , \quad \cos H\hat{o}\,z = \text{etc.}$$

De là et des équations (5) nous concluons qu'il faut avoir:

$\cos(R, x) = \cos(H\hat{o}x)$, $\cos(R, y) = \cos(H\hat{o}y)$, $\cos(R, z) = \cos(H\hat{o}z)$;

partant que la résultante de transport des forces appliquées est parallèle à la droite Ho, et par conséquent perpendiculaire au plan formé par l'axe de rotation instantané et par la ligne qui joint le point fixe donné au centre d'inertie du solide. C'est là la deuxième conséquence générale des conditions du problème; et ces résultats s'accordent d'une manière remarquable avec le cas particulier d'une force unique qui forme toujours elle-même sa résultante de transport et sa résultante effective. Quant à l'équation $R = z_1 \mu . K . \sin\varphi$, rien n'est plus facile que d'en reconnaître l'interpretation, l'évidence géométrique. Elle nous annonce que la résultante de transport, ou la quantité de pression transmise au point fixe par les forces sollicitantes, est égale et contraire à la résultante de transport des réactions d'inertie tangentielles. Les equations (A) donnent en effet

$$\tilde{\omega} = r_1 \mu . k . \sin\varphi = \mu . r_1 \sin\varphi . \sqrt{\left(\frac{N^2}{A^2} + \frac{M^2}{B^2} + \frac{L^2}{C^2}\right)} .$$

Nous avons reconnu, il est vrai, les conséquences des conditions générales de la question; mais la signification géométrique de l'équation (2) ne suffit pas immédiatement, en combinaison même de la seconde conséquence, pour mettre en évidence le mode de disposition des forces, requis pour une pression nulle sur le point fixe: mais ici il importe de se rappeler (Rémarque II. §. 6) que la résultante de transport des réactions d'inertie croise à angle droit la ligne centrale OI. Donc la résultante de transport des forces mêmes, doit la croiser aussi à angle droit; autrement l'effort total, transmis parallèlement à l'axe ox' et suivant cet axe même, ne saurait être nul, et la pression totale ne serait jamais nulle non plus. Ainsi, en adoptant de nouveau le système particulier d'axes ox', oy', oz', dont le premier va suivant la droite OI, nous aurons

$$X' + \pi_{x'} = 0 \ , \qquad Y' + \pi_{y'} = 0 \ , \qquad Z' + \pi_{z'} = 0 \ ;$$

et partant, à cause de $\pi_x = 0$, $X' = 0$; comme cela doit être. Nous voyons donc d'abord par là que l'on peut disposer les forces sollicitantes toutes dans des

plans perpendiculaires à l'axe OX' qui coïncide avec la ligne centrale. Les deux autres équations en Y' et Z' donnent de leur côté:

$$Y' = -\frac{L'}{C'}.\mu x_1' \quad , \quad Z' = \frac{M'}{B'}.\mu x_1' \ldots ;$$

et par suite de ces valeurs l'équation (2), déjà réduite à la forme simplifiée

$$\frac{Y'M'}{C'} + \frac{Z'L'}{B'} = 0 ,$$

deviendra identique, de sorte qu'elle n'exige pas de disposition plus spéciale dans les forces que celle qui est déjà reconnue. Toutefois il n'en est pas de même des égalités qui donnent Y' et Z' en fonction de L', M', x', et qu'on peut écrire sons la forme

$$C'Y' = -\mu.x_1'.L' \quad : \quad B'Z' = +\mu\, x_1'.M'.$$

En effet, en dénotant par λ_1 la distance au plan de $(z'oy')$ du centre des forces parallèles dont Y' exprime ici la somme, et par λ_2 celle au même plan du centre des forces dont Z' exprime la somme, nous obtenons:

$$L' = -\lambda_1.Y' : M' = +\lambda_2.Z',$$

et en substituant ces valeurs dans les équations en $C'Y'$, $B'Z'$, il vient:

$$C' = \mu.x_1'.\lambda_1 \quad , \quad B' = \mu.x_1'.\lambda_2;$$

partant $B' : C' = \lambda_2 : \lambda_1$. Telle est donc présentement la condition qui remplace l'egalité $C' = B'$, requise dans le cas spécial, qu'on a examiné d'abord. Ainsi le moment d'inertie du solide, relatif à l'axe oy', doit être à son moment d'inertie relatif à l'axe oz', comme la distance du centre des composantes parallèles à l'axe oz' au plan $(z'oy')$ est à la distance au même plan du centre des composantes parallèles à l'axe oy'. Ainsi dans le cas actuel la condition d'une pression ou percussion nulle sur l'axe, pourra être remplie d'une infinité de manières, sans qu'on soit obligé de chercher au préalable deux axes rectangles à moments d'inertie égaux, ou de soumettre le point fixe du solide à des conditions particulières de position. En effet: quel que soit ce point fixe (o), on menera d'abord un plan normal à la ligne centrale OI. Dans ce plan on choisira deux axes rectangulaires quelconques (oy', oz'), et on évaluera les moments d'inertie du solide B', C' par rapport à ces deux axes. Dans l'espace on prendra ensuite deux points (p_1, p_2), pour le reste quelconques, mais choisis d'après la condition que leurs distances au plan $(oz'y')$ soient entr'elles dans le rapport de $B' : C'$; ensuite on imaginera un système de forces parallèles à l'axe oz' (ce qui est possible de diverses façons) dont le centre soit le point (p_1); on concevra un second système de forces paral-

lèles à oy' dont le centre soit le point (p_2) (ce qui est encore possible d'une infinité de manières différentes), ou bien par le point p_1, placé à une distance λ_2; on fera agir une force unique parallèle à l'axe oz', et par le point (p_2), dont la distance est λ, on fera agir une force arbitraire, parallèle à l'axe oy': et ce système de deux forces, en général irréductible, ébranlera le solide autour du point fixe (o), sans secousse et sans trépidation sur ce point.

Telle est la théorie générale du centre, ou des centres de réaction tangentielle. S'il se trouvait par hazard que les deux moments d'inertie B', C' fussent égaux, les deux forces en (p_1, p_2) agiraient dans un même plan normal à la ligne (OI). Elles seraient toujours réductibles à une force unique qui produirait encore une pression nulle sur (o). Cette hypothèse nous fait rentrer dans le cas plus spécial examiné d'abord. Mais c'est après tout ce cas spécial qui présente ici le plus de difficultés, car il repose sur la supposition (Rémarque IV) qu'au centre d'inertie I d'un solide on puisse toujours trouver deux axes rectangulaires, par rapport auxquels les moments d'inertie du solide soient égaux entr'eux. Telle est la question à peu-près toute géometrique qui nous reste à résoudre.

§. 7.

Trouver au centre d'inertie, ou en tout autre point d'un solide matériel, deux axes rectangulaires par rapport auxquels les moments d'inertie soient égaux entr'eux.

Nommons $(\alpha,\beta,\gamma)(\alpha',\beta',\gamma')$ les cosinus des angles de chaque axe inconnu avec les trois axes d'inertie Ix, Iy, Iz: comme on exige que ces axes soient rectangulaires entr'eux, on aura cette première équation:

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.$$

Mais en désignant par A, B, C les trois moments d'inertie principaux du solide, relatifs au centre I, on aura pour le moment d'inertie, relatif au premier des deux axes cherchés, la valeur

$$A\alpha^2 + B\beta^2 + C.\gamma^2,$$

et pour le moment relatif au second axe la valeur

$$A\alpha'^2 + B\beta'^2 + C.\gamma'^2.$$

La seconde équation de condition du problème sera donc:

$$A\alpha'^2 + B.\beta'^2 + C.\gamma'^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C.\gamma^2.$$

Si l'on pose $\alpha' = \cos\delta.\cos\eta$, $\beta' = \cos\delta.\sin\eta$, $\gamma' = \sin\delta$, d'après une transformation connue, on obtient:

$$\text{tang}\,\delta = -\frac{\alpha\cos\eta + \beta\cdot\sin\eta}{\gamma} \quad ; \quad \cos\delta = \gamma : \sqrt{[\gamma^2 + (\alpha\cos\eta + \beta\sin\eta)^2]}$$

$$\sin\delta = (\alpha\cos\eta + \beta\,.\,\sin\eta) : \sqrt{[\gamma^2 + (2\cos\eta + \beta\sin\eta)^2]}:$$

$$(A\cos^2\eta + B\sin^2\eta)\cos^2\delta + C.\sin^2\delta = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2;$$

et comme on n'a que deux équations de condition: la dernière, et l'une quelconque de celles qui donnent tang δ, sin δ, cos δ, pour d'eterminer quatre inconnues δ, η, α, β, γ (car les trois dernières ne comptent que pour deux), le problème paraît même susceptible d'une infinité de solutions. Mais c'est ce qu'il importe de reconnaître d'une manière rigoureuse. Si l'on pose:

$$A\alpha^1 + B\beta^2 + C\gamma^2 = D^2,$$

et que l'on substitue dans la dernière équation les valeurs de sin δ, cos δ, déduites de la première, on obtient:

$$\gamma^2(A\cos^2\eta + B\sin^2\eta) + C.(\alpha\cos\eta + \beta\sin\eta)^2 = D^2.[\gamma^2 + (\alpha\cos\eta + \beta\sin\eta)^2],$$

et celle-ci devient par la réunion des termes en $\cos^2\eta$, $\sin^2\eta$, $\cos\eta$, $\sin\eta$:

$$(A\gamma^2 + C\alpha^2 - D^2\alpha^2)\cos^2\eta + (B\gamma^2 + C\beta^2 - D^2\beta^2)\sin 2\eta + 2\alpha\beta(C - D^2)\sin\eta\cos\eta - D^2\gamma^2 = 0.$$

Si l'on fait ensuite pour la simplicité des calculs:

$$A\gamma^2 + C\alpha^2 - D^2\alpha^2 = m\,,\quad B\gamma^2 + C\beta^2 - D^2\beta^2 = n\,,\quad \alpha\beta(C - D^2) = p:$$

$\cos^2\eta = u^2$, $\sin^2\eta = 1 - u^2$, partant $\sin\eta\cos\eta = u\sqrt{(1 - u^2)}$, on obtiendra:

$$\text{(D.)}\quad [(m-n)^2 + 4p^2]u^4 - 2[2p^2 - (m-n)(n - D^2\gamma^2)]u^2 + (n - D^2\gamma^2)^2 = 0;$$

et pour que l'inconnue puisse avoir une valeur réelle, il faut poser l'équation de condition

$$p^2 + (m + n - D^2\gamma^2)D^2\gamma^2 - mn = \text{ ou } > 0,$$

laquelle laisse encore une grande latitude dans le choix des quantités α, β, γ, puisqu'on n'a qu'une inéquation pour déterminer deux inconnues distinctes (α,β,γ). La question est donc ramenée à prouver que l'équation de condition précédente peut, ou ne peut pas être satisfaite d'une infinité de manières différentes, et que parsuite il y a une infinité de valeurs η, δ, ou (α',β',γ'), donnant un axe qui forme couple avec l'axe $(\alpha\beta\gamma)$ considéré comme connu, mais devant néanmoins remplir la condition dont il s'agit. Ainsi, en désignant par F un paramètre positif arbitraire, qui peut devenir nul, il faudra poser:

$$p^2 + (m + n - D^2\gamma^2)D^2\gamma^2 = F + m.n:$$

équation dans laquelle on a parsuite des significations attribuées aux quantités m, n, p:

$$m.n = A.B.\gamma^4 + (C - D^2)(A\alpha^2 + B\beta^2)\gamma^2 + \alpha^2\beta^2(C - D^2)^2.$$
$$= A.B.\gamma^4 + \gamma^2(C - D^2)(A\alpha^2 + B\beta^2) + p^2.$$

Si l'on reporte cette valeur de mn dans l'équation en F, et que l'on supprime aux deux membres la quantité additive commune p^2, on obtient:

$$(m + n - D^2\gamma^2)\,D^2\gamma^2 = F + AB\gamma^4 + \gamma^2(C - D^2)(A\alpha^2 + B\beta^2).$$

Si l'on remplace maintenant dans celle-ci les quantités abréviatives par leurs valeurs, on obtient:

$$\left.\begin{array}{l}\gamma^2(A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2)[A\gamma^2+B\gamma^2+C\alpha^2+C\beta^2-[\alpha^2+\beta^2)(A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2)-\gamma^2(A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2)]\\ -AB\gamma^4-C\gamma^2(A\alpha^2+B\beta^2)(C-A\alpha^2-B\beta^2-C.\gamma^2)-F.....\end{array}\right\}=0:$$

équation qui se transforme d'elle-même en cette autre:

$$\left.\begin{array}{l}(A\gamma^2+B\gamma^2-C\gamma^2+C-A\alpha^2-B\beta^2-C\gamma^2)(A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2)\gamma^2\\ -AB\gamma^4-C.\gamma^2(A\alpha^2+B\beta^2)+\gamma^2(A\alpha^2+B\beta^2)(A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2)-F\end{array}\right\}=0,$$

si l'on réunit tout ce qui se trouve multiplié par le terme

$$\gamma^2(A\alpha^2+B\beta^2-2C\gamma^2+C)(A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2)-C\gamma^2.(A\alpha^2+B\beta^2)-AB\gamma^4-F=0.$$

En posant de nouveau, d'après la transformation déjà adoptée:

$$\alpha = \cos\varepsilon.\cos\tau\ ,\qquad \beta = \sin\varepsilon.\cos\tau\ ,\qquad \cos\gamma = \sin\tau\ ,$$

on déduit de là:

$$\left.\begin{array}{l}[(A+B-2C)\sin^2\tau+C]\sin^2\tau.(A\cos^2\varepsilon.\cos^2\tau+B\cos^2\tau.\sin^2\varepsilon+C\sin^2\tau)\\ -C.\cos^2\tau.\sin^2\tau(A\cos^2\varepsilon+B\sin^2\varepsilon)-AB.\sin^4\tau-F.....\end{array}\right\}=0.$$

Posant encore $\sin\tau = \frac{z}{\sqrt{(1+z^2)}}$, d'où $\cos\tau = \frac{1}{\sqrt{(1+z^2)}}$, considérant ensuite l'angle ε comme donné, et faisant en conséquence

$$\cos\varepsilon = \varepsilon_{,}\ ,\qquad \sin\varepsilon = \varepsilon_{,,}\ ,$$

on obtiendra la nouvelle transformée:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{(A+B-2C)z^2+C+C\cdot z^2}{1+z^2}\times\dfrac{z^2}{1+z^2}\times\dfrac{A\varepsilon_{,}^2+B\varepsilon_{,,}^2+Cz^2}{1+z^2}\\ -\dfrac{Cz^2}{1+z^2}\times\dfrac{A\varepsilon_{,}^2+B\varepsilon_{,,}^2}{1+z^2}-\dfrac{A\cdot B\cdot z^4}{(1+z^2)^2}-F\end{array}\right\}=0.$$

Si l'on réduit le tout au dénominateur commun, on obtient visiblement:

$$\left.\begin{array}{l}[(A+B-2C)z^2+C][A\varepsilon_{,}^2+B\varepsilon_{,,}^2+Cz^2)z^2-F(z^2+1)^3\\ -C(A\varepsilon_{,}+B\varepsilon_{,,}^2)(1+z^2)z^2-ABC^4(1+z^2)\end{array}\right\}=0.$$

Si l'on fait encore $z^2 = \zeta$ et qu'on developpe l'équation de condition, on obtient l'équation complète du troisieme degré:

$$\left.\begin{aligned}\zeta^3 + \frac{C^2 - AB - 3F + (A+B-C)(A\varepsilon_1^2 + B\varepsilon_{11}^2)}{C(A+B-C) - AB - F}\cdot\zeta^2 \\ - \frac{3F}{(A+B-C)C - AB - F}\cdot\zeta - \frac{F}{(A+B-C) - AB - F}\end{aligned}\right\} = 0.$$

Comme on sait par la théorie des équations que cette dernière admet une racine réelle au moins, de signe contraire à son dernier terme, il s'ensuit que si ce dernier terme, abstraction faite du signe (—) qui l'affecte, est positif, la quantite ζ aura au moins une valeur *réelle positive*, et qu'il existera une valeur réelle correspondante pour z, ou deux, savoir $z = \pm\sqrt{(\zeta)}$: mais déjà le paramètre F est par sa nature positif; et le dernier terme de l'équation remplira la condition voulue, toutes les fois qu'on aura:

$$(A+B-C)\,C - AB - F \quad \text{ou} \quad (A-C)(C-B) - F > 0.$$

Or celle-ci peut être remplie pour les trois classes de solides par le choix convenable des axes coordonnés suivant les axes d'inertie. En effet, en dirigeant l'axe Ix suivant l'axe du moment d'inertie *maximum*, et l'axe Iy suivant l'axe du moment d'inertie *minimum*, on aura toujours $(A-C)(C-B)$ positif ou > 0, à cause de $A-C>0$, $C-B>0$ à la fois; et l'on pourra en outre trouver pour F une infinité de valeurs, chacune assez petite, pour laisser la quantité $(A-C)(C-B) - F > 0$, ou $= 0$. Cela posé, en attribuant une valeur arbitraire à la quantité angulaire ε, et prenant pour F une valeur quelconque positive, comprise entre les limites 0 et $(A-C)(C-B)$, on calculera par l'équation en ζ^3 la valeur réelle et positive de ζ qui y repond. Reportant ces valeurs de ε et de $z = \sqrt{\zeta}$ dans l'équation (D), on deduira de celle-ci, resolue par rapport à u^2:

$$u^2 = \frac{2p^2 - (m-n)(n - D^2\gamma^2) \pm \sqrt{(2p^2(m-n)(n-D^2\gamma^2) - [(m-n)^2 + 4p^2](n - D^2\gamma^2))}}{(m-n)^2 + 4p^2}$$

$$= \frac{2p^2 - (m-n)(n-D^2\gamma^2) \pm \sqrt{(p^2 + (m+n-D^2\gamma^2)D^2\gamma^2 - m\cdot n)}}{(m-n)^2 + 4p^2}.$$

Or la dernière forme radicale dans u^2 démontre d'abord, comme nous le avons admis plus haut, que des valeurs réelles de u seront seulement possibles, ou que u^2 sera seulement réel, si l'on a:

$$p^2 + (m+n-D^2\gamma^2)D^2\gamma^2 - mn > 0 \quad \text{ou} \quad = F.$$

Je dis de plus que si cette inéquation est satisfaite, les valeurs de u réelles, ne sont pas seulement possibles, mais qu'elles le sont encore nécessairement. En effet, en retranchant la quantité $p^2 + (m+n-D^2\gamma^2)D^2\gamma^2 - mn$ de la quantité

$2p^2-(m-n)(n-D^2\gamma^2)$, on obtient pour résultat $p^2+(n-D^2\gamma^2)^2$, c'est-à-dire une quantité positive, et il vient l'égalité de la forme:

$$2p^2-(m-n)(n-D^2\gamma^2)-[p^2+(m+n-D^2\gamma^2)\,D^2\gamma^2-m.n]=p^2+(n-D^2\gamma^2)^2.$$

Substituant dans celle-ci au terme soustractif du premier membre sa valeur positive supposée F', et transposant F au second membre, on en déduit:

$$2p^2-(m-n)(n-D^2\gamma^2) = F+p^2+(n-D^2\gamma^2)^2.$$

De là on peut conclure que le premier membre, ou la quantité $2p^2-(m-n)(n-D^2\gamma^2)$, est toujours positive. Et comme la quantité soumise au radical dans la valeur de u^2 est toujours, après l'extraction de la racine, moindre que la première partie positive $2p^2-(m-n)(n-D^2\gamma^2)$, il s'ensuit que les quatre racines de u sont réelles, deux d'entr' elles étant positives et deux négatives, égales en valeurs absolues aux deux premières respectivement.

Si l'on donnait une seconde valeur pour l'angle ε, et qu'on calculât la valeur correspondante de τ, ou de z ou ζ, sans changer toutefois la valeur attribuée d'abord à F, on obtiendrait une seconde double valeur pour u, partant pour η,δ, partant un second couple d'axes rectangles, satisfaisant à l'énoncé de de la question. Mais sans faire varier la valeur arbitraire attribuée d'abord à ε, on pourra faire varier le paramêtre F entre les limites reconnues, et à chaque fois encore on trouvera un couple au moins d'axes qui remplissent la condition prescrite. Seulement dans cette dernière manière de procéder, tous les couples d'axes repondant à une même valeur de ε, et à diverses valeurs de τ, calculées par l'équation du troisième degré, se trouvent dans un même plan, normal à celui $(x\,iy)$, c'est-à-dire normal au plan principal formé par les axes à moments d'inertie *maximum* et *minimum*. Enfin, on pourra faire varier à la fois les deux quantités ε et F; chaque hypothèse adoptée donnera au moins un couple d'axes qui satisfont à la question. On peut donc en toute securité établir la proposition générale: *Qu'au centre d'inertie d'un solide à moments principaux inégaux, ou qu'au tout autre de ses points on peut trouver d'une infinité de manières un couple d'axes rectangles par rapport auxquels les deux moments d'inertie du solide ou système quelconque sont égaux.* Mais il faut considérer que la valeur du moment d'inertie, commune aux deux axes d'un même couple, doit varier généralement d'un couple à l'autre. En outre, non seulement l'analyse précédente démontre la possibilité de la question: elle en fournit en même temps toutes les solutions possibles dans chaque cas donné. Il semble au premier abord que pour les solides de seconde classe, tels que les solides homogènes et de revo-

lution, qui ont deux moments d'inertie égaux entr'eux, la question ne soit susceptible d'aucune solution. Car en faisant par exemple $A = B$, le dernier terme de l'équation du troisième degré, abstraction faite du signe (—) qui le précède, devient $\frac{F}{-(A-C)^2-F}$, de sorte qu'en tenant compte du signe (—) qui l'affectait déjà, on aura le terme tout positif $+\frac{F}{(A-C)^2+F}$ et l'équation générale qui deviendrait

$$\zeta^3 + \frac{C^2+A^2-AC-3F}{-(A-C)^2-F}\cdot\zeta^2 + \frac{3F}{(A-C)^2+F}\cdot\zeta + \frac{F}{(A-C)^2+F} = 0,$$

ne parait plus admettre pour ζ de racine réelle positive, et est devenue toute indépendante de la quantité ε. Mais en prenant $F = 0$, on en déduit l'équation

$$\zeta^2\left(\zeta - \frac{A^2+C^2-AC}{(A-C)^2}\right) = 0,$$

laquelle admet pour une valeur toujours quelconque de ε les valeurs de $\zeta : \zeta' = 0, \quad \zeta'' = 0, \quad \zeta''' = \frac{A^2+C^2-AC}{(A-C)^2}$:

partant $$\text{tang}\tau = z = V(\zeta'),\ V(\zeta''),\ V(\zeta''')$$

$$= 0, \quad \text{et } V\left(\frac{A^2+C^2-AC}{(A-C)^2}\right) = \frac{V(A^2+C^2-AC)}{A-C}.$$

Ces résultats prouvent: 1) pour ε quelconque, et $\tau = 0$ que deux axes rectangulaires quelconques, choisis dans le plan principal, formé par les axes à moments égaux, forment un couple d'axes, c'est-à-dire des axes à moments d'inertie égaux; ce qui s'accorde d'une manière frappante avec la théorie connue des axes principaux. (Voir par exemple la dissertation que nous avons publiée sur cette théorie dans l'archive de mathématiques de Mr. *Grunert.* 1844). On voit ensuite que pour ε quelconque et pour $\text{tang}\tau = \frac{V(A^2+C^2-AC)}{A-C}$ on peut trouver dans tout plan central perpendiculaire au plan de (xiy), un couple d'axes rectangulaires par rapport auxquels les moments d'inertie du solide sont encore égaux; et qu'en passant d'un plan normal à un autre, la disposition ou l'inclinaison de chaque axe sur le plan (xy) ne change pas; c'est ce qui est prouvé par la valeur précédente de $\text{tang}\tau$, indépendante de l'angle ε que forme ce plan avec le plan (ZIX), Quant au cas plus particulier encore, de $A = B = C$, il faudra encore faire $F = 0$, pour avoir une racine réelle positive; et l'équation en ζ^3 deviendra, d'abord avant $F = 0$:

$$\zeta^3 - \frac{A^2-3F}{F}\cdot\zeta^2 + 3\zeta + 1 = 0,$$

et en prenant ensuite $F = 0$:

$$\zeta^3 - \frac{A^2}{0} \cdot \zeta^2 + 3\zeta + 1 = 0,$$

ou

$$\zeta - \frac{A^2}{0} + \frac{3}{\zeta} + \frac{1}{\zeta^2} = 0;$$

et celle-ci est satisfaite par la supposition de $\zeta = \frac{A^2}{0} = \infty$; ce qui prouve que l'axe en I, perpendiculaire au plan (xiy), forme couple avec un axe quelconque tracé en (I) dans ce plan. Mais cela était évident d'avance d'après la théorie des axes permanents de rotation.

Laissons là ces digressions de détails, et reprenons la discussion générale, en presentant sous forme de rémarques détachées tout ce qui s'y rattache d'une manière essentielle.

Remarque I. Un axe étant donné au centre ou en tout autre point du solide: est-il toujours possible de trouver un axe normal au premier, et par rapport à chacun desquels le moment d'inertie soit de même valeur? La reponse à la question est manifeste. Toutes les fois que les valeurs qui résultent de la position connue de l'axe donné, pour les quantités ε, ζ, sont telles qu'elles donnent pour F, calculée par l'équation du troisième degré en ζ, une valeur négative, ou bien une valeur positive plus grande que $(A-C)(C-B)$: la question proposée est impossible. Mais s'il en résulte une valeur positive de F, comprise entre zéro et $(A-B)(C-B)$, la question est susceptible de solution, et elle se trouve à l'aide de ce qui est déjà dit.

Rémarque II. La pluralité de racines réelles qui existent pour $u = \cos\eta$, pourrait faire supposer, au premier abord, qu'il soit généralement possible de trouver plusieurs axes à la fois qui forment couple avec un même (ε, δ), donné ou calculé d'après l'équation en ζ: il est donc important d'examiner de plus près la valeur et la signification de chaque racine. Soient u_1, u_2, u_3, u_4 les racines de u; η_1, η_2, η_3, η_4 les angles correspondants fournis par l'égalité $\cos\eta = u_1, u_2, u_3, u_4$, on a évidemment.

$$u^3 = -u_1, \qquad u_4 = -u^2.$$

(1.) d'ou: $\cos\eta_3 = -\cos\eta_1$, $\cos\eta_4 = -\cos\eta_2$,

et en nommant $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ les valeurs correspondantes de δ, on a:

$$\operatorname{tang}\delta_1 = -\frac{\alpha\cos\eta_1 + \beta\sin\eta_1}{\gamma}, \quad \operatorname{tang}\delta_2 = -\frac{\alpha\cos\eta_2 + \beta\sin\eta_2}{\gamma},$$

$$\operatorname{tang}\delta_3 = +\frac{\alpha\cos\eta_1 - \beta\sin\eta_1}{\gamma}, \quad \operatorname{tang}\delta_4 = +\frac{\alpha\cos\eta_2 - \beta\sin\eta_2}{\gamma}.$$

Les équations (1) donnent en outre:

$$\eta_3 = 180 - \eta\,, \quad 180 + \eta_1 \quad : \quad \eta_4 = 180 - \eta_2\,, \quad 180 + \eta_2\,,$$

et l'on n'a calculé les valeurs de δ_3, δ_4 que dans la supposition que l'on ait simplement $\eta_3 = 180^0 - \eta_1$, $\eta_4 = 180^0 - \eta_2$; parceque les deux autres valeurs de η_3, η_4 qui repondent à $180^0 + \eta_1$, $180^0 + \eta_2$ reproduisent pour δ des valeurs égales et contraires à celles δ_3, δ_4; savoir $\operatorname{tang}\delta_3' = -\operatorname{tang}\delta_1$, $\operatorname{tang}\delta_4' = -\operatorname{tang}\delta_2$; et comme il faut faire correspondre celles-ci aux angles $180 + \eta_1$, $180 + \eta_2$, l'axe $(\delta_3', 180 + \eta_1)$ ne serait que le prolongement de celui (δ_1, η_1); l'axe $(\delta_4', 180^0 + \eta_4)$, serait de même le prolongement de l'axe (δ_2, η_2):

Examen des deux racines η_1, η_2. Je dis d'abord que les deux axes $(\eta\ \delta_1)(\eta_2\delta_2)$ qui sont chacun rectangulaires avec l'axe (ε, τ), ne sont pas perpendiculaires entr'eux: car si cela était, il faudroit avoir

$$(\cos\eta_1 \cdot \cos\eta_2 + \sin\eta_1 \cdot \sin\eta_2 + \operatorname{tang}\delta_1 \cdot \operatorname{tang}\delta_2) = 0\,,$$

partant $\operatorname{tang}\delta_1 . \operatorname{tang}\delta_2 = -(\cos\eta_1 \cdot \cos\eta_2 + \sin\eta_1 \cdot \sin\eta_2)$, tandis que les valeurs de $\operatorname{tang}\delta_1$, $\operatorname{tang}\delta_2$ donnent pour le produit $\operatorname{tang}\delta_1 . \operatorname{tang}\delta_2$ une valeur différente, et l'on ne saurait égaler ces valeurs de $\operatorname{tang}\delta_1 . \operatorname{tang}\delta_2$ sans retomber sur une équation de condition en α, β, γ, ou (ε, τ) ou (ε, ζ) et $\eta_1\eta_2$, qui serait inadmissible en général pour le sens de la question proposée, par la seule raison que cette équation n'est pas identique, car elle serait:

$$(\alpha\cos\eta_1 + \beta\sin\eta_1)(\alpha\cos\eta_2 + \beta\sin\eta_2) + \gamma^2(\cos\eta_1\cos\eta_2 + \sin\eta_1\sin\eta_2) = 0.$$

Mais chacune de ces lignes forme pourtant un angle droit avec l'axe (ε, τ), calculé par l'équation en ζ et pour une valeur arbitraire attribué à ε. Soient $(\alpha'\beta'\gamma')(\alpha''\beta''\gamma'')$ les cosinus des angles de ces lignes avec les axes coordonnés, on aura:

$$\alpha' = \cos\delta_1\cos\eta_1\,, \quad \beta' = \cos\delta_1\sin\eta_1\,, \quad \gamma' = \sin\delta_1$$
$$\alpha'' = \cos\delta_2\cos\eta_2\,, \quad \beta'' = \cos\delta_2\sin\eta_2\,, \quad \gamma'' = \sin\delta_2.$$

Il est bien évident d'ailleurs que chaque ligne $(\alpha'\beta'\gamma')(\alpha''\beta''\gamma'')$ est normale à l'axe $(\alpha\beta\gamma)$ ou (ε, τ), puisque la valeur de $\operatorname{tang}\delta$ par exemple, est exprimée par la condition

$$\alpha\cos\delta_1\cos\eta_1 + \beta\cos\delta_1\sin\eta_1 + \gamma\,.\sin\delta_1 = 0,$$

qui revient à $\alpha\alpha' + \ldots\ldots = 0$.

Examen des racines η_3, η_4 : $\eta_3 = 180^0 - \eta_4 = 180^0 - \eta_2$. On voit par là que l'axe $(\eta_3\delta_3)$ doit se trouver d'abord dans un plan projetant normal à (xIy) et faisant avec zx un angle supplementaire de celui formé par le plan projetant de (η_1, δ_1). On en obtient ensuite la position dans ce plan par la valeur de $\operatorname{tang}\delta_3$,

donnée ci-dessus. On aura ensuite les cosinus des angles mêmes $(\alpha''', \beta''', \gamma''')$ par les égalités:

$$\alpha''' = -\cos\delta_3\cos\eta_1\,, \qquad \beta''' = \cos\delta_3\sin\eta_1\,, \qquad \gamma''' = \sin\delta_3\,,$$

et il est encore facile de verifier que ce troisième axe est encore normal à celui $(\alpha\beta\gamma)$, sans l'être à aucun des deux autres $(\alpha'\beta'\gamma')(\alpha''\beta''\gamma'')$. On verrait de même qu'il existe un quatrième axe $(\delta_4'\eta_0)$ ou $(\alpha^{IV}, \beta^{IV}, \gamma^{IV})$ normal à $(\alpha\beta\gamma)$, sans l'être généralement à aucun des trois autres déjà reconnus. *Ainsi, au centre d'inertie ou en tout autre point fixe d'un système matériel quelconque, on peut toujours trouver cinq axes ou moins, par rapport auxquels les moments d'inertie sont égaux. Quatre de ces axes sont toujours dans un même plan perpendiculaire au cinquième*; ce qui correspond à quatre couples d'axes au moins. Si l'équation du troisième degré en ζ admet trois racines *réelles positives*, il y aura en tout douze couples fondamentaux; mais rien ne prouve qu'en passant de l'un quelconque des couples qui répondent à une racine positive, à l'un des couples qui repondent à une autre racine positive, les moments d'inertie soient encore les mêmes. De plus, on ne doit point conclure de là que la question générale soit seulement susceptible de quatre, de huit, de douze solutions: car le premier axe lui-même (ε, τ) peut, comme on l'a déjà dit, être calculé d'un infinité de manières différentes, attendu que dans l'équation citée on peut faire varier ε d'une manière arbitraire entre les limites $0^0 - 360^0$, et F entre les limites 0 et $(A-C)(C-B)$.

Pour complèter les notions que nous avons établies sur la théorie du centre de réaction tangentielle, pour le cas où l'axe d'ébranlement n'est pas permanent, il nous reste une difficulté à éclaircir. Il s'agit de savoir si la question d'une percussion nulle est possible; le point fixe (o) du solide étant choisi d'une manière quelconque. Concevons par ce point les trois axes permanents: l'un ox à moment d'inertie maximum; l'autre oy à moment minimum, et le troisième à moment moyen; tirons la ligne centrale OI et un plan Q normal en (o) à cette ligne. Ce plan fera donc avec le plan (zox) un angle connu ε'. Concevons que dans l'équation du troisième degré en ζ, A, B, C expriment maintenant les moments d'inertie principaux relatifs au point (o), et substituons y la valeur $\cos\varepsilon'$, $\sin\varepsilon$, aux quantités $\varepsilon_{,}, \varepsilon_{,,}$. Puis attribuons à F une valeur convenable. L'équation dont il s'agit aura toujours une racine réelle positive au moins; ce qui donnera un couple d'axes au moins qui satisfait à la condition $B' = C'$; et l'on voit même qu'il y en a généralement une infinité dans ce même plan; le point (o) n'a donc pas besoin d'être soumis à dès conditions particulières de position; et c'est ce qu'il fallait reconnaître. Faisons rémarquer que pour les solides de première classe la ligne oi est

en (o) l'axe permanent du moment d'inertie minimum; de sorte qu'alors ox, oz seront dans le plan Q, puisque oy sera suivant OI; tous les axes du plan Q seront permanents, et tous seront à moments égaux. (Voir notre dissertation citée.)

Rémarque III. Le cas particulier de $F = 0$ peut être encore examiné à part. Alors l'équation en ζ^3 donnera:

$$\zeta = 0, \quad \text{et} + \frac{C^2 - AB + (A + B - C)(A\varepsilon_{,}^{\,2} + B\varepsilon_{,,}^{\,2})}{(A - C)(C - B)} = 0,$$

$$\text{ou } \operatorname{tang}\tau = 0, \quad \text{et } \operatorname{tang}\tau = \sqrt{-\left(\frac{(A + B - C)(A\varepsilon_{,}^{\,2} + B\varepsilon_{,,}^{\,2}) + C^2 - AB}{(A - C)(C - B)}\right)}.$$

La première de ces valeurs montre qu'on peut placer l'axe primitif ($\alpha\beta\gamma$) en tel endroit du plan d'inertie central (xy) qu'on veut, pourvu qu'il passe par le centre; et qu'il existera encore un ou plusieurs axes, formant chacun couple avec le premier. Ainsi, étant donné un point fixe d'un solide, et prenant en ce point et sur le plan des axes permanents à moments *maximum* et *minimum*, un axe d'une manière quelconque, ou pourra toujours trouver un, et même quatres axes, normaux au premier et qui forment chacun couple avec celui-ci.

Quant à la seconde valeur de $\operatorname{tang}\tau$, elle est impossible, car il est aisé de voir que la quantité soumise au radical est négative, en prenant $A = B + p$, $C = B + q$, et faisant rémarquer que $p - q$ est positif. On pourrait examiner aussi le cas où l'on attribuerait à F sa valeur positive la plus élevée. On pourrait se proposer aussi de reconnaître par une marche analogue à la précédente s'il est possible de trouver au centre d'inertie ou en tout autre point d'un système matériel, trois axes rectangulaires à moments d'inertie égaux entr'eux: mais la théorie des axes permanents et principaux fournit à cet égard, quoiqu'un peu indirectement, tous les renseignements voulus, et nous fait connaitre suffisamment que dans son acception la plus générale cette question n'admet pas de solution. C'est ce qu'on peut démontrer aussi par la nature même des résultats mécaniques exposées dans le (§. 4.) et dans la rémarque (VIII de ce No. 4.)

En effet, soient au centre d'inertie I, trois axes rectangulaires Ix', Iy', Iz', pour lesquels les moments d'inertie aient, si c'est possible, des valeurs égales $A' = B' = C'$. Si le solide est percuté autour de I par un système de forces dont les moments de rotation soient N', M', L', nous aurons les angles de l'axe instantané avec les axes coordonnés par les formules:

$$\cos C_1' = \frac{N'}{A'K'}, \quad \cos B_1' = \frac{M'}{B'K'}, \quad \cos A_1' = \frac{L'}{C'K'}.$$

Mais les cosinus des angles de l'axe principal des moments des forces sont donnés par les expressions connues

$$\frac{N'}{\sqrt{(N'^2+M'^2+L'^2)}}, \quad \frac{M'}{\sqrt{(.....)}}, \quad \frac{L'}{\sqrt{(.....)}}.$$

Comme on a par hypothése $A' = B' = C'$, on aura également:

$$K' = \frac{I}{A'}.\sqrt{(N'^2+M'^2+L'^2)}, \quad \text{partant } \cos C_1' = \frac{N'}{\sqrt{(N'^2+M'^2+L'^2)}}, \quad \text{etc.,}$$

et cela conduirait à conclure que l'axe d'ébranlement des forces coïncide toujours avec l'axe de leur moment de rotation maximum. Ce résultat est absurde, puisque, sauf les cas particuliers signalés dans la *rémarque* citée ci-dessus, ces deux axes ne sauraient jamais coïncider ensemble.

§. 8.

Additions.

Hâtons nous maintenant de reparer quelques omissions dans tout ce qui a été dit jusqu' ici, et d'indiquer brièvement quelques formules de transformation admises d'abord sans démonstration.

Addition au §. 4. *rémarq. IX.* Supposons qu'une ou plusieurs forces agissent parallélement au plan d'inertie γIz, nous aurons: $\alpha' = 90^0$, $\alpha' = 270^0$, partant

$$L = -P.l\cos\beta\cos\eta - P'l'\cos\beta'\cos\eta' - .....$$
$$N = -P.l\cos\gamma\sin\eta - P'l'\cos\gamma'\sin\eta' - .....$$
$$M = +P.l\cos\gamma\cos\eta + P'l'\cos\gamma'\cos\eta' - .....;$$

et ces trois sommes de moments n'étant géneralement pas nulles, une-à-une, ou deux-à-deux, on voit par les formules (III §. 4) que dans des cas pareils l'axe de rotation instantané ne coïncide généralement avec aucun de trois axes d'inertie. Pour le faire coïncider avec Iz par exemple, dans le cas d'une force unique, il faudra faire $\cos A_1 = 1$, $\cos C_1 = 0$, $\cos B_1 = 0$, partant $N = 0$, $M = 0$, ou $Pl\cos\gamma.\sin\eta = 0$, $Pl\cos\gamma.\cos\eta = 0$, ce qui exige que $\gamma = 90^0$, partant que la force agisse dans le plan d'inertie normal à l'axe principal prescrit.

Démonstration de la formule (4), rémarque VI, et de celles admises au §. 5.:

Soient $(\alpha\beta\gamma)$ $(\alpha'\beta'\gamma')$ les cosinus des angles de deux droites D, D' avec des axes coordonnés rectangles ox, oy, oz. On a par une formule facile à établir:

$$\cos(D,D') = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'.$$

D'où $\sin^2(D,D') = 1 - \alpha^2\alpha'^2 - \beta^2\beta'^2 - \gamma^2\gamma'^2 - 2\alpha\alpha'\beta\beta' - 2\beta\beta'\gamma\gamma' - 2\gamma\gamma'\alpha\alpha'$
$= 1 - \alpha^2(1-\beta'^2-\gamma'^2) - \beta^2(1-\alpha'^2-\gamma'^2) - \gamma^2(1-\alpha'^2-\beta'^2) - 2\alpha\alpha'\beta\beta' - \text{etc.}$
$-1 - (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha^2\beta'^2+\alpha^2\gamma'^2+\beta^2\alpha'^2+\beta^2\gamma'^2+\gamma^2\alpha'^2+\gamma^2\beta'^2 - 2\alpha\alpha'\beta\beta'$
$-2\beta\beta'\gamma\gamma' - 2\gamma\gamma'\alpha\alpha'.$

ou

$\sin^2(D,D') = (\alpha\beta' - 2'\beta)^2 + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2 + (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)^2$. (Formule 4. Rémarque VI. du §. 5). Cela posé, soient:

(D.) $\qquad \beta x - \alpha y = p, \qquad \alpha z - \gamma x = r$

les équations d'une droite fixe, de direction $(\alpha\beta\gamma)$,

(D.) $\qquad \beta' x - \alpha' y = p', \qquad \alpha' z - \gamma' x = r'$

celles d'une droite mobile, mais constante quant à sa direction $(\alpha'\beta'\gamma')$, de sorte que α', β', γ' sont des quantités constantes, tandis que p', r' sont variables avec la position de la droite. Pour exprimer que (D') glisse sur (D), en conservant sa direction, il faut combiner ensemble les équations, ce qui donnera:

$$(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')(p\alpha' - p'\alpha) - (\alpha\beta' - \beta\alpha')(r\alpha' - r'\alpha) = 0.$$

Pour avoir ensuite l'équation du plan ainsi engendré, il faut remettre dans cette égalité les valeurs de r', p' en fonction des coordonnées x, y, z des équations (D'). Cette substitution donne après réduction:

$$x + \left(\frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\beta'\gamma - \beta\gamma'}\right) y + \left(\frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\beta'\gamma - \beta\gamma'}\right) z + \frac{p}{\alpha}\cdot\frac{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'}{\beta'\gamma - \beta\gamma'} + \frac{r}{\alpha}\cdot\left(\frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\beta'\gamma - \beta\gamma'}\right) = 0.$$

Mais en nommant λ, μ, ν les angles de la normale à ce plan avec les axes coordonnés, on a aussi, d'après une autre définition du plan:

$$x + \frac{\mu}{\lambda}\cdot y + \frac{\nu}{\lambda}\cdot z = \frac{N}{\lambda};$$

ce qui donne les équations de condition

$$\mu : \lambda = (\alpha\gamma' - \alpha'\gamma) : (\beta'\gamma - \beta\gamma')$$
$$\nu : \lambda = (\beta\alpha' - \beta'\alpha) : (\beta'\gamma - \beta\gamma').$$

Elevant chaque membre au carré, faisant ensuite la somme, ajoutant λ^2 aux deux membres de l'égalité qui en résulte, et faisant rémarquer que $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, on obtiendra, eu égard à la valeur obtenue pour $\sin(D, D')$:

$$\lambda.\sin(D,D') = \beta'\gamma - \beta\gamma'$$
$$\mu.\sin(D,D') = \gamma'\alpha - \gamma\alpha'$$
$$\nu.\sin(D,D') = \alpha'\beta - \alpha\beta'.$$

Mais les cosinus des angles de l'axe principal des moments des forces sont donnés par les expressions connues

$$\frac{N'}{\sqrt{(N'^2+M'^2+L'^2)}}, \quad \frac{M'}{\sqrt{(.....)}}, \quad \frac{L'}{\sqrt{(.....)}}.$$

Comme on a par hypothése $A' = B' = C'$, on aura également:

$$K' = \frac{I}{A'}.\sqrt{(N'^2+M'^2+L'^2)}, \quad \text{partant } \cos C_1' = \frac{N'}{\sqrt{(N'^2+M'^2+L'^2)}}, \quad \text{etc.},$$

et cela conduirait à conclure que l'axe d'ébranlement des forces coïncide toujours avec l'axe de leur moment de rotation maximum. Ce résultat est absurde, puisque, sauf les cas particuliers signalés dans la *rémarque* citée ci-dessus, ces deux axes ne sauraient jamais coïncider ensemble.

§. 8.

Additions.

Hâtons nous maintenant de reparer quelques omissions dans tout ce qui a été dit jusqu' ici, et d'indiquer brièvement quelques formules de transformation admises d'abord sans démonstration.

Addition au §. 4. *rémarq. IX.* Supposons qu'une ou plusieurs forces agissent parallélement au plan d'inertie yIz, nous aurons: $\alpha' = 90^0$, $\alpha' = 270^0$, partant

$$L = -P.l\cos\beta\cos\eta - P'l'\cos\beta'\cos\eta' - .....$$
$$N = -P.l\cos\gamma\sin\eta - P'l'\cos\gamma'\sin\eta' - .....$$
$$M = +P.l\cos\gamma\cos\eta + P'l'\cos\gamma'\cos\eta' - .....;$$

et ces trois sommes de moments n'étant géneralement pas nulles, une-à-une, ou deux-à-deux, on voit par les formules (III §. 4) que dans des cas pareils l'axe de rotation instantané ne coïncide généralement avec aucun de trois axes d'inertie. Pour le faire coïncider avec Iz par exemple, dans le cas d'une force unique, il faudra faire $\cos A_1 = 1$, $\cos C_1 = 0$, $\cos B_1 = 0$, partant $N = 0$, $M = 0$, ou $Pl\cos\gamma.\sin\eta = 0$, $Pl\cos\gamma.\cos\eta = 0$, ce qui exige que $\gamma = 90^0$, partant que la force agisse dans le plan d'inertie normal à l'axe principal prescrit.

Démonstration de la formule (4), rémarque VI, et de celles admises au §. 5.:

Soient $(\alpha\beta\gamma)$ $(\alpha'\beta'\gamma')$ les cosinus des angles de deux droites D, D' avec des axes coordonnés rectangles ox, oy, oz. On a par une formule facile à établir:

$$\cos(D,D') = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'.$$

D'où $\sin^2(D,D') = 1 - \alpha^2\alpha'^2 - \beta^2\beta'^2 - \gamma^2\gamma'^2 - 2\alpha\alpha'\beta\beta' - 2\beta\beta'\gamma\gamma' - 2\gamma\gamma'\alpha\alpha'$
$= 1 - \alpha^2(1-\beta'^2-\gamma'^2) - \beta^2(1-\alpha'^2-\gamma'^2) - \gamma^2(1-\alpha'^2-\beta'^2) - 2\alpha\alpha'\beta\beta' - \text{etc.}$
$-1 - (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\alpha^2\beta'^2+\alpha^2\gamma'^2+\beta^2\alpha'^2+\beta^2\gamma'^2+\gamma^2\alpha'^2+\gamma^2\beta'^2 - 2\alpha\alpha'\beta\beta'$
$-2\beta\beta'\gamma\gamma' - 2\gamma\gamma'\alpha\alpha'.$

ou

$\sin^2(D,D') = (\alpha\beta' - 2'\beta)^2 + (\beta\gamma' - \beta'\gamma)^2 + (\gamma\alpha' - \gamma'\alpha)^2$. (Formule 4. Rémarque VI. du §. 5). Cela posé, soient:

(D.) $\qquad \beta x - \alpha y = p, \qquad \alpha z - \gamma x = r$

les équations d'une droite fixe, de direction $(\alpha\beta\gamma)$,

(D.) $\qquad \beta' x - \alpha' y = p', \qquad \alpha' z - \gamma' x = r'$

celles d'une droite mobile, mais constante quant à sa direction $(\alpha'\beta'\gamma')$, de sorte que α', β', γ' sont des quantités constantes, tandis que p', r' sont variables avec la position de la droite. Pour exprimer que (D') glisse sur (D), en conservant sa direction, il faut combiner ensemble les équations, ce qui donnera:

$$(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')(p\alpha' - p'\alpha) - (\alpha\beta' - \beta\alpha')(r\alpha' - r'\alpha) = 0.$$

Pour avoir ensuite l'équation du plan ainsi engendré, il faut remettre dans cette égalité les valeurs de r', p' en fonction des coordonnées x, y, z des équations (D'). Cette substitution donne après réduction:

$$x + \left(\frac{\alpha\gamma' - \gamma\alpha'}{\beta'\gamma - \beta\gamma'}\right)y + \left(\frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\beta'\gamma - \beta\gamma'}\right)z + \frac{p}{\alpha}\cdot\frac{\gamma\alpha' - \alpha\gamma'}{\beta'\gamma - \beta\gamma'} + \frac{r}{\alpha}\cdot\left(\frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\beta'\gamma - \beta\gamma'}\right) = 0.$$

Mais en nommant λ, μ, ν les angles de la normale à ce plan avec les axes coordonnés, on a aussi, d'après une autre définition du plan:

$$x + \frac{\mu}{\lambda}\cdot y + \frac{\nu}{\lambda}\cdot z = \frac{N}{\lambda};$$

ce qui donne les équations de condition

$$\mu : \lambda = (\alpha\gamma' - \alpha'\gamma) : (\beta'\gamma - \beta\gamma')$$
$$\nu : \lambda = (\beta\alpha' - \beta'\alpha) : (\beta'\gamma - \beta\gamma').$$

Elevant chaque membre au carré, faisant ensuite la somme, ajoutant λ^2 aux deux membres de l'égalité qui en résulte, et faisant rémarquer que $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, on obtiendra, eu égard à la valeur obtenue pour $\sin(D, D')$:

$$\lambda . \sin(D,D') = \beta'\gamma - \beta\gamma'$$
$$\mu . \sin(D,D') = \gamma'\alpha - \gamma\alpha'$$
$$\nu . \sin(D,D') = \alpha'\beta - \alpha\beta'.$$

Ainsi, ajoutant dans l'espace deux droites qui se coupent, mais quelconques de directions: toute droite (λ, μ, ν) qui est perpendiculaire à leur plan, ou qui les croise toutes deux à angle droit, quand ces droites elles-mêmes ne se coupent pas, satisfera aux trois équations de condition précédentes, qui résultent aussi de la transformation des coordonnées. Pour $(D,D') = 90^0$, on obtient les conditions de transformation admises au (§. 5). Faisons rémarquer d'après cela que si l'on fait tourner un système de deux directions (α,β,γ) $(\alpha'\beta'\gamma')$ d'une manière quelconque dans un même plan fixe, et sans altérer toutefois leur inclinaison mutuelle, les combinaisons $\beta'\gamma - \beta\gamma'$, $\gamma'\alpha - \gamma\alpha'$, qui se déduisent l'une de l'autre par la méthode de l'échange progressif, ne cesseront pas de conserver chacune une valeur constante; car le plan restant fixe, λ, μ, ν ne changent pas, et sin (D,D') reste invariable, parceque l'on conserve aux deux lignes une inclinaison invariable.

Rémarque sur le §. 4. On pourrait trouver singulier de faire coïncider les axes coordonnés avec les axes d'inertie du solide, puisque par l'effet instantané de la force, ceux-ci s'ébranlent ou se déplacent infiniment peu. Mais si l'on considère les axes coordonnés comme des lignes fixes, idéales, rien n'empêchera, de faire tel choix qu'on voudra; et l'on pourrait les diriger suivant trois autres axes rectangles désignés du corps solide. Sans que ceux-ci soient empêchés de se déplacer, comme le premier système: seulement dans les formules du (§. 4) les quantités A, B, C expriment les moments d'inertie du corps par rapport aux axes coordonnés; et si nous avons dirigé ceux-ci suivant les lignes principales, c'est parceque dans chaque question particulière l'évaluation des données immédiates, telles que A, B, C, serait plus facile, et qu'ensuite ces lignes et les plans qu'elles forment deux-à-deux, doivent jouir de certaines propriétés mécaniques plus ou moins rémarquables. Abstraction faite de ces considérations, suffisamment décisives, le choix des axes est absolument arbitraire; néanmoins il ne serait jamais permis de choisir par exemple pour plan des (xy) le plan déterminé par le point fixe I et la ligne d'action de la force; car cela reviendrait à admettre gratuitement que la force appliquée ne puisse tourner le solide qu'autour d'un axe perpendiculaire à ce plan, puisque en rendant fixe un axe quelconque du plan, on detruirait son effet dynamique sur les corps.

Autre rémarque. La détermination de l'axe instantané de rotation, d'après l'idée un peu vague ici, d'une moindre quantité d'action ou d'une force vive *maximum* ou *minimum,* ne nous parait pas admissible, quoiqu'elle soit exacte, parceque l'on ne saurait prevoir à l'avance si c'est le maximum ou le minimum

qui doit avoir lieu. Cela est si vrai que, si notre mémoire est bonne, l'illustre *Euler* s'est mépris lui-même à ce sujet dans sa *theoria motûs corporum rigidorum*. Concevons que l'on fixe l'axe du moment principal de la force. Celle-ci fera donc tourner le solide pendant l'instant dt d'une quantité angulaire $d\lambda$, directement proportionnelle au moment principal $\sqrt{(N^2+M^2+L^2)} = \mu$, et inversement proportionnelle au moment d'inertie $\int \varrho'^2 dm$ du solide, relatif à cet axe, de sorte que l'on a dans cette hypothèse:

$$d\lambda = \tfrac{1}{2}.dt^2.\left(\frac{\mu}{\int \varrho'^2 dm}\right).$$

Nommons IH cet axe principal, et il vient:

$$\int \varrho'^2 dm = A\cos^2(H\hat{I}X) + B\cos^2(HIY) + C.\cos^2(H\hat{I}Z);$$

et en substituant pour $\cos^2(HIX)$, ... leurs valeurs $\frac{N^2}{\mu^2}$ ....., on obtient:

$$\int \varrho'^2 dm = A.\frac{N^2}{\mu^2} + B.\frac{M^2}{\mu^2} + C.\frac{L^2}{\mu^2}, \quad \text{et} \quad d\lambda = \tfrac{1}{2}dt^2 \times \frac{\mu^3}{AN^2+BM^2+CL^2}.$$

D'un autre côté la force vive instantanée, correspondante à la rotation $d\lambda$, doit avoir pour expression:

$$\left(\frac{2d\lambda}{dt}\right)^2 \int \varrho'^2 dm \quad \text{ou} \quad dt^2.\frac{\mu^4}{AN^2+BM^2+CL^2};$$

mais la force vive instantanée qui résulte de la rotation spontanée $d\xi$ a pour valeur $\left(\frac{2d\xi}{dt}\right)^2.\int \varrho^2 dm$, ou $dt^2.K^2.\int \varrho^2 dm$, ou bien encore $dt^2.\left(\frac{L^2}{C^2}+\frac{M^2}{B^2}+\frac{N^2}{A^2}\right)$.

Or au premier abord on pourrait se tromper ici, en admettant gratuitement que la force vive autour de l'axe IH doive être plus grande que celle autour de l'axe spontané, par la raison apparente que le moment de la force autour de l'axe IH est un maximum; car la rotation élémentaire est d'un autre côté inversement proportionnelle au moment d'inertie du solide. En retranchant même la force vive autour de IH de celle autour de l'axe spontané IO, on trouve la quantité positive

$$\frac{dt^2}{ABC\cdot(AN^2+BM^2+CL^2)}\cdot\left[M^2N^2C(A-B)^2+N^2L^2B(A-C)^2+M^2L^2A(B-C)^2\right].$$

Mais admettre d'avance que la force vive autour de l'axe instantané et spontané IO soit ou un *maximum* ou un *minimum*, ce serait faire une hypothèse, selon nous, trop gratuite et à peu près aussi hazardée que celle qui consisterait à considérer la force vive autour de IH comme un maximum. Seulement on voit par le reste *positif*, que si la première de ces quantités est une extrême grandeur

elle doit être un *maximum*; contrairement à la supposition d'*Euler*, qui la considère comme un *minimum*. Toutefois les résultats de l'auteur sont exacts, parcequ'ils dépendent uniquement d'équations de condition qui expriment la simple existence d'une *extrême grandeur*.

Nommons (α',β',γ') les angles d'un axe fixe inconnu ou indéterminé avec les trois axes d'inertie, et $d\xi'$ la rotation élémentaire autour de cet axe, produite par des forces donnés. L'énergie totale des forces à tourner le système sera donc $N\cos\alpha' + M\cos\beta' + L\cos\gamma'$; et en désignant par $\int r^2 dm$ son moment d'inertie relatif à $(\alpha'\beta'\gamma')$, on aura:

$$\int r^2 dm = A\cos^2\alpha' + B\cos^2\beta' + C.\cos^2\gamma',$$

$$d\xi' = \tfrac{1}{2}dt^2 \cdot \frac{N\cos\alpha' + M\cos\beta' + L\cos\gamma'}{A\cos^2\alpha' + B\cos^2\beta' + C\cdot\cos^2\gamma'},$$

et la force vive instantanée correspondante aura la valeur:

$$\left(\frac{2d\xi'}{dt}\right)^2 \int r^2 dm = dt^2 . \frac{(N\cos\alpha' + M\cos\beta' + L\cos')^2}{A\cos^2\alpha' + B\cos^2\beta' + C\cos^2\gamma'}.$$

Soit ε l'angle avec l'axe Ix de la projection de l'axe $(\alpha'\beta'\gamma')$ sur le plan yx, et τ l'angle d'inclinaison de cet axe sur le plan (xy), on aura:

$$\cos\alpha' = \cos\varepsilon.\cos\tau, \qquad \cos\beta' = \sin\varepsilon.\cos\tau, \qquad \cos\gamma' = \sin\tau;$$

$$\left(\frac{2d\xi'}{dt}\right)^2 \int r^2 dm = dt^2 . \frac{[(N\cos\varepsilon + M\sin\varepsilon)\cos\tau + L\sin\tau]^2}{(A\cos^2\varepsilon + B\sin^2\varepsilon)\cos^2\tau + C\sin^2\tau}.$$

Il faudra déterminer les angles ε et τ par les équations de condition $\frac{dV}{d\varepsilon}=0$, $\frac{dV}{d\tau}=0$, qui donneront

$$\text{tang}\,\varepsilon = \frac{A}{B}\cdot\frac{M}{N}, \quad \text{tang}\,\tau = \frac{A\cdot B\cdot L}{C\cdot\sqrt{(A^2M^2 + B^2N^2)}}.$$

Et ces valeurs sont précisement celles que l'on a obtenues au (§. 4.) et représentées là par les formules (IV). L'axe d'ébranlement ou de rotation instantanée est donc bien en effet l'axe d'une force vive maximum; c'est-à-dire que l'effet dynamique instantané de plusieurs forces qui agissent sur un solide à point fixe, est toujours un maximum ou le plus grand de tous les effets infiniment petits de même espèce dont les forces seraient capables autour d'un axe fixe quelconque en ce point.

Si dans les formules précédentes on pose $\text{tang}\,\tau = u$, $(N\cos\varepsilon + M\sin\varepsilon + Lu)^2 = n^2$, $A\cos^2\varepsilon + B\sin^2\varepsilon + C.\,\text{tang}^2\tau = D$, on déterminera ε, τ, par les conditions

$$\frac{dV}{du} = 0, \qquad \frac{dV}{d\varepsilon} = 0.$$

Le calcul donnnera:

$$D.L = n.C.u\,, \qquad n(B-A)\sin\varepsilon.\cos\varepsilon = D(M\cos\varepsilon - N\sin\varepsilon).$$

D'où: $u = \frac{L\cdot(B-A)\sin\varepsilon\cdot\cos\varepsilon}{C(M\cos\varepsilon - N\sin\varepsilon)} = \frac{L\cdot(B-A)\lambda}{C\cdot(M-N\lambda)}\cdot\frac{1}{\sqrt{(1+\lambda^2)}}$, pour $\operatorname{tang}\varepsilon = \lambda$.

Si l'on reporte la valeur de λ ou ε dans l'une des deux premières équations obtenues, après y avoir remplacé D, n par leurs significations, on obtient après toutes les réductions:

$$AM(1+\lambda^2) - BN.\lambda.(1+\lambda^2) = 0, \quad \text{partant } \operatorname{tang}\varepsilon = \lambda = \frac{AM}{BN};$$

d'où l'on conclut la valeur de u donnée plus haut. Mais une même valeur de λ donne $\cos\varepsilon = \pm\frac{I}{\sqrt{(1+\lambda^2)}}$, $\sin\varepsilon = \pm\frac{\lambda}{\sqrt{(I+\lambda^2)}}$:

$$u' = \frac{L(B-A)\lambda}{C(M-N\lambda)\sqrt{(1+\lambda^2)}}\,, \qquad u'' = -\frac{L(B-A)\lambda}{C(M-N\lambda)\sqrt{(1+\lambda^2)}}.$$

Ainsi l'angle τ a deux valeurs: l'une τ', l'autre τ'', supplémentaire de la première. Il existe donc deux axes, donnant pour la force vive une extrême grandeur: l'un (ε, τ'), et l'autre (ε, τ'') compris dans le même plan projetant. Les cosinus des angles du premier avec les axes coordonnés sont donnés par les formules du (§.4), déjà citées; ceux du second seront au contraire:

$$-\frac{N}{AK}, \quad -\frac{M}{B\cdot K}, \quad +\frac{L}{C\cdot K};$$

et puisque le premier est l'axe de la force vive *maxima*, le second doit être l'axe de la force vive *minima*: l'expression de cette dernière aura la valeur

$$\left(\frac{2d\xi''}{dt}\right)^2\int r'^2\,dm = dt^2.\frac{\left(\frac{L^2}{C}-\frac{M^2}{B}-\frac{N^2}{A}\right)^2}{\frac{L^2}{C}+\frac{M^2}{B}+\frac{N^2}{A}},$$ dont la différence avec le maximum

se réduit à l'expression $\frac{4\cdot L^2\cdot(AM^2+BN^2)}{B\cdot C\cdot N^2 + AC\cdot M^2 + AB\cdot L^2}\cdot dt^2$.

Si l'on substitue la valeur de λ obtenue plus haut, dans la seconde équation en D et n, on obtient pour u l'équation suivante du second degré pour $\cos\varepsilon = h$, $\sin\varepsilon = g$:

$$u^2 - \frac{(B-A)\,gh\cdot L}{(Mh-Ng)\cdot C}\cdot u = \frac{(B-A)gh\cdot(Mg+Nh)}{C(Mh-Ng)} - \frac{Ah^2+Bg^2}{C}.$$

Or si l'on égale à zéro le second membre de celle-ci, on retrouve pour λ la valeur déjà obtenue; de sorte que ce membre est nul en effet. L'équation en u^2, u, donne donc pour u les deux valeurs $u' = \frac{(B-A)\,gh\cdot L}{2C\cdot Mh-Ng)}$, et $u'' = 0$,

dont la première est identique à celle qu'on a déjà obtenue. Quant à l'autre

$u'' = 0$, comme la différentiation a fourni $DL = nC.u$, $u = u'' = 0$, donnerait $D.L = 0$; partant $D = 0$, ou $L = 0$; et comme il est impossible d'avoir $D = 0$, il s'ensuit que la solution $u = 0$ est seulement admissible pour $L = 0$. Mais dans ce cas même elle est superflue, puisque l'autre valeur plus générale de $\tang \tau$ devient nulle avec $L = 0$.

Autre démonstration des formules de transformation du §. 5.

Concevons par la point fixe (o) d'un solide trois axes coordonnés rectangles ox, oy, oz que l'on puisse fixer tour-à-tour dans le solide, comme véritables essieux de rotation successifs. En un point quelconque (A), intérieur ou extérieur, mais solidaire avec le corps, faisons agir une force π, qui fasse avec les axes coordonnès les angles λ, μ, ν; tirons la droite OA, et faisons en outre

$$A\hat{O}X = \eta, \qquad A\hat{O}Y = \delta, \qquad A\hat{o}z = \zeta : OA = r.$$

Les coordonnées du point A seront d'après cette notation: $r\cos\eta$, $r\cos\delta$, $r\cos\zeta$. En désignant par L, N, M les moments de π autour des axes respectifs Oz, Ox, Oy, rendus fixes successivement, nous aurons:

$$L = \pi.r(\cos\mu\cos\eta - \cos\lambda.\cos\delta)$$
$$N = \pi.r(\cos\nu.\cos\delta - \cos\mu.\cos\zeta)$$
$$M = \pi.r(\cos\lambda.\cos\zeta - \cos\nu.\cos\eta).$$

Soit dans le plan principal, formé par (o) et par ligne d'action de la force, qu'on nommera $A\pi$, φ l'angle compris entre OA et $A\pi$. La valeur μ du moment principal sera donc $\pi.OA.\sin\varphi$ ou $\pi r.\sin\varphi$. Mais d'après ce que l'on sait par la notion fondamentale de la théorie des moments, ce moment principal doit avoir aussi la valeur

$$\mu = \sqrt{(L^2+N^2+M^2)} = \pi r.\sqrt{[(\cos\mu\cos\eta - \cos\lambda\cos\delta)^2 + (\cos\nu\cos\delta - \cos\mu\cos\zeta)^2 + \text{etc.}]}.$$

On aura donc par suite de cette double valeur de μ:

$$\sin^2\varphi = (\cos\mu\cos\eta - \cos\lambda\cos\delta)^2 + (\cos\nu\cos\delta - \cos\mu\cos\zeta)^2 + (\cos\lambda\cos\zeta - \cos\nu\cos\eta)^2.$$

Soient g, h, k les angles de la normale au plan principal $(OA\pi)$ avec les axes coordonnés: on aura par la théorie connue:

$$\cos g = \frac{N}{\mu}, \qquad \cos h = \frac{M}{\mu} : \cos k = \frac{L}{\mu}.$$

Substituant dans celles-ci les valeurs de N, M, L données plus haut, et remplaçant μ par sa première valeur $\pi.r.\sin\varphi$, on en déduira immédiatement:

$$\cos g = \frac{\cos\nu\cdot\cos\delta - \cos\mu\cdot\cos\zeta}{\sin\varphi}, \qquad \cos h = \frac{\cos\lambda\cos\zeta - \cos\nu\cos\eta}{\sin\varphi}, \qquad \cos k = \text{etc.}$$

Et telles sont bien les équations de condition générales que l'on avoit en vûe: car il est permis de considérer les lignes OA, $O\pi$ comme deux droites arbitraires qui se coupent ou se croisent sous un angle quelconque φ, tandis que la troisième direction (g, h, k) est normale a leur plan, ou les croise toutes deux à angle droit dans l'espace. C'est ce qu'on peut exprimer en disant qu'une direction (g, h, k) croise a angle droit deux autres directions rectilignes $(\lambda, \mu, \nu)(\eta, \delta, \zeta)$; et dès lors on aura toujours:

$$\sin\varphi \cdot \cos g = \cos\nu \cos\delta - \cos\mu \cdot \cos\zeta ;$$

Le deux autres formules n'ont pas même besoin d'êtres écrites, puisqu'elles résultent de la première par la méthode de l'echange progressif ou regressif des lettres, qui consiste à avancer d'un rang pour chaque lettre, quand on veut passer d'une première formule à la formule analogue. Dans sa seconde édition (Paris 1833) *Poisson* indique en peu de mots (t. I. p. 37—38) cette méthode qu'il nomme la *permutation tournante*, par la raison sans doute que quand les dernières lettres sont épuisées, il faut revenir sur les premières, et considérer celles-ci comme la succession des autres, de même que l'on revient finalement sur son point de départ, quand ou parcourt une circonférence de cercle. Mais nous devons à la vérité, de déclarer que Monsieur *Pagani* a déjà employé cette méthode de la permutation dans ses leçons à l'Université de *Liége* avant la publication de l'ouvrage de *Poisson*, et il parait que le mémoire où il en parle, a paru aussi antérieurement à cet ouvrage, dans la collection des mémoires de l'académie de *Bruxelles* 1833. Quant à nous, sans avoir égard à ce que *Poisson* dit de cette méthode, dont il ne fait pas d'ailleurs usage, et sans connaître la manière de Mr. *Pagani* autrement que par ouï-dire, nous avons pris de prime abord notre point de départ dans les moments de rotation des forces, en plaçant l'oeil d'un observateur fictif successivement sur les trois axes coordonnés positifs, et en convenant de prendre comme positifs les moments des forces qui alors tendent à tourner de sa gauche vers sa droite, et par conséquent comme négatifs, ceux qui tendent en sens contraire, dans la supposition que cet observateur regarde à chaque fois dans l'angle de deux axes coordonnés positifs. La convention contraire est également permise; c'est même celle que nous avons adoptée dans quelques N^{os} de ce mémoire. Mais pour éviter des erreurs de signe et des résultats contradictoires, il importe de ne pas changer de convention dans le courant d'un même calcul. Sans doute on pourrait se passer de l'idée de faire intervenir ici un observateur fictif, et dire simplement, par exemple, qu'une rotation sur l'axe or est positive quand elle se fait de x positif vers y positif pour toute molécule située dans l'angle dièdre

zox, zoy; etc. Mais on éprouverait ainsi plus d'embarras à définir l'axe de rotation dans le cas où ce ne serait plus l'un des trois axes coordonnés; ce qui dans l'autre cas ne présente aucun embarras. En effét, la direction de cet axe, à partir de l'origine, sera la droite sur laquelle il faut placer l'oeil de l'observateur fictif, pour que la rotation se fasse de sa gauche vers sa droite dans la partie superieure du corps. Dans la supposition de la première convention, à partir d'un *point donné*, de *l'origine*, une droite a toujours deux directions, ou plutot deux sens d'action, diamètralement opposés. Or quand la rotation d'un solide se fait autour d'un telle droite originaire, l'axe de rotation sera celle de ces deux directions sur laquelle il faut placer l'oeil pour obtenir un mouvement de gauche à droite, ou une telle tendance au mouvement. En prenant les choses de ce point de vue, on retombe nécessairement sur la règle *mnémonique* de Mr. *Pagani*; et le résultat obtenu ci-dessus par les moments, suffit pour prouver qu'elle est applicable aussi aux formules connues de transformation des coordonnées. Ce résultat suppose que les moments positifs soient ceux qui tendent de gauche à droite. Pour s'en convaincre, reprenons la valeur de N, mise sous la forme $N = \pi.\cos\nu.r\cos\delta - \pi\cos\mu.r\cos\zeta$, ou $N = \pi\cos\nu.y - \pi\cos\mu.z$; (x, y, z) étant les coordonnées du point d'application de la force. Le second membre exprime donc évidemment le moment de π autour de ox de gauche à droite. Dans la convention contraire les seconds membres des valeurs de $\sin\varphi.\cos g$, $\sin\varphi\cos h$, $\sin\varphi\cos k$ changeraient de signes; c'est qu'alors aussi l'axe normal au plan principal aurait une direction diamètralement opposée à la direction primitive.

Rémarque sur la formule précédente. En multipliant par r les deux membres de l'équation qui donne $\sin\varphi$, on peut la mettre sous la forme

(1.) $r^2\sin^2\varphi = (\cos\mu.x - \cos\lambda.y)^2 + (\cos\nu.y - \cos\mu.z)^2 + (\cos\lambda.z - \cos\nu.x)^2.$

Mais les équations de la ligne droite $A\pi$ qui marque le sens d'action de la force π, sont:

(2.) $\cos\mu.x - \cos\lambda.y = p$; $\cos\nu.y - \cos\mu.z = q$, $\cos\lambda.z - \cos\nu.x = r$,

avec l'équation de condition entre constantes, et toute analogue à celle d'une résultante: $p.\cos r + q\cos\lambda + r.\cos\beta = 0$. De plus, pour réconnaître la signification géométrique des quantités p, q, r, nommons τ l'inclinaison de $A\pi$ sur le plan xy et ε l'angle de sa projection sur ce plan avec l'axe ox, ε' l'angle de cette projection avec l'axe oy: on aura:

$$\cos\varepsilon'.x - \cos\varepsilon.y = p',$$

pour l'équation de la projection, p' marquant la perpendiculaire tirée de l'origine sur la droite projetée; partant aussi:

$$\cos\varepsilon'.\cos\tau.x - \cos\varepsilon.\cos\tau.y = p'\cos\tau$$

ou

$$\cos\mu.x - \cos\lambda.y = p'\cos\tau.$$

On voit par là que p est la perpendiculaire p' reduite dans le rapport de $\cos\tau$ à 1. C'est donc ce qu'on peut nommer, pour abréger, la *perpendiculaire reduite*, tirée de l'origine sur la droite projetée. Mais les équations (1) et (2) donnent:

$$r^2\sin^2\varphi = p^2 + q^2 + r^2,$$

c'est-à-dire que le carré de la perpendiculaire, abaissée de l'origine sur une droite dans l'espace, est égale à la somme des carrés des *perpendiculaires réduites*, abaissées du même point sur les projections faites de la droite sur trois plans coordonnés rectangles du point fixe. En nommant τ, τ', τ'' les inclinaisons de la droite sur ces trois plans (xy, yz, zx), et p', q', r' ces perpendiculaires elles-mêmes, on peut faire encore:

$$r^2\sin^2\varphi = p'^2\cos^2\tau + q'^2\cos^2\tau' + r'.^2\cos^2\tau''.$$

Ce résultat a été déjà exposé d'une autre manière dans le journal de mathématique de Mr. *Liouville*. Ce que l'on vient de dire dans les rémarques précédentes, tend à prouver qu'il faudrait peut-être changer tout le système de notations de la géométrie analytique, et les mettre mieux en harmonie avec celles qu'on est obligé d'employer en mécanique. Il en résulterait plus d'unité et plus de facilité dans les moyens de recherches de l'une et de l'autre science; et l'on ne serait guères exposé à devoir refaire ce qui est déjà connu sous une forme différente.

Voici une autre propriété géométrique, à laquelle mène immédiatement l'idée mécanique du moment d'une force. Considérons un corps solide, pourvu d'un axe fixe $A'A''$ et soumis à l'action d'une force F qui croise cet axe sous un angle quelconque. Le moment principal de F, relatif à un point fixe (O) de l'axe $A'A''$, sera $F.ok$, ok dénotant la perpendiculaire abaissée de (O) sur F; et d'après le principe fondamental, $F.ok$ étant multiplié par le cosinus de l'angle entre $A'A''$ et l'axe OA, normal en (O) au plan $(O'F)$, donnera le moment de F autour de $A'A''$. Ainsi le produit $F.Ok.\cos(\hat{AOA'})$ exprimera ce moment, quelle que soit la position de (O) sur l'axe $A'A''$. Et comme la valeur de ce moment ne doit pas dépendre du point choisi, ni varier quand la force ne varie sous aucun rapport, il s'ensuit que la quantité purement géométrique $ok.\cos(\hat{AOA'})$ est constante, et qu'elle ne change pas, quand on déplace (O) sur l'axe donné d'une manière quelconque. Ainsi, en abaissant d'un point quelconque d'une

droite donnée dans l'espace, une perpendiculaire sur une seconde droite donnée, croisant la première, élevant ensuite une normale au plan déterminé par le point et par la seconde droite: le produit de la perpendiculaire ainsi tirée, par le cosinus de l'angle compris entre la normale et la première droite, est une quantité constante qui ne varie pas avec la position du point sur la droite.

Rémarque sur le §. 2. Une autre manière d'envisager la composition des moments des forces résultera de la solution de la question suivante:

Question. Etant donné le moment principal d'une force, relatif à un point fixe (O): déterminer son moment principal, relatif à un nouveau point fixe (O). Tirez la droite OA; par (O) menez une parallèle OQ à la ligne d'action de la force donnée F: de A, que l'on supposera au dessus du plan (o, F) qui renferme OQ, abaissez la perpendiculaire AQ sur cette parallèle. En Q, dans le plan (o,F), élevez sur OQ une perpendiculaire QP qui coupera F en P; tirez AP qui sera aussi perpendiculaire à F (car par construction le plan AQP, étant normal à OQ, le sera à sa parallèle F). Le triangle AQP donne:

$$AP^2 = AQ^2 + PQ^2 - 2AQ.QP.\cos A\hat{Q}P.$$

Mais $A\hat{Q}P$ mesure l'inclinaison du plan OAQ sur le plan principal primitif. En désignant donc par I cette inclinaison, par φ l'angle du rayon vecteur $OA=r$ avec la ligne de F, ou avec la parallèle OQ, on aura:

$$(F.AP)^2 = (F.AQ)^2 + (F.PQ)^2 - 2(F.AQ)(F.PQ)\cos I;$$

c'est-à-dire que le moment principal nouveau est le troisième côté d'un triangle dans lequel les deux autres son respectivement égaux au moment principal primitif $(F.QP)$, au moment principal de la force, ramenée parallélement à elle-même au premier point fixe, par rapport au nouveau point fixe, tandis que l'angle compris entre ces côtés est l'angle des deux plans $(O,F)(OAQ)$. Soit μ' le moment nouveau, et μ l'ancien, on aura en notations analytiques:

$$\mu'^2 = \mu^2 + (F.r.\sin\varphi)^2 - 2\mu.(Fr\sin\varphi)\cos I:$$

résultat auquel on parviendrait aussi par des transformations analytiques, mais d'une manière bien plus longue. On n'obtient que des résultats évidents à l'avance dans l'hypothèse que le nouveau point fixe soit sur le plan principal primitif, à l'intérieur ou à l'exterieur des droites F et OQ:

§. 9.

Mouvement naissant des corps solides parfaitement libres.

Dans ce qui précède nous avons considéré le déplacement instantané d'un corps solide, *pourvu d'un point fixe*, comme le résultat nécessaire d'une ou de plusieurs forces données; et en admettant la nature géometrique de ce mouvement, nous avons cherché à caractériser par des formules générales les effets dynamiques instantanés des forces. Nous allons considérer de ce même point de vùe le déplacement infiniment petit des solides *parfaitement libres*; car la question purement géométrique qui se rapporte à ce cas, se trouve déjà resolue par les travaux d'*Euler* et de *Lagrange*. Il est vrai que les deux beaux théorèmes de Mr. *Chasles* ne laissent pas de jeter une nouvelle l'umière sur cette matière. En voici d'abord l'énoncé.

1) Tout déplacement infiniment petit d'une figure plane dans son plan, n'est autre chose qu'une rotation instantanée de tous ses points autour d'un seul et même centre que l'on obtient par l'intersection de deux normales aux chemins élémentaires décrits par deux points quelconques de la figure mobile*).

2) Tout mouvement infiniment petit d'un corps solide, que *Lagrange* reduit à un mouvement de translation et de rotation, se reduit toujours d'après Mr. *Chasles* à celui d'une vis dans son écru parfaitement fixe. Le cas particulier où le *pas* de ce mouvement héliçoïde de chaque point serait nul, rentre dans le cas du premièr théorème, puisqu'alors chaque section matérielle du solide se déplace, sans sortir de son plan primitif. Jusqu'à ce jour on s'est occupé différemment et à diverses reprises de ces propriétés rémarquables; et si nous croyons devoir les aborder de notre côté, c'est dans le but de faire ce qui n'a pas été fait encore: d'envisager la question du point de vue *géometrique* et *mécanique* à la fois, de montrer la dépendance de ces propriétés avec le principe de la composition des mouvements, de les en déduire comme conséquences, et d'exposer les formules qui lient les espaces de translation et de rotation aux forces qui les produisent, et à la quantité de matière et aux moments d'inertie du solide. Tel sera l'indespensable complément aux notions exposées précédemment.

Si avant le déplacement virtuel d'une figure plane dans son plan, on la fixait par son point d'inertie ou par tout autre point, on pourrait toujours la faire

---

*) Mr. *Poncelet* a indiqué quelques applications rémarquables à la mécanique industrielle, de cette propriété, dans son cours de machines à l'école de Metz.

tourner sur ce point d'une rotation élémentaire convenable, pour lui donner une position *homothétique* avec la position infiniment voisine qu'elle occupe après le déplacement. On pourra donc amener aussi la figure primitive sur la figure qui a varié de position par une simple translation élémentaire commune à tous ses points, et parallèle à la direction de la droite qui joint le centre d'inertie primitif au centre varié. Ainsi, tout déplacément total de ce genre est l'équivalent de deux mouvements infiniment petits, successifs ou simultanés: l'un de *rotation*, l'autre de translation. Seulement dans le cas de la succession, chaque point de la figure proposée décrit en réalité deux chemins: l'un de rotation, et l'autre de translation commun à tous les points; tandis que dans les cas de la simultanéité, chaque point doit décrire un chemin unique, diagonale du parallèlogramme construit sur les chemins partiels. Dans l'une et l'autre hypothèse le déplacement final est le même, et en ce sens il est permis de substituer fictivement les deux mouvements simultanés à leur succession. Or soit (Fig. 5.) A un point quelconque de la figure, et assujetti à décrire à la fois la translation AB, et la rotation AC. Il décrira donc d'après le principe connu, la diagonale AD du parallèlogramme $BACD$, qui part du sommet A, et l'on aura:

$$AD^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB.AC.\cos(B\hat{A}C).$$

Désignons par $d\xi$ la rotation élémentaire dont il faut faire tourner la figure sur son centre d'inertie I, pour avoir la similitude de position dont il s'agit, et par dp le chemin de translation correspondant. En prenant $AI = r$, on obtient pour le chemin résultant de A:

$$AD^2 = dp^2 + r^2 d\xi^2 + 2dp.r\,d\xi.\cos(B\hat{A}C).$$

Pour un autre point quelconque A' de la figure on obtient encore:

$$A'D'^2 = dp^2 + r'^2 d\xi^2 + 2dp.r'\,d\xi.\cos(B'\hat{A}'C');$$

$A'B'$, $A'C'$ exprimant ses chemins partiels, et la translation dp ne changeant pas d'un point à un autre; r' exprime la distance de A' au centre d'inertie (I), pris dans une position quelconque. Mais quel que soit le déplacement produit, ou le mode d'action des forces et leur intensité, il doit exister un certain rapport fini entre la translation dp et la rotation angulaire $d\xi$, lequel ne change qu'avec le mode de déplacement. Ainsi, dans chaque mode on doit faire, ou avoir du moins le droit de faire: $dp = \varrho.d\xi$; ce qui donne, en nommant $A, A'', A''', \ldots$ les differents points de la figure, pour AD, $A'D'$, $A''D''$ ..... leurs chemins résultants:

$$AD^2 = (\varrho^2 + r^2 + 2r\varrho.\cos B\hat{A}C)\,d\xi^2$$
$$A'D'^2 = (\varrho^2 + r'^2 + 2r'.\varrho.\cos B'A'C)\,d\xi^2$$
$$A''D''^2 = (\varrho^2 + r''^2 + 2r''.\varrho.\cos B''A''C'')\,d\xi^2.$$

.....

Or on peut toujours construire un triangle avec les longueurs censées connues r, ϱ, et avec un angle $\omega = 180 - B\hat{A}C$, et le côté $\mathfrak{r}$, opposé à cet angle du triangle, aura la valeur donnée par l'égalité:

$$\mathfrak{r}^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r.\varrho.\cos\omega.$$

Si l'on fait la même opération avec les données ϱ, r', $\omega' = 180 - B'A''C'$ etc. ..... etc., et qu'on donne à tous ces triangles la base communé ϱ, on aura:

$$AD = \mathfrak{r}.d\xi\ ,\quad A'D' = \mathfrak{r}'d\xi\ ;\quad A''D'' = \mathfrak{r}''d\xi:\ \text{etc.};$$

et les quantités $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$, $\mathfrak{r}''$ ..... exprimeront évidemment les distances des éléments A, A', A'' ..... à une même extrêmité (O') de la base commune $IO' = \varrho$. Car en tirant IA au point A et joignant A à O', on obtient le premier triangle prescrit, puisque $AIO = GAC = 180^0 - BAC$; comme cela doit être. De plus, je dis que AO' est normal à AD: car comme on a $AB = dp = \varrho.d\xi = IO'.d\xi$ et $AC = rd\xi$, on aura $AB:BD(=AC) = IO':IA$; et l'angle $A\hat{B}D = G\hat{A}C = \hat{I}$: donc les deux triangles $ABD.AIO'$ sont semblables; ce qui donne l'angle aïgu en (O') égal à $B\hat{A}D$. La somme des deux angles $BAD + G\hat{A}O'$, valant parconséquent un angle droit, il faut que AO' et AD soient à angle droit: l'élément circulaire, décrit de (O') comme centre avec un rayon OA, est par conséquent dirigé suivant la droite AD, et il vaut AD même, si on le fait correspondre à l'angle $A\hat{O}'D = d\lambda$; et comme on a obtenu $AD = AO'.d\xi$, il s'ensuit que $d\lambda = d\xi$; partant que tous les points A, A', A'' ..... non seulement se meuvent instantanément autour d'un même centre (O'); mais qu'en outre leur rotation élémentaire autour de ce point est la même que la rotation élémentaire qui est requise autour du centre d'inertie, pour obtenir la similitude de position dont il s'agit plus haut dans l'hypothèse des mouvements partiels, successifs. Les considérations précédentes, fondées sur la composition des mouvements, doivent donc être bien conformes à la nature même du sujet, puisqu'elles font même ressortir une propriété que le théorème cité n'énonce pas. Faisons rémarquer aussi que ce premier théorème pourrait être aisément démontré encore par le moyen des superpositions géométriques. On commencerait d'abord par le cas d'un triangle;

d'où l'on conclurait immédiatement le cas général. Mais il convient de renoncer à ce moyen, tant que l'on ne trouve pas une démonstration *directe* et *analogue* du second théorème. Or nous ignorons si une pareille démonstration a été jamais donnée; ce n'est qu'après l'avoir vainement cherchée nous mêmes, que nous nous sommes decidé à admettre le théorème d'*Euler*, relatif au cas d'un solide à point fixe, pour en déduire l'autre propriété. Cette marche du reste nous semble parfaitement convenable et même la plus convenable dans les recherces mécaniques et dans l'enseignement de la science. Car un théorème, quel qu'il fût, ne saurait dispenser d'y recourir aux formules analytiques qui préparent la voie à la solution d'une foule de questions, en même temps qu'elles démontrent les propriétés des déplacements infiniment petits. Ce-ci posé, voici de quelle manière on peut parvenir à ce second théorème. Quel que soit le déplacement infiniment petit d'un corps solide d'une position P dans une position P', on peut toujours par un simple mouvement de transport amener d'abord le centre d'inertie (I) du solide, considére dans sa premiere position (P), sur le centre du corps considéré dans la position P'. Mais dès lors les deux solides (P) et (P') devront avoir deux quelconques de leurs points homologues infiniment voisins. Car, par hypothèse, le déplacement général n'est qu' infinitésimal, et le mouvement de transport dont il s'agit n'a pu qu'augmenter ou diminuer de quantités infinitésimales la distance de deux points homologues; il faut donc qu'après ce transport élémentaire, on puisse amener l'un des deux solides sur l'autre, par un simple mouvement infiniment petit sur un seul et même point déjà commun, qui est donc comme un point fixe. Or un tel mouvement d'un solide n'étant d'après le théorème d'*Euler,* qu'une rotation instantanée de tous ses points, il s'ensuit que l'on peut toujours opérer la superposition de P avec P', par le moyen de deux mouvements successifs: l'un de translation, commun à tous les points, et l'autre de rotation. Ainsi, tout déplacement infinitésimal d'un solide libre n'est autre chose que le resultat de deux mouvements, l'un de rotation, l'autre de translation, *successifs* ou *simultanés.* Mais le second de ces mouvements, commun à tout les points du solide, peut se décomposer en deux: l'un suivant l'axe d'ébranlement ou de rotation, l'autre suivant la ligne d'intersection du plan des deux axes avec le plan de rotation; de sorte que chaque point du corps peut être regardé comme animé d'un même mouvement de transport parallèl à l'axe de rotation, et de deux autres mouvements dirigés dans un plan normal à l'axe, l'un de rotation sur cet axe, et l'autre de translation dans le plan. Mais d'après la première propriété déjà démontrée, les deux derniers mouvements doivent se composer, pour chaque section du

solide normale à l'axe, en un seul et même mouvement de rotation élémentaire autour d'un axe parallèle à celui-là; et tous ces axes parallèles doivent former un axe unique; car tous les centres (o', o''..) se construisent comme dans la première question, et par les mêmes quantités finies et infiniment petites. Il s'ensuit de là que le déplacement se réduit à un mouvement de rotation autour d'un certain axe (o', o''), et à un mouvement de transport le long de l'axe, et que le chemin décrit par chaque point mobile n'est autre qu'un élément de spirale cylindrique.

Toutes les spirales se trouvent sur des surfaces concentriques à l'axe, et ont le même *pas*. Ce résultat démontre en même temps, que l'on obtient toujours la même direction pour l'axe de rotation, de quelque façon qu'on choisisse les mouvements fictifs et partiels, c'est-à-dire quel que soit le point du solide (P) que l'on amène d'abord sur son homologue de (P'), pour opérer ensuite la superposition des deux solides par une simple rotation instantanée autour du point commun aux deux corps.

Ce-ci posé, en admettant les conditions d'équilibre de plusieurs forces appliquées à un corps rigide, et faisant observer que quand des forces sollicitent un corps libre, il y à équilibre entre les actions et les réactions d'inertie, on est amené immédiatement à la loi du mouvement du centre d'inertie exprimée par des équations de la forme $\Sigma X - \Sigma m . \frac{d^2x}{\lambda t^2} = 0$ etc....., qui permettent de conclure que quand des forces sollicitent un corps solide libre et au repos, le centre d'inertie se meut de la même manière que si les forces y étaient ramenées parallèlement à elles-mêmes, et que la masse entiere y fût condensé. De plus, le mouvement total de chaque *autre* point du solide peut être remplacé par deux mouvements partiels: l'un égal et parallèle à la translation instantanée du centre, l'autre égal au second côté d'un parallèlogramme dont le mouvement total est la diagonale, tandis que le premier côté est égal et parallèle à cette translation. Soit R la résultante de transport des forces appliquées au corps, X, Y, Z ses composantes suivant trois axes rectangulaires fixés idéals qui ce coupent au centre d'inertie I, et avec lesquels coïncident par exemple les trois axes d'inertie, considérés dans leurs positions initiales. Soit (IO) l'axe d'ébranlement ou de rotation autour duquel tournent momentanément les différents points, en même temps qu'ils décrivent des chemins de translation égaux et parallèles, et C_1, B_1, A_1 les angles de IO avec les axes coordonnés Ix, Iy, Iz, respectivement; R' la projection rectangle de R sur l'axe IO: on aura:

$$R' = R\cos(\hat{R,IO}) = X\cos C_1 + Y\cos B_1 + Z.\cos A_1.$$

Mais quand un solide libre tourne instantanément sur un axe IO, rien ne saurait être changé à sa rotation, ni à la direction même de l'axe, si on en rend le centre fixe, de sorte que les valeurs de C_1, B_1, A_1 sont encore les mêmes que celles qu'on a données au (§. 4); et l'on aura par conséquent.

$$R' = \frac{N \cdot X}{A \cdot K} + \frac{M \cdot Y}{B \cdot K} + \frac{L \cdot Z}{C \cdot K}.$$

De plus, en nommant dp le chemin de translation de (I), décrit dans le sens de l'axe IO et μ la masse du solide, on a:

$$dp = \tfrac{1}{2} . dt^2 . \frac{R'}{\mu} = \tfrac{1}{2} . dt^2 . \left(\frac{BC \cdot NX + AC \cdot MY + AB \cdot LZ}{\mu \cdot A \cdot B \cdot C \cdot K} \right).$$

Tel est l'élément du pas de toutes les spirales cylindriques. Concevons maintenant en I un plan P, *fixe, idéal,* perpendiculaire à l'axe central IO. Pour avoir la position de l'axe de toutes les spirales, que l'on sait déjà devoir être parallèle à IO, il suffira de calculer les coordonnées de son point de rencontre avec (P) qui a pour équation:

$$(P.) \qquad \cos C_1 . X + \cos B_1 Y + \cos A_1 . Z = 0.$$

La translation II', qui coupe io en I, se décompose en deux: l'une dp suivant IO, et l'autre dp' suivant la ligne d'intersection IR'' du plan OII' avec le plan (P). En nommant R'' la composante de R suivant cette même ligne IR'', on aura:

$$R'' = R \cos(R, \hat{I}R'') = R \cos(I'\hat{I}R''), \qquad \text{et } dp' = \tfrac{1}{2} dt^2 . \frac{R \cos(R\hat{I}R'')}{\mu}.$$

On voit que pour avoir dp', il faut évaluer $\cos(RIR'')$ en fonction des données immédiates de la question. Nommons α, β, γ les angles de IR'' avec les axes coordonnées: on aura

$$R \cos(K\hat{I}K'') = X . \cos\alpha + Y \cos\beta + Z \cos\gamma,$$

et il faudra évaluer les angles α, β, γ. Mais on peut se passer de cette évaluation, s'il s'agit seulement d'obtenir la quantité $\cos(R'' iR) = \sin(O\hat{I}R)$. En effet, les deux directions io, iI' *ou* IR, faisant avec les axes coordonnés des angles $C_1 B_1 A_1$ et des cosinus d'angles $X:R$, $Y:R$, $Z:R$, on a par ce qui est déjà démontré:

$$R^2 . \sin^2(Rio) = [(Y \cos A_1 - Z \cos B_1)^2 + (Z \cos C_1 - X \cos A_1)^2 + (X \cos B_1 - Y \cos C_1)^2],$$

ce qui donne pour dp':

$$dp' = \tfrac{1}{2} . dt^2 . \frac{\sqrt{[(Y \cdot \cos A_1 - Z \cos B_1)^2 + (Z \cdot \cos C_1 - X \cos A_1)^2 + (X \cos B_1 - Y \cos C^1)^2]}}{\mu};$$

où l'on n'a plus qu'à substituer les valeurs de $\cos C_1$, $\cos B_1$, $\cos A_1$; ce qui fournit:

$$\left(\frac{2dp'}{dt^2}\right) = \frac{V[(A^2(BY\cdot L - CZM)^2 + B^2(CZN - AXL)^2 + C^2(AXM - BYN)^2]}{\mu\cdot K\cdot A\cdot B\cdot C}.$$

Concevons par $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{P}$ une droite $(\alpha'\beta'\gamma')$ ou $\boldsymbol{Io}$, normale au plan $(io, \boldsymbol{IR})$, on aura par ce qui est déjà connu:

$$\cos\alpha' = \left(\frac{Y}{R}\cos A_1 - \frac{Z}{R}\cos B\right) : \sin(R\hat{i}o):$$
$$\cos\beta' = \left(\frac{Z}{R}\cos C_1 - \frac{X}{R}\cos A_1\right) : \sin(R\hat{i}o):$$
$$\cos\gamma' = \left(\frac{X}{R}\cos B_1 - \frac{Y}{R}\cdot\cos C_1\right) : \sin(R\hat{i}o).$$

Mais on obtient par le même principe, à cause de la direction $(\alpha\beta\gamma)$, à la fois normale à (io) et à $(\alpha'\beta'\gamma')$:

$$\cos\alpha = \cos A_1\cdot\beta' - \cos B_1\cdot\gamma'$$
$$\cos\beta = \cos C_1\cdot\gamma' - \cos A_1\cdot\alpha'$$
$$\cos\gamma = \cos B_1\cdot\alpha' - \cos C_1\cdot\beta',$$

et en substituant dans celles-ci les valeurs de α', β', γ', on obtient pour α, β, γ:

$$\cos\alpha = \frac{X(\cos^2 A_1 + \cos^2 B_1) - \cos C_1(Y\cos B_1 + Z\cos A_1)}{R\sin(R\hat{i}o)}$$
$$\cos\beta = \frac{Y(\cos^2 C_1 + \cos^2 A_1) - \cos B_1(Z\cos A_1 + X\cos C_1)}{R\sin(R\hat{i}o)}$$
$$\cos\gamma = \frac{Z(\cos^2 B_1 + \cos^2 C_1) - \cos A_1(X\cos C_1 + Y\cos B_1)}{R\sin(R\hat{i}o)}.$$

On peut donc dire que les angles α, β, γ sont connus en fonctions des données immédiates de la question, et parallèlement aux trois axes coordonnés les valeurs de dp' se reduiront à $dp'\cos\alpha$, $dp'\cos\beta$, $dp''\cos\gamma$. Mais la rotation élémentaire $d\xi$ autour de l'axe central io aura la valeur totale

$$d\xi = \tfrac{1}{2}.K.dt^2 \quad , \qquad K^2 = \frac{N^2}{A^2} + \frac{M^2}{B^2} + \frac{L^2}{C^2}.$$

Si donc on dénote par (x, y, z) les coordonnés d'une molécule quelconque, les variations de coordonnées dûes à $d\xi$, seront, d'après ce qu'on sait, et comme on peut aisément le retrouver:

$$(z\cos B_1 - y\cos A_1)\,d\xi\,; \qquad (x\cos A_1 - z\cos C_1)\,d\xi\,, \qquad (y\cos C_1 - x\cos B_1)\,d\xi.$$

Mais le mouvement circulaire de chaque point dans le plan $\boldsymbol{P}$, ou dans un plan parallèle, peut se composer en un mouvement unique, avec la translation dp' dans ce même plan, et parallèle a la ligne $\boldsymbol{IR''}$: or la projection du mouvement résultant, qui est une diagonale de parallèlogramme, doit valoir la somme algé-

brique des projections des deux chemins partiels sur le même axe Ix, iy, iz. Donc la variation d'abscisse, subie par le point placé d'abord en x, y, z, doit valoir la somme des projections du chemin circulaire et de translation dp', et l'on aura par conséquent pour les variations des coordonnées, dûes aux deux mouvements partiels $d\xi$, dp' :

$$(1.)\qquad \begin{cases} \delta x = (z\cos B_1 - y\cos A_1)\,d\xi + dp'\cos\alpha \\ \delta y = (x\cos A_1 - z\cos C_1)\,d\xi + dp'\cos\beta \\ \delta z = (y\cos C_1 - x\cos B_1)\,d\xi + dp'\cos\gamma . \end{cases}$$

On adopte la notation δx, parceque l'on laisse de côté la variation partielle dûe au mouvement de glissement dp du solide le long de l'axe central. Pour s'assurer maintenant de nouveau que les deux mouvements $d\xi$, dp' peuvent se composer en un seul mouvement de rotation, il faut pouvoir trouver un axe exterieur ou intérieur du solide, pour chaque point duquel les quantités δx, δy, δz soient nulles. Il est bien entendu qu'alors cet axe est censé invariablement lié au corps. On aura donc entre les coordonnées de l'un quelconque de ses points, si toutefois la question est possible :

$$(A.)\qquad \begin{cases} (z\cos B_1 - y\cos A_1)\,d\xi + dp'\cos\alpha = 0\,, \\ (x\cos A_1 - x\cos C_1)\,d\xi + dp'\cos\beta = 0\,, \\ (y\cos C_1 - z\cos B_1)\,d\xi + dp'\cos\gamma = 0\,. \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que l'une quelconque de ces trois égalités est une suite nécessaire des deux autres, en vertu de la condition $\cos\alpha\cos C_1 + \cos\beta\cos B_1 + \cos\gamma\cdot\cos A_1 = 0$. On voit donc que la question de la composition des deux mouvements partiels $d\xi$, dp' de chaque point en un mouvement de rotation autour d'un seul et même axe commun, non seulement est possible, mais qu'encore cet axe est exprimé par les 2 ou 3 équations précédentes. Celles-ci montrent d'abord que cet axe est parallèle à l'axe central (IO) ou $(C_1B_1A_1)$; et pour avoir sa position, il suffira de chercher les coordonnées de son point de rencontre avec le plan (P). Si donc on dénote par W la quantité totale par laquelle il faut multiplier $\frac{1}{2}dt^2$, pour avoir dp', et que l'on rémarque que $d\xi = \frac{1}{2}dt^2.K$, on aura au lieu des trois équations précédentes, celles-ci:

$$(B.)\qquad \begin{cases} (z\cos B_1 - y\cos A_1) + \dfrac{W}{K}\cos\alpha = 0 \\ x\cos A_1 - z\cos C_1 + \dfrac{W}{K}\cos\beta = 0 \\ y\cos C_1 - x\cos B_1 + \dfrac{W}{K}\cos\gamma = 0, \end{cases}$$

et l'on trouvera aisément pour les coordonnées du point de rencontre dont il s'agit, les valeurs:

$$x_1 = \frac{W}{K}\cdot(\cos B_1 \cos\gamma - \cos A_1 \cos\beta)\,, \qquad y_1 = \frac{W}{K}(\cos A_1 \cos\alpha - \cos C_1 \cos\gamma)$$

$$z_1 = \frac{W}{K}\cdot(\cos C_1 \cos\beta - \cos B_1 \cos a).$$

On obtient la première en éliminant (y, z), la seconde en éliminant (z, x), et la troisième en chassant (x, y). En procedant d'une façon différente, on trouverait par exemple y, z sous d'autres formes encore Dans ces valeurs de x_1, y_1, z_1 on n'aura plus qu'à substituer à α, β, γ leurs expressions en fonctions de (X, Y, Z, C_1, B_1, A_1) puis à remplacer A_1, B_1, C_1 par leurs valeurs en fonction des données, et les quantités x_1, y_1, z_1 se trouveront finalement exprimées en fonctions des données immédiates de la question. De plus, les formules (A) montrent encore que la rotation résultante autour de l'axe normal à (P), au point $(x_1 y_1 z_1)$, est égale à la rotation $d\xi$ autour de l'axe central IO.

Soient en effet x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque du solide, rapporté au point d'intersection de l'axe avec P: on aura $y' = y - y_1$, $z' = z - z_1$, $x' = x - x_1$: partant $\delta y' = \delta y - \delta y_1$, $\delta z' = \delta z - \delta z_1 : \delta x' = \delta x - \delta x_1$. Et en nomment $d\lambda$ la rotation autour de cet axe, on aura d'après les formules connues:

$$\delta x' = (z' \cos B_1 - y' \cos A_1)\, d\lambda,$$
$$\delta y' = (x' \cos A_1 - z' \cos C_1)\, d\lambda,$$
$$\delta z' = (y' \cos C_1 - x' \cos B_1)\, d\lambda.$$

Remplaçant les premiers membres par leurs valeurs $\delta x - \delta x_1$ ....., et rémarquant que $\delta x_1 = 0$, $\delta y_1 = 0$, $\delta z_1 = 0$, on obtient:

$$\delta x = (z' \cos B_1 - y' \cos A_1)\, d\lambda : \delta y = \ldots\ldots, \qquad \delta z = \ldots\ldots$$

Substituant encore aux premièrs membres leurs valeurs données par les équations (1), rémarquant que les facteurs de $d\lambda$ se réduisent à

$$z \cos B_1 - y \cos A_1 - (z_1 \cos B_1 = y_1 \cos A_1)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

on obtiendra les trois équations dont il suffira d'ecrire la première, sous la forme suivante:

$$(z \cos B_1 - y \cos A_1)\, d\xi + dp' \cdot \cos\alpha = (z \cos B_1 - y \cos A)\, d\lambda - (z_1 \cos B_1 - y_1 \cos A_1)\, d\lambda.$$

Mais d'après les équations (A) on a identiquement:

$$dp' \cos\alpha + (z_1 \cos B_1 - y_1 \cos A_1)\, d\xi = 0,$$

et en substituant la valeur de $dp' \cos\alpha$, que donne la dernière, dans l'avant-dernière, on obtient:

$$(z \cos B_1 - y \cos A_1)(d\xi - d\lambda) - (z_1 \cos B_1 - y_1 \cos A_1)(d\xi - d\lambda) = 0,$$

et comme celle-ci subsiste pour des valeurs quelconques de x, y, z, on doit avoir l'égalité à zéro du facteur $d\xi - d\lambda$, ce qui donne $d\lambda = d\xi$, et c'est ce qu'il fallait démontrer. Il résulte donc de ce qui précède que les deux mouvements $d\xi$, dp' de chaque point mobile, se reduisent à une rotation unique $d\lambda$ égale à $d\xi$, et que le deplacement total de chaque point est un mouvement de rotation autour de l'axe en $(x_1\, y_1\, z_1)$, et un mouvement de transport dp parallèle à cet axe.

Rémarque I. Comme les trois axes IO, IR'', $(\alpha', \beta', \gamma')$ sont rectangulaires, il s'ensuit qu'on doit avoir:

$$\cos\alpha' = \cos B_1 \cos\gamma - \cos A_1 \cos\beta, \qquad \cos\beta' = \cos A_1 \cos\alpha - \cos C_1 \cos\gamma,$$

$$\cos\gamma' = \cos C_1 \cos\beta_1 - \cos B_2 \cos\alpha;$$

ce qui donne pour x_1, y_1, z_1 les valeurs d'une forme plus simple:

$$x_1 = \frac{W \cdot \cos\alpha'}{K}, \quad y_1 = \frac{W \cdot \cos\beta'}{K}, \quad z_1 = \frac{W \cdot \cos\gamma'}{K}.$$

La distance du centre I à l'axe de rotation, ou le rayon de l'élément circulaire décrit par I autour de cet axe, aura donc la valeur

$$\varrho = \frac{W}{K}, \quad \text{d'où } x_1 = \varrho \cdot \cos\alpha', \quad y_1 = \varrho \cos\beta', \quad z_1 = \varrho \cos\gamma'.$$

Cette nouvelle forme des valeurs de (x_1, y_1, z_1) prouve que ce dernier point se trouve sur la droite $(\alpha'\beta'\gamma')$, normale en (I) au plan détérminé par la direction de la résultante de transport et par l'axe central de rotation.

Si l'on substitue encore une fois à $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ leurs valeurs données plus haut, on obtient:

$$x_1 = \frac{W}{K} \times \frac{Y\cos A_1 - Z\cos B_1}{R \cdot \sin(R\hat{I}O)}, \qquad y_1 = \frac{W}{K} \cdot \frac{Z\cos C_1 - X\cos A_1}{R \cdot \sin(R\hat{I}O)},$$

$$z_1 = \frac{W}{K} \cdot \frac{X\cos B_1 - Y\cos C_1}{R \cdot \sin(R\hat{I}O)}; \qquad \text{ou } x_1 = \frac{Y\cos A_1 - Z\cos B_1}{R \cdot \mu}, \quad y_1 = \ldots, \; z_1 = \ldots$$

car $W : K = \dfrac{R\cos(R\hat{I}R'')}{K \cdot \mu} = \dfrac{R \cdot \sin R\hat{i}O}{K \cdot \mu}$. Les inconnues sont donc finalement éliminées, et l'on n'a plus qu'à substituer à $\cos C_1, \cos B_1, \cos A_1$ leurs valeurs connues; ce qui donne:

$$K.\mu.x_1 = \frac{L\cdot Y}{K\cdot C} - \frac{M\cdot Z}{K\cdot B}. \quad K\mu y_1 = \frac{N\cdot Z}{A\cdot K} - \frac{L\cdot X}{C\cdot K}. \quad K\mu z_1 = \frac{M\cdot X}{B\cdot K} - \frac{N\cdot Y}{A\cdot K}:$$

De plus l'élément circulaire décrit par $\boldsymbol{I}$, ou $\frac{W}{K}.d\lambda$ sera à l'élément dp du pas, dans le rapport de $W:\left(\frac{N\cdot X}{A\cdot K}+\frac{M\cdot Y}{B\cdot K}\right)$. En effet $dp' = \frac{W}{K}.d\lambda = \frac{W}{K}d\xi$ $= \frac{W}{K}.\frac{1}{2}k.dt^2 = \frac{1}{2}W.dt^2:dp = \frac{1}{2}dt^2\left(\frac{NX}{AK}+\frac{MY}{BK}+\frac{LZ}{CK}\right)$; ce qui donne le rapport demandé. Si les forces appliquées au solide sont disposées de façon à avoir leur résultante de transport située à angle droit avec l'axe d'ébranlement central, on a $dp = 0$; le pas commun des éléments héliciques sera nul; toutes les sections materielles, faites dans le solide normalement à l'axe central de rotation, ne quitteront pas leurs plans géométriques fixes, et le déplacement général ne sera qu'une rotation de tous les points autour d'un axe commmun: c'est là le cas du premier théorème de Mr. *Chasles.* Si les moments de forces NML autour des axes coordonnés du centre sont nuls, ou si elles ont un moment nul autour d'un axe central quelocnque, on aura: $x_1 = 0$, $\varrho_1 = 0$, $z_1 = 0$; c'est-à-dire que s'il y a rotation, résultante, elle ne sera possible qu'autour d'un axe central. Mais la formule $d\xi = \frac{1}{2}Kdt^2$ montre qu'elle est nulle, puisque $K = 0$, pour $N = 0$, $M = 0$, $L = 0$ à la fois. Ainsi il n'y a alorsque transport commun à tous les points. Mais hormis ces deux cas limites, le pas du mouvement hélicique ne sera ni zéro, ni infini. Quand on aura à la fois $AMX = BNY$, $CNZ = ALX$, on aura aussi $BLY = CMZ$, partant $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, et dans cette supposition l'axe de la rotation résultante, ou du mouvement spiral, coïncidera avec l'axe d'ébranlement central lui-même. Si l'on a $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, les moments N, M, L restant quelconques, on obtient encore $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = 0$, de sorte que l'axe de la rotation résultante coïncidera avec l'axe central, et il n'y aura pas mouvement de glissement; car $dp = 0$.

Rémarque II. On peut vérifier aussi qu'un point quelconque mobile (p) du solide doit décrire un chemin circulaire sur l'axe $(O'O'')$ normale à P au point $(x_1 y_1 z_1)$. Á cet effet on rémarquera que les variations de ses coordonnées (x', y', z') rapportées à l'origine (O') et dûes aux deux mouvements $d\xi$, dp', sont:

$$\delta x' = (z\cos B_1 - y\cos A_1)\,d\xi - (z_1\cos B_1 - y_1\cos A_1)\,d\lambda$$
$$= (z\cos B_1 - y\cos A_1)\,d\xi - dp'\cos\alpha : \delta y' = \ldots., \ \delta z' = \ldots..$$

Soit r la distance de (p) à l'origine, et prenons $x = r\cos\lambda$, $y = r\cos\mu$, $z = r\cos\nu$, $\sqrt{(\delta x'^2+\delta y'^2+\delta z'^2)} = \delta s'$. De la résulte:

$\delta s'^2 = r^2.[\cos B_1 \cos\nu - \cos A_1 \cos\mu)^2 + ..]d\xi^2 + dp'^2 + 2r(\cos B_1 \cos\nu - \cos A_1 \cos\mu).\cos\alpha.dp'.d\xi + \text{etc.}$

Donc, en nommant φ l'angle compris entre r et iO, et λ', μ', ν' ceux compris entre les axes coordonnés et une normale In au plan (r, iO), on obtient par les formules connues, et à cause de $dp' = \frac{W}{K}.d\xi$:

$$\delta s'^2 = \left[r^2 \sin^2\varphi + \frac{W^2}{K^2} + 2r \sin\varphi . \frac{W}{R} . \cos(\hat{In, Iq}) \right] . d\xi^2 .$$

Mais en nommant (Fig. 6) It la trace du plan (r, IO) sur (P), et projetant p sur It en p', on aura, à cause de la position de (O') sur iq, et en prenant $IO' = \frac{W}{K}$:

$$\delta s'^2 = (Ip'^2 + IO'^2 - rIO'.Ip'.\cos O'\hat{I}R'').d\xi^2 = p'O'^2.d\xi^2,$$

ou

$$\delta s' = p'O.d\xi.$$

Reste à prouver que le chemin ds', résultant de dp' et $d\xi.r\sin\varphi'$, est dirigé dans un plan parallèle à (P'), et que dans ce plan il a une direction normale à la ligne $p'O'$. La première condition donne

$$\delta x'.\cos C_1 + \delta y'\cos B_1 + \delta z'.\cos A_1 = 0:$$

équation qui se vérifie aisément, si l'on reprend les valeurs de $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$. Quant à la seconde condition, elle donne:

$$\delta x'.x' + \delta y'.y' + \delta z'.z' = 0:$$

équation que l'on vérifie immédiatement encore, si l'on a soin de reprendre les valeurs des variations sous la forme

$$\delta x' = (z'\cos B_1 - y'\cos A_1)\,d\xi, \qquad \delta y' = \ldots\ldots, \qquad \delta z' = \ldots.$$

Rémarque III. Il est aisé de comprendre pourquoi dans la solution générale de la question précédente, on a considéré le mouvement de translation du centre d'inertie, et celui de rotation autour d'un axe central. C'est évidemment à cause que le centre d'inertie se meut d'après la loi connue et déjà énoncé plus haut. En vertu de cette loi on pouvait exprimer immédiatement les quantités dp, dp' en fonction de la résultante de transport des forces, ce qui n'aurait pas été possible pour tout autre point du solide. De plus, comme la rotation partielle et fictive autour de l'axe central reste la même, soit que le centre se trouve libre, soit qu'il se trouve fixe, on obtenait par là immédiatement, et par les formules mêmes du (§. 4), la direction de cet axe. Si au contraire on voulait conclure le mouvement résultant de deux mouvements partiels fictifs, correspondants à un points (O) et à un axe de rotation excentrique, la direction de cet axe resterait inconnue, parceque rien ne démontre que sa direction soit la même, que si le

point (*O*) était fixe. Ainsi, quand on dit que tout mouvement infinitésimal d'un corps libre est une rotation et une translation autour de son centre, on énonce une proposition vraie, mais qui ne l'est pas exclusivement; puisque ce ne sont après tout, que deux mouvements fictifs qu'on substitue au mouvement résultant, et que cette conception est au moins possible en idée, de diverses manières, autour de divers points et axes quelconques, excentriques. Le célèbre théorème de Mr. *Chasles* fait complètement disparaître le vague de tels énoncés, en définissant nettement le mouvement résultant de chaque point du mobile, et nos explications suffisent pour montrer pourquoi il faut accorder à la conception du mouvement de translation et de rotation autour d'un axe central la préference à toute autre conception analogue, relative à un axe excentrique; alors surtout qu'on veut résoudre les questions de ce genre et d'autres, d'une manière complète, sous le double rapport de la géométrie et de la mécanique. On peut d'ailleurs consulter l'ouvrage de *Poisson* (T. II. p. 184. §. 436.) sur cette même matière.

Rémarque IV. Voici maintenant encore une propriété rémarquable qui résulte de l'analyse présentée plus haut. Concevons l'axe ($O'O''$), normal en (O') au plan (P), comme axe fixe et comme essieu sur lequel le corps puisse à la fois glisser et tourner: le mouvement hélicique dp aura évidemment lieu de la même manière, que si l'axe était solidaire avec le solide et qu'il fût parfaitement libre. La rotation aura encore lieu de la même manière; car alors même que cet axe serait parfaitement libre, le solide s'ébranlerait spontanément autour de lui sous l'action des forces appliquées. Or je dis que cet axe, considéré dans l'un quelconque de ces deux états, est une véritable *axe spontané de rotation,* c'est-à-dire que dans le sens normal à sa direction il n'éprouve aucune *secousse,* aucune *pression* de la part de l'action simultanée des forces actives et des réactions d'inertie tangentielles qu'elles provoquent dans la matière ébranlée du solide. En effet, les forces de première espèce agissent d'abord sur le point central du solide, comme le ferait leur résultante de transport, appliquée à ce point. Mais on peut prouver facilement que la résultante de transport des réactions d'inertie, est ici strictement égale et contraire à la première résultante dont il s'agit; de sorte que si l'axe éprouve un excédant de pression en l'un de ses points, il faut qu'il éprouve un excédant de pression égal et contraire en un autre de ses points; car autrement la somme des projections des forces de rotation des deux espèces sur un axe quelconque ne serait pas nulle, contrairement à l'égalité des deux espèces de résultantes dout il s'agit. Je dis d'après cela que la pression soufferte par l'axe dans le sens normal, et en chacun de ses points, est nulle: car si elle ne l'était

pas, comme en un second point, il faudrait une force égale et contraire, l'axe ne serait pas celui de la rotation instantanée initiale, comme on le suppose. Reste donc à prouver l'égalité des deux espèces de résultantes de transport.

Soient λ', λ', λ''..... les distances des différentes molécules $d\mu$, $d\mu'$, $d\mu''$... du solide à l'axe $(O'O'')$. La réaction tangentielle d'inertie d'un élément quelconque $d\mu$ autour de $O'O''$ .... aura la valeur

$$\frac{2d\xi}{dt^2}.\lambda.d\mu;$$

et parallèlement à deux axes coordonnées $O'x'$, $O'y'$ situés dans (P), cette force aura les composantes: $-\frac{2d\xi}{dt^2}\times.\lambda d\mu.\frac{y'}{\lambda}=-\frac{2d\xi}{dt^2}.y'd\mu$, et $\frac{2d\xi}{dt^2}.\lambda d\mu.\frac{x'}{\lambda}$ $=+\frac{2d\xi}{dt^2}x'd\mu$. De là on conclut immédiatement, en faisant la somme des composantes parallèles à chaque axe, que la réaction, résultante de transport, est la même que si la masse entière fût condensée au centre d'inertie, et qu'elle à la valeur

$$\Re=\mu.\varrho.\frac{2d\xi}{dt^2}=\mu\varrho.K=\mu.W.$$

Mais par sa signification abréviative la quantité W a la valeur $R\cos(R\hat{I}R'')$: $\mu=(X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma):\mu$, et l'on en par conséquent: $\Re=X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma=R\cos(R\hat{I}R'')$. La réaction d'inertie totale, circulaire, est donc bien égale et contraire à la résultante de transport des forces actives qui produisent la rotation. Il est entendu de soi-même que l'on laisse de côté la composante $R\cos(R\hat{I}O)$, qui produit le mouvement de transport commun de tous les points, et qui fera glisser l'axe sur lui-même comme tout autre point, s'il n'est pas fixe dans le sens longitudinal. Il est sous-entendu aussi que si l'on ne partait pas du corps, et que si le solide avait dejà une vitesse acquise, les forces centrifuges, ou les réactions d'inertie centrales, exerceraient sur l'axe certaines pressions, et que l'on ne pourrait plus se dispenser de le rendre fixe dans le sens normal. Mais dans notre hypothèse il suffit de le fixer dans le sens longitudinal, si toutefois il est solidaire avec le corps solide; dans le cas contraire il peut rester parfaitement libre. Ainsi la question suivante se trouve resolue par ce qui précède. On donne un système de forces capables d'ébranler un solide autour d'un axe central perpendiculaire à la direction de leur résultante de transport, ce qui s'exprime analytiquement par la condition:

$$\text{(B.)}\qquad \frac{NX}{A}+\frac{MY}{B}+\frac{LZ}{C}=0,$$

et l'on demande de trouver un axe qui, étant invariablement lié au corps solide, et ensuite rendu fixe, n'éprouve aucune pression de la part des forces et des réactions tangentielles qu'elles engendrent autour de l'axe. En effet, on calculera la position de l'axe d'ébranlement, dans l'hypothèse que le centre d'inertie du solide soit d'abord fixe, par les équations $\cos C_1 = \frac{N}{A \cdot K}$, $\cos B_1 = \frac{M}{B \cdot K}$, etc.; en ce centre d'inertie on élevera dans le plan perpendiculaire qui comprend la direction de la résultante de transport R, une droite indéfinie ig sur cette direction, et sur Ig, ainsi tracé, on prendra, à partir de I, une longueur $IO' = \varrho = \frac{W}{K} = \frac{R}{K}$: l'axe $(O'O'')$ perpendiculaire en O' au plan dont il s'agit, est l'axe demandé. Si les forces sont quelconques, et qu'elles ne satisfont plus à la condition (C), la solution du problème est encore manifeste; seulement la distance IO' aura une valeur différente et plus générale, à savoir:

$$IO' = \varrho = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)} = \frac{I}{\mu K} \cdot \sqrt{\left[\left(\frac{LY}{C} - \frac{MZ}{B}\right)^2 + \left(\frac{NZ}{A} - \frac{LX}{C}\right)^2\right]} + \ldots\ldots$$

et il faudra fixer l'axe $(O'O'')$ du solide dans les sens longitudinal, ou laisser au corps la liberté de glisser le long de l'axe. Un cas particulier et même singulier de la question réciproque des centres de percussion se trouve encore resolu par l'analyse précédente. A cet effet énonçons d'abord cette question, prise d'une manière générale:

Un corps solide étant soumis à un système de forces données: on demande de trouver le point du solide qu'il faut fixer, pour que ces forces et les réactions d'inertie tangentielles qu'elles provoquent autour de l'axe en ce point, produisent sur ce point une pression ou percussion nulle.

Il est facile de reconnaître d'abord que l'axe de rotation instantané en un point fixe quelconque (O) d'un solide n'est généralement pas parallèle à l'axe d'ébranlement central, le système de forces restant le même; mais quand le point (O) coïncide avec le point (O'), construit ci-dessus, il suffira évidemment qu'il soit fixe dans le sens parallèle a l'axe d'ébranlement central, afin de détruire l'effet de glissement des forces sur le corps. Ainsi pour le cas où la résultante de transport des forces croise à angle droit l'axe d'ébranlement central, ce qui arrive quand ces forces remplissent la condition (C), la question proposée est susceptible d'une solution, et le point (O') sera le point demandé. Mais jamais le point ne saurait remplir la condition prescrite, si les forces ne satisfont pas à l'équation de condition (C). Si donc la question générale est susceptible d'une infinité de solutions, le point (O') n'en donnera pas toujours une, et c'est en ce sens qu'il

est *un point exceptionnel.* D'ailleurs les rémarques du (§.5) fournissent tous les renseignements nécessaires pour la solution de cette question générale: la fin de la *rémarque* (*VI.* §.6) et de la *rémarque* (§.7) nous autorise à conclure, que si toutes les forces sont dans des plans parallèles, on n'a qu'à tirer une ligne centrale IO, perpendiculaire aux plans; ou que si elles agissent d'une manière quelconque, on menera par le centre d'inertie du solide un plan normal à leur résultante de transport, et que par ce centre et dans ce plan on tirera une droite d'ailleurs quelconque IO, et qu'un point quelconque (O) de cette droite, ou même de ce plan, pourra satisfaire à la condition prescrite. En effet, en menant par (O) un plan Q, normal à la ligne OI, il suffira de trouver en (O) dans (Q) deux axes rectangles (Oy', Oz') par rapport auxquels les moments d'inertie du solide soient entr'eux dans le rapport des distances des centres de deux systèmes de forces parallèles, $(Y, Y', Y'' \ldots\ldots).(Z, Z', Z'', Z'''\ldots\ldots)$ au plan Q. Or cette question doit être possible, puisque elle l'est pour le cas même où ce rapport est donné, et égal à l'unité. Ainsi il paraît bien prouvé, que tout point (O) du plan central, perpendiculaire à la résultante de transport des forces données, satisfait à l'énoncé de la question, et que s'il est rendu fixe, et solidaire avec le corps, il n'éprouvera aucune pression, ni percussion, de la part des forces et des réactions d'inertie tangentielles, lors de l'ébranlement du solide. Mais rien ne prouve que les forces agissent de la même manière sur le point (O), considéré comme fixe et comme parfaitement libre; et l'axe $(O'O'')$ sera seul le *véritable axe spontané de rotation* du solide. Quant au cas particulier de la question réciproque de la théorie ordinaire du centre de percussion, où l'on suppose que le solide soit mis en mouvement de rotation autour d'un axe permanent au point fixe, il exige une examen à part et une analyse particulière que nous remettons à une autre occasion.

Rémarque V. Examinons ce qui arrive, quand les forces sollicitantes sont toutes situées dans un même plan d'inertie central; dans le plan (yIx) par exemple. Alors on a:

$$N = 0, \quad M = 0, \quad \cos C_1 = 0, \quad \cos B_1 = 0, \quad \cos A_1 = \frac{L}{CK} = 1,$$

car k devient égal à $\frac{L}{C}$; l'axe d'ébranlement central coïncidera avec l'axe permanent $IZ : Z = 0$, $K\mu x_1 = \frac{LY}{KC} = Y$, $K\mu y_1 = -X$, $\mu z_1 = 0$; ce qui prouve que le centre (O') est situé dans le même plan d'inertie central (yIx), à une distance de l'origine égale à $\frac{I}{K\cdot\mu}\sqrt{(X^2 + Y^2)} = \varrho$, et normale à la résultante des forces dans ce plan; et comme on a $\frac{W}{F} = r = \frac{\sqrt{(X^2 + Y^2)}}{\mu K}$, on retrouve

pour W la valeur $\frac{R}{\mu}$; comme cela doit être dans le cas particulier actuel. En outre, le pas des courbes spirales devient nul, et l'axe spontané de rotation $(O'O'')$ devient lui-même au point (O') un axe permanent de rotation du solide. Concevons que toutes les forces soient remplacées par leur résultante effective, et nommons Ir la perpendiculaire ou le bras de levier de R autour de l'axe IZ. Puisque le point (O') se trouve à une distance $IO' = \varrho$, sur une droite centrale, perpendiculaire à R, on aura: $RIr = L : IO' (= \varrho) = \frac{R}{K \cdot \mu} = \frac{R \cdot C}{R \cdot Ir \cdot \mu}$, partant $O'r = O'I + Ir = O'I + \frac{C}{\mu}$; ce qui est en effet la valeur fournie par la théorie ordinaire pour le cas particulier où l'on donnerait le point (O') dans le plan d'inertie central (yix), et où l'on demanderait l'extremité r de la perpendiculaire Ir de la force. On voit donc que notre analyse nous donne avant tout la solution d'un cas particulier, au moins de la théorie réciproque du centre de percussion; puisque l'on donne le mode d'application de la force, et que l'on demande la position du point (O') et de l'axe $(O', O''.....)$.

Rémarque VI. Puisque dans le cas général l'axe $(O'O''.....)$ est un axe spontané de rotation, et qu'il est dans le même cas que s'il était instantanément fixe, on doit avoir, en nommant μ_1 la somme des moments des forces autour de cet axe et $\int \lambda^2 d\mu$ le moment d'inertie qui y repond:

$$(1.) \qquad d\lambda \text{ ou } d\xi = \tfrac{1}{2} . dt^2 . \left(\frac{\mu_1}{\int \lambda^2 d\mu} \right) .$$

Concevons par (O') trois axes coordonnés rectangles, parallèles aux axes primipaux Ix, Iy, Iz, et soient L', N', M' les moments des forces autour des ces axes $(o'z', o'x', o'y')$. Comme l'axe $(o'o'')$ est parallèle à l'axe central, nous aurons:

$$\mu_1 = N' . \frac{N}{AK} + M' . \frac{M}{BK} + L' . \frac{L}{CK} .$$

$$L' = L + y_1 X - x_1 Y_1 \quad N' = N + z_1 Y - y_1 X_1 \quad M' = M + x_1 Z - z_1 X.$$

Mais l'équation (1) donne en vertu de la valeur $\frac{1}{2} K dt^2$ de $d\xi$, $\mu = K \int \lambda^2 d\mu$; partant par substitution:

$$\frac{NN'}{AK} + \frac{MM'}{BK} + \frac{LL'}{CK} = K . \int \lambda^2 . d\mu;$$

et comme on a $\int \lambda^2 d\mu = A \cos^2 (IO'x) + B . \cos^2 (IO'y) + C . \cos^2 (IO'z) + \mu . \varrho^2$, on obtient, eu égard aux cosinus des angles $(\hat{IO'}x)(\hat{IO'}y)(\hat{IO'}z)$:

$$\frac{NN'}{AK} + \frac{MM'}{BK} + \frac{LL'}{CK} = \mu . \varrho^2 . XK + \frac{N^2}{AK} + \frac{M^2}{BK} + \frac{L^2}{CK};$$

et cette équation de condition doit être identique, pour reproduire la valeur de W, fournie par ce qui a été dit. En y portant les valeurs de N', M', L, on la ramene à celle-ci:

$$(2.) \qquad \frac{N(Y\cdot z_1 - Z\cdot y_1)}{A\cdot K} + \frac{M(Z\cdot x_1 - X\cdot z_1)}{B\cdot K} + \frac{L(Xy_1 - Y\cdot x_1)}{C\cdot K} = \mu.\varrho.W.$$

Mais en vertu des valeurs de x_1, y_1, z_1 on a:

$$y_1\cos A_1 - z_1\cos B_1 = \frac{dp'}{d\xi}\cos\alpha = \frac{W}{K}\cos\alpha = \varrho\cos\alpha.$$
$$z_1\cos C_1 - x_1\cos A_1 = \varrho\cos\beta, \ldots\ldots$$
$$x_1 = \varrho\cos\alpha', \qquad y_1 = \varrho\cos\beta', \qquad z_1 = \varrho.\cos\gamma'.$$

Substituant d'abord ces dernières valeurs de x_1, y_1, z_1 dans (2), on obtient:

$$\frac{N(Y\cos\gamma' - Z\cos\beta')}{AK} + \frac{M(Z\cos\alpha' - X\cos\gamma')}{BK} + \frac{L(X\cos\beta' - Y\cos\alpha')}{CK} = \mu W,$$

Mais si l'on rémarque que dans l'équation (2): $\frac{N}{AK} = \cos C_1 \ldots\ldots$, on en déduit

$$X(y_1\cos A_1 - z_1\cos B) + Y.(z_1\cos C_1 - x_1\cos A_1) + Z(x_1\cos B_1 - y_1\cos C_1) = \mu.\varrho.W.$$

et si l'on remplace les facteurs de X, Y, Z par leurs valeurs, on a:

$$X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z.\cos\gamma = \mu.W:$$

équation de condition qui est en effet identique, puisque l'on a par désignation: $\mu.W = R.\cos(RIR'') = X\cos\alpha +$ etc.

Rémarque VII. Les valeurs de $\mu K x_1$, $\mu K y_1$, $\mu K z_1$ peuvent être mises sous la forme

$$\mu K x_1 = Y.\cos A_1 - Z.\cos B_1, \qquad \mu K y_1 = \ldots\ldots, \qquad \mu K z = \ldots\ldots,$$

ce qui donnera:

$$\mu K(N x_1 + M y_1 + L z_1) = Y(N\cos A_1 - L\cos C_1) + Z(\ldots\ldots) + X(\ldots\ldots),$$

et comme en vertu des valeurs de A_1, C_1, B_1 en N, M, L, K, on a $N\cos A_1 - L\cos C_1 = 0$, ..., il viendra:

$$N x_1 + M y_1 + L z_1 = 0;$$

et comme l'équation du plan principal des forces est aussi de la forme $Nx + My + Lz = 0$, pour des coordonnées courantes (x, y, z), il s'ensuit que le point de rencontre de l'axe des mouvements héliciques avec le plan de rotation central, qui répond à l'axe IO, est un des points du plan du moment principal des forces. En nommant $O'a$ une droite en (O'), parallèle à l'axe principal des forces, relatif au centre I, on obtient:

$$\cos(o'\alpha,\hat{}o'o'') = \left(\frac{N^2}{A} + \frac{M^2}{B} + \frac{L^2}{C}\right) : K\sqrt{(N^2 + M^2 + L^2)}.$$

Pour les solides de première classe cet angle devient nul; car $A=B=C$, et $K = \sqrt{(N^2 + M^2 + L^2)}:A$, et $\cos(\alpha' o'',o'') = 1$. Ainsi, quand un solide de première espèce est soumis à un système quelconque de forces, celles-ci produiront un mouvement hélicique autour d'un axe parallèle à leur axe principal relatif au centre.

Rémarque VIII. On demande à quelles conditions un système de forces doit satisfaire, et quels doivent être leurs points d'application, pour que le mouvement ait lieu autour d'un axe donné de *position* et de *direction*. D'abord, comme le point (o') doit se trouver sur une droite perpendiculaire à la projection de la résultante sur le plan de rotation, il faudra maintenant soumettre les directions des forces à la condition que leur résultante soit dans un plan normal au plan de rotation, et coupant celui-ci suivant une droite IR'', perpendiculaire à la droite IO' qui est donnée de position. En prenant donc $IO'^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \varrho^2$, on aura pour les cosinus des angles de cette droite avec les axes coordonnés, les valeurs $x_1:\varrho$, $y_1:\varrho$, $z_1:\varrho$; et si (α,β,γ) expriment les angles de IR'' avec ces axes, on obtient:

$$\varrho\cos\alpha = y_1\cos A_1 - z_1\cos B_1,\quad \varrho\cos\beta = z_1\cos C_1 - x_1\cos A_1,\quad \varrho\cos\gamma = x_1\cos B_1 - y_1\cos C_1.$$

Les quantites $(x_1,y_1,z_1,A_1,B_1,C_1)$ doivent être considérées ici comme des données immediates de la question; et l'on a par la solution directe:

$$N = A.K\cos.C_1\ ,\qquad M = B.K.\cos B_1\ ,\qquad L = C.K.\cos A_1:$$
$$LY - MZ = \mu.K^2.x_1\ ;\quad NZ - LX = \mu K^2.y_1\ ;\quad MX - NY = \mu K^2.z_1.$$

Substituant dans les trois dernières les valeurs de N, M, L fournies par les trois autres égalités, on obtient:

$$C.\cos A_1.Y - B\cos B_1.Z = \mu K x_1,\quad A\cos C_1.Z - C\cos A_1.X = \ldots\ldots,\ \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

Remplaçant K par sa valeur $N:A\cos C_1$ dans la première de celle-ci, par sa valeur $M:B\cos B_1$ dans la seconde, et par $L:C\cos A_1$ dans la troisième, et resolvant les équations qui en résultent par rapport à N, M, L, on obtiendra:

$$N = \frac{A\cos C_1}{\mu x_1}(C.Y\cos A_1 - BZ\cos B_1)\ ;\quad M = \frac{B\cos B_1}{\mu y_1}(AZ\cos C_1 - C.X\cos A_1)\ ;$$
$$L = \frac{C\cos A_1}{\mu z_1}(\ldots\ldots).$$

équations dont la dernière est même superflûe, à cause de la condition $Lz_1 + Nx_1 + My_1 = 0$, et dont les deux prémières suffisent pour déterminer

les coordonnées (x,y,z) du point d'application de la force unique qui serait capable de produire l'effet demandé, puisque l'une quelconque de ces trois quantités doit elle-même rester arbitraire. Si l'on veut produire cet effet par plusieures forces à la fois, le problème est susceptible de diverses solutions.

Rémarque XI. Il est bien facile aussi d'obtenir d'après ce qui précède, les changements instantanés de coordonnés d'un point quelconque du solide, alors que celui-ci se déplace pendant l'instant initial dt d'une quantité infiniment petite, qui est du second ou du premier ordre, selon que les forces sollicitantes sont de pression ou de percussion. Mais à notre point de vue, ces changements sont de véritables différentielles, et non pas des variations, parceque nous considérons un système défini des forces, et que celles-ci produiront un déplacement correspondant qui, loin d'être arbitraire, résulte d'une manière définie, de l'intensité de la direction et du mode d'application de ces forces. En désignant donc par dx, dy, dz les changements dans le sens des axes coordonnés fixes, nous avons à rechercher les valeurs de ces quantités en fonction du chemin de translation dp et de la rotation résultante $d\lambda = d\xi$. Or le chemin total, décrit par un point quelconque (xyz) du solide, est la diagonale ds d'un parallèlogramme élémentaire, dont un côté dp, parallèle à l'axe $(O'O'')$, fait avec les axes coordonnés les angles C_1,B_1,A_1 respectivement, tandis que l'autre côté est l'élément circulaire que ce point décrit sur l'axe $(O'O'')$ de rotation $d\lambda$. Mais la projection de cette diagonale sur un axe quelconque est égale à la somme des projections des chemins composants sur le même axe. Puisque donc par notation δx exprime la projection sur Ix de l'élément circulaire dont il s'agit, et que dx exprime la projection de la diagonale ou du chemin résultant, on doit avoir:

$$\begin{aligned} dx &= \delta x + dp.\cos C_1 \\ dy &= \delta y + dp.\cos B_1 \\ dz &= \delta z + dp.\cos A_1, \end{aligned}$$

ou bien, eu égard aux valeurs de δx, δy, δz obtenues plus haut:

$$dx = (z\cos B_1 - y\cos A_1)\,d\xi + dp\cos\alpha + dp\cos C_1, \quad dy = \ldots\ldots; \quad dz = \ldots\ldots.$$

Si donc on rémarque que d'après le même principe de projection, $dp'\cos\alpha + dp.\cos C_1$ exprime le chemin de translation total du centre I, projeté sur l'axe des abscisses, on obtient immédiatement:

$$dp'\cos\alpha + dp\cos C_1 = \tfrac{1}{2}dt^2.\frac{R\cos(R_1^{\wedge}IX)}{\mu} = \tfrac{1}{2}.\frac{X}{\mu}.dt^2,$$

partant:

$$\frac{2dx}{dt^2} = (z\cos B_1 - y\cos A_1)\,K + \frac{X}{\mu}, \qquad \frac{2dy}{dt^2} = \ldots\ldots, \qquad \frac{2dz}{dt^2} = \ldots\ldots$$

ou bien encore, par la substitution des valeurs de C_1, B_1, A_1:

$$\frac{2dx}{dt^2} = \frac{M}{B}\cdot z - \frac{L}{C}\cdot y + \frac{X}{\mu},$$
$$\frac{2dy}{dt^2} = \frac{L}{C}\cdot x - \frac{N}{A}\cdot z + \frac{Y}{\mu},$$
$$\frac{2dz}{dt^2} = \frac{N}{A}\cdot y - \frac{M}{B}\cdot x + \frac{Z}{\mu}.$$

Dans ces formules les premiers membres expriment, au facteur $\frac{1}{dt}$ près, les accroissements de vitesse, ou plutôt les vitesses infiniment petites que reçoit pendant l'instant initial le point quelconque (x,y,z) du corps, parallèlement aux troix axes coordonnés rectangles qui sont dirigés suivant les trois axes d'inertie du centre du solide. S'il y avoit déjà mouvement acquis, il faudrait évidemment remplacer ces premiers membres par $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, respectivement, et comme les axes dont il sagit, seraient déjà alors en mouvement, on n'aurait plus qu'à faire une transformation de coordonnées pour avoir les formules les plus générales du mouvement d'un solide parfaitement libre.

Il nous paraît utile de présenter le resumé de tout ce qui a été dit, dans la table de matières qui suit:

Bruxelles, Mai 1848.

TABLE DE MATIÈRES.

§. 1.

Nouvelle analyse de la théorie ordinaire du centre de percussion.

§. 2.

Mouvement de rotation naissant d'un point matériel. —. Composition des moments principaux de plusieurs forces.

§. 3.

Mouvement de rotation naissant d'un corps solide pourvu d'un point fixe. —. La rotation élémentaire est en raison directe du moment de la force, et inverse du moment d'inertie du solide, relatif à l'axe instantané de rotation.

Composition du moment résultant en fonction des moments partiels et des moments d'inertie du solide, relatifs aux axes instantanés de rotation.

§. 4.

Détermination de l'axe instantané de rotation, relatif à un point fixe donné, en fonction des moments des forces données, autour de trois axes rectangulaires, et des moments d'inertie du solide, relatifs à ces mêmes axes. —. Valeur de la rotation élémentaire sur l'axe instantané. (Voir les formules I, II, III, IV, V, etc.)

Les rémarques I, II, III, IV ..... VIII comprennent des résultats faciles à énoncer et à resumer.

Dans la *rémarque IX* on démontre que pour ébranler un solide autour d'un axe permanent du point fixe, par le moyen d'une force unique, on doit faire agir celle-ci dans le plan des deux autres axes permanents. —. (Ce théorème est déja connu. Voir *Poisson.* t. II. p. 187).

Dans la *rémarque XII* on recherche la condition requise pour que l'axe de rotation ait une direction parallèle à celle de la résultante de transport des forces. —. Impossible pour le cas d'une force unique.

Dans la *rémarque XIII* on établit la condition requise pour que cette résultante de transport croise l'axe à angle droit.

Dans la *rémarque XIV* on examine l'effet dynamique instantané *d'un couple de forces* sur un corps solide à point fixe; et l'on expose quelques notions critiques sur la méthode statique des couples.

§. 5.

Un corps solide, étant fixé par son centre d'inertie, la pression ou percussion en ce point est la résultante de transport des forces sollicitantes, et la pression dûe aux réactions d'inertie tangentielles y est toujours nulle.

§. 6.

Evaluer la pression totale pour le cas d'un point fixe quelconque. (Voir les formules *A* et *B* de ce No.). —. La réaction d'inertie totale et tangentielle n'est plus nulle; mais (rémarque I) elle le sera encore pour le cas particulier où l'axe d'ébranlement du solide passe par le centre d'inertie.

La direction (rémarque II) de la résultante de transport des réactions d'inertie tangentielles est parallèle à la ligne d'intersection d'un plan normal à l'axe de rotation avec le plan normal à la droite qui joint le point fixe donné au centre d'inertie du solide. —. Équation de condition d'une resultante d'inertie effective.

La pression totale (Rémarq. III, IV), soufferte par le point fixe (*o*) du solide, est nulle, si la force unique qui agit sur le corps, est dans un plan (*P*), perpendiculaire à la ligne centrale (*OI*), et que ce plan se trouve à une distance *OI'* de (*O*), déterminée par la formule et les conditions suivantes:

$$OI' = OI + \frac{k^2}{OI}.$$

Par le centre (*I*) on conçoit un plan perpendiculaire à *IO*; dans ce plan on détermine deux axes rectangulaires par rapport auxquels les moments d'inertie du solide soient égaux entr'eux; et l'on cherchera la valeur commune μk^2 de ces deux moments d'inertie. Dès lors, ces conditions étant remplies, non seulement il y aura sur le point fixe une pression ou percussion nulle: de plus la force agissante et l'axe instantané se croiseront à angle droit. Ce résultat général qui n'a aucune analogie avec la théorie ordinaire du centre de percussion, est vrai encore pour un nombre quelconque de forces, qui admettent une résultante effective, satisfaisant aux conditions énoncées.

L'analyse générale des (§. 5 et 6) qui nous a conduit à ces résultates, reproduit aussi (voir rémarq. V) la théorie ordinaire du centre de percussion.

Pour avoir une pression totale nulle sur le point fixe, dans le cas de forces quelconques, il faut encore que leur résultante de transport croise l'axe instantané à angle droit, et qu'elle soit aussi à angle droit avec la ligne centrale *OI*. Dans la fin de la rémarque citée on montre le moyen de resoudre le problemè d'après les conditions préscrites.

§. 7.

On démontre ce qu'on a admis plus haut comme possible, savoir, qu'au centre d'inertie d'un solide, ou en tout autre point, on peut toujours trouver dans un plan perpendiculaire à celui des axes à moments d'inertie *maximum et minimum*, *un couple d'axes*: c'est-à-dire deux axes rectangulaires par rapport auxquels les moments d'inertie du solide soient égaux entr'eux, s'il s'agit (rémarq. I) de trouver un axe qui forme couple avec une axe donné, au point fixe que l'on considère. La question peut être ou n'être pas susceptible de solution, selon les différents cas. —. En un point quelconque d'un solide (rémarq. II) on peut toujours trouver cinq axes au moins, par rapport auxquels les

moments d'inertie sont égaux entr'eux; quatres de ces axes sont dans une même plan perpendiculaire au cinquième. Rémarques particulières sur ce qui précède.

§. 8.

Dans ce paragraphe on démontre quelques formules admises dans le courant du texe. Il est vrai que ces formules sont déjà connues dans la transformation des coordonnées; mais elles y restent à l'état de lettre morte, et passent à peu près inapperçues; tandis qu'elles se produisent, et se reproduisent même, d'une façon rémarquable dans la théorie des moments et de la rotation des corps, où elles offrent un grand secours. Ce qu'il faut penser de la détermination (méthode d'*Euler*) de l'axe instantané de rotation par l'idée d'une force vive d'extrême grandeur. Observation sur ce qu'on nomme parfois la méthode de la *permutation tournante* et que nous nommons *l'échange progressif* des lettres, en mécanique et dans la transformation de l'analyse des coordonnées. Revendication de priorité en faveur de Mr. *Pagani.*

§. 9.

Mouvement naissant des corps solides libres —. Demonstration des deux théorèmes de Mr. *Chasles* par le principe de la composition des mouvements —. Notions mécaniques qui complètent ces théorèmes dans la supposition bien exacte que tout déplacement virtuel d'un système matériel est le résultat d'un système de forces —. Ce qu'il faut penser de ce théorème qui dit que tout mouvement infinitésimal d'un corps solide est une rotation autour d'un axe central, et une translation.

On démontre que l'axe des mouvements héliciques est le veritable axe spontané et effectif de rotation —. Que cet axe coupe le plan de rotation central en un point qui se trouve sur une droite perpendiculaire au plan formé par l'axe de rotation central et la direction de la résultante de trsnsport des forces données —. Que la rotation résultante est égale à la rotation fictive autour de l'axe central, autour duquel l'ébranlement suffirait si le centre d'inertie était fixe —. Que l'axe instantané et effectif de rotation est parallèle à l'axe central dont il s'agit — etc.

Rémarque: Nous n'ignorons pas que la question du (§. 4.), relative à la direction de l'axe instantané de rotation, se trouve touchée dans la mécanique de *Poisson* (t. II. p. 186 — 187); Mais cette solution ne nous a pas satisfait; elle nous a paru indirecte, fort compliquée, et restreinte au simple cas de la percussion. L'idée d'*Euler*, de déterminer cet axe d'après la condition que la force vive produite soit une extrême grandeur, ne parait pas évidente à priori, et aurait elle-même besoin d'être démontrée. Ce sont ces différents motifs qui nous ont décidé à chercher une solution directe et générale, fondée sur les notions élémentaires de la statique et de la dynamique.

11.

Beitrag zur Lehre von den geometrischen Verwandtschaften.

(Von dem Herrn Dr. phil. *Swellengrebel* zu Utrecht.)

Man hat sich in der letzten Zeit viel mit *Collineation, Reciprocität* und andern speciellen *geometrischen Verwandtschafts-Arten* der Figuren beschäftigt; weniger mit der allgemeinen Theorie dieser Verwandtschaften, so dass die von *Magnus* geäusserte Klage (Sammlung von Aufgaben Vol. II. pag. 417 Note), diese Lehre sei noch nicht genug bearbeitet, noch jetzt gegründet ist. Indem ich es hier wage, zu dieser Lehre einen kleinen Beitrag zu liefern, verhehle ich mir keinesweges die dem Gegenstande inwohnenden Schwierigkeiten; weshalb ich denn auch keine vollständige Theorie der geometrischen Verwandtschaften zu liefern gedenke, die den Umfang eines Journal-Aufsatzes weit überschreiten würde, sondern nur einige Momente fragmentarisch behandeln werde.

Die Verwandtschaft zwischen Figuren ist dreierlei Art. Ist nämlich eine primitive Curve durch ihren analytischen Ausdruck gegeben, d. h. durch die Eigenschaft, dass eine oder mehrere gewisse Functionen ihrer Coordinaten $= 0$ sein sollen, so kann man, um zu der ihr verwandten Curve zu gelangen, den Ausdruck der primitiven Curve auf dreierlei Art transformiren. Man kann entweder die $= 0$ gesetzte Function ungeändert lassen und nur die Coordinaten mit andern Coordinaten vertauschen, oder man kann, ohne die Coordinaten zu ändern, die Function durch eine andere Function ersetzen, oder man kann die Coordinaten und die Function beide ändern.

Ein Beispiel der *ersten* Verwandtschaftsart ist der Zusammenhang, welchen die zwischen den Coordinaten Statt findende Abhängigkeit $\begin{matrix} f(x,y,x',y') = 0 \\ F(x,y,x',y') = 0 \end{matrix}$ zwischen den Figuren $\varphi(x,y) = 0$ und $\varphi(x',y') = 0$ selbst darstellt. Eine Verwandtschaft der *zweiten* Art ist die, welche zwischen den drei Figuren $\psi(x,y)=0$,

$\chi(x,y)=0$, und $\varphi[\psi(x,y),\ \chi(x,y)] \equiv F(x,y)=0$ Statt findet, z. B. diejenige, wodurch eine aus zwei Zweigen bestehende Curve $\psi(x,y)\times\chi(x,y)=0$ mit ihren beiden Zweigen $\psi(x,y)=0$ und $\chi(x,y)=0$ zusammenhangt. Eine Verwandtschaft der *dritten* Art wäre der zwischen den primitiven Curven $\psi(x',y')=0$ und $\chi(x'',y'')=0$ und der analogen Curve $\varphi[\psi(x,y),\chi(x,y)]\equiv F(x,y)=0$ Statt findende Zusammenhang. Gewöhnlich rechnet man nur die *erste*, nicht die beiden andern Arten zur Verwandtschaft; weshalb wir uns auch hier auf die erste Art beschränken wollen.

Von dieser ersten Verwandtschaftsart ist der einfachste Fall der, wenn man nur zwei einander verwandte Figuren A und B betrachtet, oder wenn man mehr als zwei Figuren, z. B. die vier Figuren A, B, C, D betrachtet, dieselben je zwei verwandt sich vorstellt und die Verwandtschaft zwischen A und B, zwischen C und D, etc. berücksichtigt. Complicirterer Art sind die zwischen mehr als zwei Figuren bestehenden *gemeinschaftlichen* Verwandtschaften. Ein Beispiel hiervon giebt der durch die vier Gleichungen.

$$xx'x''=1 \qquad yy'y''=1 \qquad x+x'+x''=0 \qquad y+y'+y''=0$$

zwischen den drei Figuren $\varphi(x,y)=0$, $\varphi(x',y')=0$, $\varphi(x'',y'')=0$, ausgedrückte Zusammenhang. Beschränkt man sich auf die Verwandtschaft zwischen zwei Figuren, so ist noch zu unterscheiden zwischen dem complicirteren Fall, wo man sich die beiden Figuren im unbeschränkten Raume ausgedehnt vorstellt und daher $2\times 3=6$ Coordinaten zu betrachten hat, und dem einfacheren Fall, wo man jede der beiden Figuren in einer Ebene liegend annimmt und daher nur $2\times 2=4$ Coordinaten in Betracht kommen. Auf den letzten Fall wollen wir uns beschränken.

Es sind also zwei Coordinatensysteme, welche respective das System uv und das System $t'w'$ heissen sollen, vorhanden, und die hier zu betrachtende Verwandtschaft $\begin{matrix} f(u,v,t',w')=0 \\ F(u,v,t',w')=0 \end{matrix}$ giebt die Beziehung an, worin jedes ganz bestimmte Ding $\begin{matrix} u=\alpha \\ v=\beta \end{matrix}$ des einen Coordinatensystems zu dem correspondirenden Dinge oder den Dingen $\begin{matrix} t'=\gamma,\ \gamma',\ \gamma'' \ldots\ldots \\ w'=\delta,\ \delta',\ \delta'' \ldots\ldots \end{matrix}$ des andern Systems steht. Drücken die Dinge $\begin{matrix} u=\alpha \\ v=\beta \end{matrix}$ und $\begin{matrix} t'=\gamma \\ w'=\delta \end{matrix}$ jedes einen Punct aus, wie z. B. wenn uv und $t'w'$ zwei Systeme gewöhnlicher Parallel-Coordinaten bedeuten, so drückt die Verwandtschaft die Beziehung aus, welche zwischen jedem Puncte der primitiven Figur und dem

einen oder den mehreren correspondirenden Puncten der analogen Figur Statt findet. Es ist aber in der allgemeinen Theorie der Verwandtschaften kein Grund vorhanden, die Natur der beiden Coordinatensysteme uv und $t'w'$ auf diese Weise zu specialisiren. Das Ding $\begin{matrix} u = \alpha \\ v = \beta \end{matrix}$ wird demnach im Allgemeinen entweder ein Punct, oder eine Linie, oder ein System mehrerer Puncte oder Linien bedeuten. Nimmt man z. B. zu Coordinaten die veränderlichen Entfernungen

$$u \equiv \sqrt{((x+\varepsilon)^2 + y^2)} \quad \text{und} \quad v \equiv \sqrt{((x-\varepsilon)^2 + y^2)}$$

eines veränderlichen Puncts von zwei festen Puncten $\begin{matrix} x = -\varepsilon \\ y = 0 \end{matrix}$ und $\begin{matrix} x = +\varepsilon \\ y = 0 \end{matrix}$ an, so wird das Ding $\begin{matrix} u = \alpha \\ v = \beta \end{matrix}$ das System der zwei reellen und der zwei im Unendlichen liegenden imaginären Durchschnittspuncte der zwei Kreise $u = \alpha$ und $v = \beta$ bedeuten. Oder, nimmt man die von *Plücker* (Analytisch-geometrische Entwickelungen. Bd. II) eingeführten ***Liniencoordinaten*** an, so wird eine Gerade die Bedeutung des Dinges $\begin{matrix} u = \alpha \\ v = \beta \end{matrix}$ sein. Es ist also für Dasjenige, was durch die Bestimmung aller Coordinaten entsteht, ein für alle mögliche Coordinatensysteme passender Namen nöthig. Es soll dasselbe (dem Beispiele *Drückenmüller's* folgend („Uebertragungsprincipien S. 4)") *Element des Systems* heissen. Die Verwandtschaft $\begin{matrix} f(u, v, t', w') = 0 \\ F(u, v, t', w') = 0 \end{matrix}$ drückt demnach im Allgemeinen die Beziehung aus, welche zwischen jedem Elemente eines der Systeme uv oder $t'w'$ und dem einen oder den mehreren analogen Elementen des andern Systems Statt findet.

Man kann sich aber den Gegenstand auch noch auf andere Weise vorstellen, indem man nemlich die beiden Systeme als ein einziges System mit vier Coordinaten betrachtet. Das *Element* dieses neuen Systems, d. h. das durch die Bestimmung aller ihrer Coordinatenwerthe entstehende Ding $\begin{matrix} u = \alpha \\ v = \beta \\ t' = \gamma \\ w' = \delta \end{matrix}$ bedeutet alsdann das Zusammentreffen oder die Combination eines Elements $\begin{matrix} u = \alpha \\ v = \beta \end{matrix}$ des Systems uv mit einem Elemente $\begin{matrix} t' = \gamma \\ u' = \delta \end{matrix}$ des andern Systems. Die Verwandtschaft $\begin{matrix} f(u, v, t', w') = 0 \\ F(u, v, t, w) = 0 \end{matrix}$ zeigt dann die Aenderungen an, welche die vier Coordinaten oder Qualitäten dieses veränderlichen Elements erleiden; ungefähr so, wie die Gleichungen $\begin{matrix} f(x, y, z) = 0 \\ F(x, y, z) = 0 \end{matrix}$ die Aenderungen andeuten, welche die drei Coordinaten

eines elementaren Puncts des Systems xyz bei der Fortbewegung dieses Puncts auf der Linie doppelter Krümmung $\begin{matrix} f(x,y,z) = 0 \\ F(x,y,z) = 0 \end{matrix}$ erfahren.

Die allgemeine Form $\begin{matrix} f(u,v,t',w') = 0 \\ F(u,v,t',w') = 0 \end{matrix}$ einer gegebenen Verwandtschaft lässt sich, wenn man vier neue Coordinaten p, q, r', s' statt der vier früheren u, v, t', w' einführt und die Functionen $f(u, v, t', w')$ und $F(u, v, t', w')$ durch gewisse neue, aus den Gleichungen

$$f(u, v, t', w') = \psi(p, q, r', s') \qquad F(u, v, t', w') = F(p, q, r', s'$$

zu entwickelnde Functionen ψ und F der vier neuen Coordinaten ausdrückt, auf zweierlei Art vereinfachen; je nachdem die Formänderung die *Functionen f* und *F* durch die einfacheren Functionen ψ und *F*, oder aber den complicirten, zwischen den älteren Coordinatensystemen uv und $t'w'$ Statt gefundenen *Zusammenhang* durch den einfacheren Zusammenhang zwischen den Systemen pq und $r's'$ ersetzt.

Eine Vereinfachung in Bezug auf die *Form* der Functionen *f* und *F* erhält man, wenn man die neuen Coordinaten p, q, r', s' so annimmt, dass die Verwandtschaft die Form $\begin{matrix} \psi(p,r') = 0 \\ F(q,s') = 0 \end{matrix}$ d. h. $\begin{matrix} p' = \chi(p) \\ s' = \varphi(q) \end{matrix}$ bekommt. Eine noch mehrere Vereinfachung ergiebt sich, wenn die Functionen ψ und *F* sich auf die blosse Differenz $\begin{matrix} p - r' = 0 \\ q - s' = 0 \end{matrix}$, d. h. wenn die Functionen χ und φ sich auf die Identität $\begin{matrix} r' = p \\ s' = q \end{matrix}$ reduciren. Zu einer Vereinfachung dagegen des *Zusammenhanges* zwischen den Coordinatensystemen uv und $t'w'$ gelangt man, wenn die Coordinatensysteme pq und $r's'$ Elemente von der nämlichen Art haben, während die Elemente der früheren Systeme uv und $t'w'$ ihrer Art nach nicht mit einander übereinstimmen; wie z. B. wenn die Elemente $\begin{matrix} p = \alpha \\ q = \beta \end{matrix}$ und $\begin{matrix} r' = \alpha \\ s' = \beta \end{matrix}$ jedes einen Punct oder jedes eine Gerade, oder jedes ein System zweier Puncte ausdrücken, während das Element $\begin{matrix} u = \alpha \\ v = \beta \end{matrix}$ einen Punct, das Element $\begin{matrix} t' = \alpha \\ w' = \beta \end{matrix}$ dagegen eine Gerade oder zwei Puncte ausdrückt, d. h., um *Drückenmüller's* Terminologie zu folgen, (S. 9), wenn die Systeme uv und $t'w'$ unter einander *digenetisch*, die Systeme pq und $r's'$ dagegen unter einander *homogenetisch* sind.

Ein Beispiel solcher vereinfachten Verwandtschaftsform liefern die Gleichungen $\begin{matrix} r' = a \times p \\ s' = b \times q \end{matrix}$, wo r' und s' die durch $\frac{x}{r^2+y^2}$ und $\frac{y}{x^2+y^2}$ ausgedrückten

Coordinaten des Punets p'', (Fig. 1) p und q dagegen die Entfernungen Ap und Bp des Puncts p von zwei festen Puncten A und B (Fig. 2) bedeuten mögen, wo also die Elemente $\begin{matrix} r' = \alpha \\ s' = \beta \end{matrix}$ und $\begin{matrix} p = \alpha \\ q = \beta \end{matrix}$ zwar jedes die Durchschnittspuncte p'' und 0, p und m zweier Kreise k'' und l'', k und l bedeuten, wo aber das veränderliche Element im Systeme $r's'$ auf zwei feste *Gerade* XX' und YY', im Systeme pq dagegen auf zwei feste *Puncte* A und B bezogen wird.

Ein innigerer Zusammenhang zwischen den neuen Coordinatensystemen pq und $r's'$ entsteht, wenn man sie so annimmt, dass sie nicht nur Elemente ähnlicher Art haben, sondern selbst ähnlicher Art sind, d. h. wenn die festen Puncte oder Linien, auf welche das veränderliche Element bezogen wird, bei beiden Systemen ihrer Art nach übereinstimmen; z. B. wenn die Coordinaten p und q die Entfernungen des veränderlichen Puncts p von zwei festen Puncten A und B, r' und s' dagegen die Entfernungen des correspondirenden Puncts p' von zwei andern festen Puncten C und D bedeuten.

Noch grösser wird die Vereinfachung der gegebenen Verwandtschaftsform, wenn die festen Puncte oder Linien, auf welche das veränderliche Element bei den neuen Systemen pq und $r's'$ bezogen wird, für beide Systeme identisch sind. Es können aber alsdann dennoch die Coordinaten p, q von den Coordinaten $r's'$, obgleich in Qualität übereinstimmend, ihrer Quantität nach verschieden sein; wie z. B. wenn die Coordinaten-Axen XX' und YY' beiden Systemen gemeinschaftlich wären, die Coordinaten p und q aber die in *Metern* ausgedrückten Entfernungen des veränderlichen Puncts von diesen Axen, die Coordinaten r' und s' dagegen dessen in *Decimetern* ausgedrückten Entfernungen von den nemlichen Axen bedeuteten, so dass durch die Elemente $\begin{matrix} p = \alpha \\ q = \beta \end{matrix}$ und $\begin{matrix} r' = \alpha \\ s' = \beta \end{matrix}$ zwei verschiedene Puncte h und h' (Fig. 3) angedeutet würden.

Macht man endlich die Coordinaten p, q und $r's'$ nicht nur in Qualität, sondern auch in Quantität übereinstimmend, so dass die Elemente $\begin{matrix} p = \alpha \\ q = \beta \end{matrix}$ und $\begin{matrix} r' = \alpha \\ s' = \beta \end{matrix}$ den nämlichen Punct oder die nämliche Linie, oder das nämliche System von Puncten oder Linien bedeuten, nur dass es, als Element $\begin{matrix} p = \alpha \\ q = \beta \end{matrix}$ betrachtet, zur primitiven, als Element $\begin{matrix} r' = \alpha \\ s' = \beta \end{matrix}$ betrachtet, zur analogen Curve gehört, so kann man die jetzt identischen Coordinaten p, q und r', s' mit dem gemeinschaftlichen Namen pq benennen. Wir wollen jedoch zur Unterscheidung die Coor-

dinaten, wenn sie auf die zweite Figur bezogen werden, *accentuiren.* Zwei solche Coordinatensysteme $p\,q$ und $p'q'$, denen gemeinschaftliche Elemente zukommen, sollen *homoelementische* heissen.

Je nachdem nun bei der Vereinfachung der gegebenen Verwandtschaftsform $\begin{matrix} f(u,\ v,\ t',\ w') = 0 \\ F(u',\ v',\ t',\ w') = 0 \end{matrix}$ entweder die Functionen f und F, oder der zwischen den alten Coordinaten $u\,v$ und $t'w'$ obwaltende Zusammenhang, oder endlich Coordinatenzusammenhang und Functionen, beide, oder keines von beiden, vereinfacht worden sind, bekommt die neue Form der gegebenen Verwandtschaft eine der folgenden vier Hauptformen:

1.	2.	3.	4.
$p' = p$	$\psi(p, q, p', q') = 0$	$r' = p$	$\psi(p'\,q, r', s') = 0$
$q' = q$	$F(p, q, p', q') = 0$	$s' = q$	$F(p, q, r', s') = 0$

Die *Form No.* **1** giebt eine blosse Coordinatenvertauschung bei zwei homoelementischen Coordinatensystemen. Die primitive Figur erleidet also bei No. 1 keine Aenderung, weder der Form, noch der Grösse, noch der Lage nach, so dass eine Verwandtschaft, welche die Form No. 1 hat, sich auf die Identität beider Figuren reducirt. Es kann daher die Form No. 1 niemals entstehen, wenn nicht schon unter der gegebenen Form $\begin{matrix} f(u, v, t', w') = 0 \\ F(u, v, t', w') = 0 \end{matrix}$ eine Identität beider Figuren durch die Verwandtschaft ausgedrückt wird, d. h. wenn nicht die Functionen f und F gerade den zwischen den Coordinatensystemen $u\,v$ und $t'w'$ ohne Bezug auf die Verwandtschaft Statt findenden Zusammenhang andeuten. Eine Verwandtschaft z. B. welche durch eine Coordinatentransformation $\begin{matrix} f(x, y, \sigma', \tau') = 0 \\ F(x, y, \sigma', \tau') = 0 \end{matrix}$ zwischen den nicht homoelementischen Systemen $x\,y$ und $\sigma'\tau'$ gegeben wäre, (wo σ' und τ' respective die Entfernungen von den zwei festen Puncten $\begin{matrix} x = -\varepsilon \\ y = 0 \end{matrix}$ und $\begin{matrix} x = -\varepsilon \\ y = 0 \end{matrix}$ bedeuten mögen) wird nur in dem speciellen Falle, wo die Functionen f und F respective die Functionen $\sigma' = \sqrt{((x+\varepsilon)^2+y^2)}$ und $\tau' = \sqrt{((x-\varepsilon)^2+y^2)}$ sind, unter der Form No. 1 $\begin{matrix} \sigma' = \sigma \\ \tau' = \tau \end{matrix}$ dargestellt werden können.

Bei der *Form No.* **2** gibt es wieder zwei homoelementische Coordinatsysteme, aber keine blosse Vertauschung der Coordinaten, sondern eine Coordinaten-Transformation. Der interessanteste Fall von No. 2 ist die Form $\begin{matrix} \psi(x,y,x',y') = 0 \\ F(x,y,x',y') = 0 \end{matrix}$ d. h. wenn die Systeme $p\,q$ und $p'q'$ zwei in Bezug auf Coordinaten-Axen und die

Längen-Einheit identische Systeme von *Parallelcoordinaten* bedeuten. Zur Unterscheidung wollen wir diejenige Verwandtschaftsform, bei welcher die Systeme pq und $p'q'$ zwar Parallelcoordinaten bedeuten, aber verschiedene Längen-Einheiten oder eine verschiedene Lage der Coordinaten-Axen haben, durch andere Buchstaben $\begin{matrix}\psi(x,y,\xi',\eta')=0\\ F(x,y,\xi',\eta')=0\end{matrix}$ bezeichnen, weil man sich, wenn man mit *Magnus* (Sammlung von Aufgaben Bd. I. S. 43) und *Grunert* (Elemente der analytischen Geometrie Bd. I. S. 152) die Aufeinanderlegung der Coordinaten-Axen mit keiner Buchstaben-Aenderung verbindet, leicht in der mannigfachen Bedeutung der Buchstaben x und y nicht mehr zurechtfindet.

Die *Form No.* 3 giebt eine Coordinatenvertauschung bei zwei nicht homoelementischen Coordinatensystemen. Der einfachste Fall von No. 3 ist $\begin{matrix}\xi'=x\\ \eta'=y\end{matrix}$; welche Gleichungen, je nachdem die Systeme $\xi'\eta'$ und xy nach Längen-Einheit, oder nach Coordinaten-Axenlage, oder in Bezug auf beide, verschieden sind und entweder eine blosse Vergrösserung, oder eine blosse Ortsveränderung, oder eine mit Bewegung gepaarte Vergrösserung anzeigen. Im letzten Fall drücken die Gleichungen $\begin{matrix}z'=x\\ \eta'=y\end{matrix}$ aus, dass die Entfernungen jedes Puncts p der prmitiven Figur von den Axen XX' und YY' (Fig. 4) gerade so viele *Meter* betragen, als z. B. die Anzahl der in den Entfernungen des correspondirenden Puncts p' (Fig. 5) von den Axen $\Xi\Xi'$ und $\Upsilon\Upsilon'$ enthaltenen Decimeter. Eine gleiche Aenderung der primitiven Figur pqr, der Grösse und Lage nach, ohne Aenderung der Form, giebt der Fall No. 3, wenn die Coordinaten pq und $r's'$ respective die Entfernungen des Puncts p von den festen Puncten A und B (Fig. 6) und die Entfernungen des correspondirenden Puncts p' (Fig. 7) von den festen Puncten C und D bedeuten.

Diese Form No. 3 betrachtet *Plücker* (System der analytischen Geometrie S. 48 und 54) als den allgemeinen Ausdruck der geometrischen Verwandtschaften; weshalb er die verschiedenen Verwandtschaften zwischen Figuren als eine Uebertragung der verschiedenen, unter den Symbolen pq und $r's'$ zu verstehenden Coordinatenbedeutung betrachtet. Andererseits könnte man aber auch, wenn man die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften ganz elementar vortragen wollte, ohne die Kenntniss anderer Coordinatsysteme als das der gewöhnlichen Parallelcoordinaten vorauszusetzen, mit *Grunert* (Bd. I. pag. 134) die Form $\begin{matrix}\psi(x,y,\xi',\eta')=0\\ F(x,y,\xi',\eta')=0\end{matrix}$, oder sogar die Form No. 2 $\begin{matrix}\psi(x,y,x',y')=0\\ F(x,y,x',y')=0\end{matrix}$ als den

allgemeinen Ausdruck einer geometrischen Verwandtschaft betrachten. Man kann sich also nöthigenfalls mit der Untersuchung der Form No. 3, oder der Form No. 2 begnügen. Besser jedoch wäre es vielleicht, nicht blos die speciellen Formen 2 und 3, sondern auch die allgemeine Form 4 zu betrachten, da man, wollte man jede Verwandtschaft unter der Form 2 oder 3 discutiren, in unnöthige Weitläufigkeiten gerathen würde. Es kann nämlich jede in der Form 4 gegebene Verwandtschaft leicht auf die Form 2, oder auf die Form 3 reducirt werden. Um z B. eine unter der Form 4 gegebene Verwandtschaft $\begin{matrix} f(u, v, t', w') = 0 \\ F(u, v, t', w') = 0 \end{matrix}$ auf die Form 3 zu bringen, braucht man nur t' und w' oder u und v aus den gegebenen Gleichungen zu entwickeln und in den gefundenen Gleichungen $\begin{matrix} t' = \varphi(u,v) \\ w' = \chi(u,v) \end{matrix}$ die Coordinaten t' und w' als die neuen Coordinaten r' und s', und die Functionen $\varphi(u,v)$ und $\chi(u,v)$ als die Coordinaten des andern neuen Coordinatensystems pq zu betrachten. Und wollte man sie auf die Form 2 bringen, so brauchte man nur zu untersuchen, welcher Zusammenhang zwischen den festen Puncten oder Linien, auf welche die Coordinaten u und v bezogen werden, und denjenigen des Coordinatensystems $t'w'$ Statt findet, und hieraus den Zusammenhang zwischen den Coordinatensystemen uv und tw, nemlich $\begin{matrix} u = \varphi'(t', w') \\ v = \chi'(t, w) \end{matrix}$ oder $\begin{matrix} t' = \varphi''(u', v') \\ w' = \chi''(u', v') \end{matrix}$ abzuleiten und durch Substitution desselben in die gegebenen Gleichungen $\begin{matrix} f(u, v, t', w') = 0 \\ F(u, v, t', w') = 0 \end{matrix}$ sie auf die Form

$$\begin{matrix} f[u, v, \varphi''(u', v'), \chi''(u', v') = 0 \\ F[u, v, \varphi''(u', v'), \chi''(u', v') = 0 \end{matrix}$$ d. h. auf die Form No. 2 $$\begin{matrix} \psi(u, v, u', v') = 0 \\ F(u, v, u', v') = 0 \end{matrix}$$

zu bringen. Hätte man z. B. die in der Form 4 gegebene Verwandtschaft $\begin{matrix} t' - au = 0 \\ w' - bv = 0 \end{matrix}$, wo u und v respective die Entfernungen pA und pB jedes Punts p (Fig. 8) der primitiven Figur, von den beiden festen Puncten A und B, t', w' dagegen die Entfernungen $p'C$ und $p'D$ des analogen Puncts p' bedeuten, so suche man aus der gegenseitigen Lage der vier Puncte A, B, C, D auf den Zusammenhang zu schliessen, in welchem die Coordinaten u und v, d. h. die pA und pB jedes Punts der primitiven Figur, zu den Coordinaten t und w d. h. pC und pD des nämlichen Punts stehen, oder auf denjenigen der Coordinaten u', v', t', w', d. h. $p'A, p'B, p'C, p'D$, des analogen Puncts p'.

Obgleich also jede gegebene Verwandtschaft $\begin{matrix} f(u, v, t', w') = 0 \\ F(u, v, t', w') = 0 \end{matrix}$ sowohl auf die Form 2, als auf die Form 3 reducirt werden kann, werden doch die meisten

Verwandtschaften, bei geeigneter Auswahl der Coordinaten p, q, r', s', in der Form No. 4 $\begin{matrix}\psi(p,q,r',s') = 0\\ F(p,q,r',s') = 0\end{matrix}$ auf einfachere Weise als in der Form 2 oder 3 dargestellt werden können. Es würde z. B. nicht wohl gethan sein, wenn Jemand' der mit der Natur des Coordinatensystems No. 2 vertraut wäre, die einfache Form No. 4

$$C' = \sin(R)$$
$$r' = \cos(R)$$

gegen die complexere Form No. 2

$$\sqrt{((x'-\varepsilon)^2+y'^2)} = \sin.[\sqrt{((x+a-\varepsilon)^2+(y+b)^2)}]$$
$$\sqrt{((x'+\varepsilon)^2+y'^2)} = \cos.[\sqrt{((x+a+\varepsilon)^2+(y+b)^2)}]$$

vertauschen wollte, oder wenn er die gegebene Verwandtschaft in der Form No. 3 $\begin{matrix}r' = p\\ s' = q\end{matrix}$ betrachten wollte, weil alsdann vorher die Natur des neuen Coordinatensystems pq zu untersuchen wäre, dessen Coordinaten nicht die Entfernungen jedes veränderlichen Puncts von den festen Puncten A und B, sondern respective der Sinus und der Cosinus dieser Entfernungen sind.

Eine andere Art, die Untersuchung der Form No. 4 zu vermeiden und auf die Form 2 und 3 sich zu beschränken, wäre die: jede Transformation von der Art No. 4 als eine doppelte Transformation zu betrachten, d. h. als die Verbindung einer gewissen Transformation von der Art 2 mit einer Transformation von der Art 3. Transformirt man nämlich eine primitive Figur $f(u, v) = 0$ durch eine Transformation von der Art No. 3 z. B. $\begin{matrix}u = t''\\ v = w''\end{matrix}$ in eine intermediäre Figur $f(t''w'') = 0$ und nachher diese intermediäre Figur durch die Transformation von der Art No. 2 $\begin{matrix}t'' = \varphi(t',w')\\ w'' = \chi(t',w')\end{matrix}$ oder $\begin{matrix}\psi(t'',w'',t',w') = 0\\ F(t'',w'',t',w') = 0\end{matrix}$ in eine dritte Figur $f(t', w) = 0$, so erhält man das Nämliche, als wenn man die primitive Figur $f(u, v) = 0$ unmittelbar durch die doppelte Transformation $\begin{matrix}u = t'' = \varphi(t',w')\\ v = w'' = \chi(t',w')\end{matrix}$ in eine die ihr durch die Verwandtschaft der Art No. 4 $\begin{matrix}\psi(u,v,t',w') = 0\\ F(u,v,t',w') = 0\end{matrix}$ verwandte Figur transformirt hätte. Umgekehrt kann man daher auch jede Transformation von der Art No. 4 $\begin{matrix}u = \varphi(t',w')\\ v = \chi(t',w')\end{matrix}$ in die sie zusammensetzenden Transformationen No. 2 und 3 theilen. Es können aber zwei Transformationen D und E, deren erstere die Figur A in die Figur C und die Figur B in F transformirt, während die ε die Figur A in B und C in G transformirt, entweder zu der doppelten

Transformation DE verbunden werden, welche A in G transformirt, oder zu der, die A in F verwandelnden Transformation ED, oder auch zu der Transformation $D+E$; wobei die primitive A durch die Transformationen D und E gleichzeitig afficirt wird. Es kann daher jede Transformation von der Art No. 4 $\begin{matrix} u = \varphi(t', w') = 0 \\ v = \chi(t', w') = 0 \end{matrix}$ entweder als die Transformation von der Art No. 3 $\begin{matrix} u'' = t' \\ v'' = w' \end{matrix}$ betrachtet werden, welcher eine Transformation von der No. 2 $\begin{matrix} u = \varphi(u, v) \equiv w'' \\ v = \chi(u, v) \equiv v'' \end{matrix}$ vorausging, oder als die von der Transformation No. 2 $\begin{matrix} t'' = \varphi(t', w') \\ w'' = \chi(t', w') \end{matrix}$ gefolgte Transformation No. 3 $\begin{matrix} u = t'' \\ v = w'' \end{matrix}$. Hätte man z. B. die unter der Form No. 4 durch die Gleichungen $\begin{matrix} \xi' = \alpha x \\ \eta' = \alpha y \end{matrix}$ gegebene Verwandtschaft, d. h. eine Aehnlichkeit, ohne ähnliche *Lage*, so könnte man diese Transformation der primitiven Figur $f(x,y)=0$ in die analoge Figur $f(\xi', \eta') = 0$ entweder als eine vom Puncte $\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$ als Vergrösserungs-Centrum ausgehende αmalige Vergrösserung der primitiven betrachten, welcher eine solche Ortsveränderung der primitiven gefolgt wäre, wobei diejenigen ihrer Puncte, welche vorher die Axen $x = 0$ und $y = 0$ bedeckten, jetzt auf die Axen $\xi = 0$ und $\eta = 0$ zu liegen kämen, oder als eine vom Puncte $\begin{matrix} \xi = 0 \\ \eta = 0 \end{matrix}$ ausgehende αmalige Vergrösserung, welcher eine von den Axen $x=0$ und $y=0$ nach den Axen $\xi = 0$ und $\eta = 0$ hin Statt gefundene Ortsveränderung vorausging; oder endlich als eine Transformation, bei welcher die primitive z. B. eine Stunde brauchte, um sich von den Axen XX' und YY' nach den Axen $\Xi\Xi'$ und $\Upsilon\Upsilon'$ hin zu bewegen, und in der nämlichen Stunde eine von einem gewissen, zwischen den Puncten $\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$ und $\begin{matrix} \xi = 0 \\ \eta = 0 \end{matrix}$ liegenden Puncte ausgehende αmalige Vergrösserung erfuhr.

In dem speciellen Falle unseres Beispiels könnte man, statt die unter der Form No. 4 gegebene Verwandtschaft $\begin{matrix} \xi' = \alpha x \\ \eta' = \alpha y \end{matrix}$ als eine Combination von 2 und 3 oder von 3 und 2 zu betrachten, die gegebene Verwandtschaft unmittelbar als eine Form No. 2 $\begin{matrix} p' = \alpha p \\ q' = \alpha q \end{matrix}$ betrachten, wenn man nur zu dem neuen Coordinaten-Ursprunge $\begin{matrix} p = 0 \\ q = 0 \end{matrix}$ den sogenannten *Situationspunct* der gegebenen Transformation $\begin{matrix} \xi' = \alpha x \\ \eta' = \alpha y \end{matrix}$ nähme. Jede von einem gewissen Puncte ausgehende Vergrösserung

hat nämlich die Eigenschaft, dass, wenn ihr eine gewisse Bewegung der Figur vorausgegangen oder gefolgt ist, oder gleichzeitig mit ihr Statt gefunden hat, die beiden Transformationen durch eine einzige, von den jedesmaligen Situationspuncten der doppelten Transformationen ausgehende αmalige Vergrösserung ohne hinzukommende Bewegung ersetzt werden können. Stellt man sich nämlich die durch die Gleichungen $\begin{matrix} x' = \alpha x \\ y' = \alpha y \end{matrix}$ ausgedrückte Vergrösserung D als der Bewegung E, oder $\begin{matrix} x' = x + u \\ y' = y + b \end{matrix}$ vorausgehend vor, so kann die resultirende Transformation DE oder $\begin{matrix} x' = \alpha x + a \\ y' = \alpha y + b \end{matrix}$ als

$$x' - \frac{a}{1-\alpha} = \alpha\left(x - \frac{a}{1-\alpha}\right),$$
$$y' - \frac{b}{1-\alpha} = \alpha\left(y - \frac{b}{1-\alpha}\right),$$

d. h. als eine vom Puncte

$$x = \frac{a}{1-\alpha}$$
$$y = \frac{b}{1-\alpha}$$

ausgehende Vergrösserung betrachtet werden, während die doppelte Transformation ED, oder $\begin{matrix} x' = \alpha(x+a) \\ y' = \alpha(x+b) \end{matrix}$, durch die vom Puncte

$$x = \frac{a\alpha}{1-\alpha}$$
$$y = \frac{b\alpha}{1-\alpha}$$

ausgehende αmalige Vergrösserung ersetzt werden kann. Und die aus der gleichzeitigen Wirkung beider Ursachen resultirende doppelte Transformation $D + E$ kann man sich aus n, z. B. aus 60 kleineren Transformationen zusammengesetzt vorstellen, so als wenn z. B. während der ersten *Minute* die Figur die Vergrösserung

$$x' = (\sqrt[n]{\alpha}) \times x$$
$$y' = (\sqrt[n]{\alpha}) \times y$$

während der folgenden die Bewegung

$$x' = x + \frac{a}{n}$$
$$y' = y + \frac{b}{n},$$

während der dritten Minute die Vergrösserung

$$\left(x' + \frac{a}{n}\right) = (\sqrt[n]{\alpha}) \times \left(x + \frac{a}{n}\right)$$
$$\left(y' + \frac{b}{n}\right) = (\sqrt[n]{\alpha}) \times \left(y + \frac{b}{n}\right)$$

u. s. w. erführe. Man erhält alsdann leicht, bei der Annahme $n = \infty$, die Coordinaten des Centrums, von welchem die die Vergrösserung mit Bewegung ersezzende Vergrösserung ausgeht. Im allgemeinen aber wird die aus der Combination zweier Transformationen D und E resultirende doppelte Transformation DE, oder ED, oder $D + E$, nicht durch eine einzige einfache Transformation von ähnlicher Art ersetzt werden können, so dass es doch am Ende besser ist, sich nicht auf die Fälle **2** und **3** zu beschränken, sondern den allgemeinen Fall **4** zu untersuchen.

Wird die zwischen zwei in zwei Ebenen liegenden Figuren Statt findende Verwandtschaft $\begin{matrix} f(u, v, t', w') = 0 \\ F(u, v, t', w') = 0 \end{matrix}$ als die Aenderungen andeutend betrachtet, welche die vier Coordinaten u, v, t', w' des veränderlichen Elements des Coordinatensystems u, v, t', w' erfahren, so lässt sich diese Verwandtschaft einerseits mit den *Flächen*, andererseits mit den *Curven doppelter Krümmung* vergleichen. Bei der Untersuchung der Eigenschaften einer solchen Verwandtschaft treten also zu den bei der Discussion der *Curven doppelter Krümmung* eintretenden Schwierigkeiten noch diejenigen hinzu, welche bei der Theorie der *Flächen* vorkommen; so wie ferner noch einige den Verwandtschaften eigene Schwierigkeiten, so dass die Häufung dieser dreifachen Schwierigkeiten die Theorie der *Verwandtschaften* zu einem der complicirtesten Theile der analytischen Geometrie macht.

Mit den *Flächen* stimmen die Verwandtschaften darin überein, dass jede Fläche $f(x, \eta, \zeta) = 0$ und jede Verwandtschaft $\begin{matrix} f(u, v, t', w') = 0 \\ F(u, v', t', w') = 0 \end{matrix}$ eine zwiefach ausgebreitete Elementar-Reihe, d. h. gleichsam eine Anzahl von ∞^2 Elementen ausdrückt, so dass jedes Element einer Fläche oder einer Verwandtschaft nicht **2**, sondern unendlich viele Nachbar-Elemente hat. Da nämlich das Element des Systems u, v, t', w', wie oben bemerkt, eine Combination eines Elements des Systems uv mit einem Element des Systems $t'w'$ darstellt, so erhält man alle möglichen Elemente des Systems $uvt'w'$, wenn man jeden der ∞ vielen, von $-\infty$ bis $+\infty$ sich erstreckenden, der Coordinate u zu gebenden Werthe mit jedem der ∞ vielen, der Coordinate v zu gebenden Werthe combinirt, und alsdann jedes

dieser ∞^2 Elemente des Systems uv mit jedem der ∞^2 Elemente des Systems $t'w'$ zusammen sich vorstellt. Es hat daher das System $uvt'w'$ ∞^4 Elemente, welche aber durch die Verwandtschaft $\begin{matrix} f(u,v,t',w') = 0 \\ F(u,v,t',w') = 0 \end{matrix}$ auf ∞^2 reducirt werden; gerade so, wie die Bedingung des Liegens auf der Fläche $f(x,y,z) = 0$ die ∞^3 Elemente oder Puncte des Systems xyz auf ∞^2 reducirt.

Mit den *Curven doppelter Krümmung* dagegen stimmt die Verwandtschaft $\begin{matrix} f(u,v,t',w') = 0 \\ F(u,v,t',w') = 0 \end{matrix}$ darin überein, dass beide zu ihrer Bestimmung zweier Gleichungen bedürfen; woraus folgt, dass (so wie der Ausdruck $\begin{matrix} f(x,y,z) = 0 \\ F(x,y,z) = 0 \end{matrix}$ keinesweges die Curve doppelter Krümmung selbst, sondern vielmehr das System der beiden, die Curve mittels ihres Durchschnitts darstellenden Flächen $f(x,y,z)=0$ und $F(x,y,z) = 0$ bedeutet) auch der gewöhnliche Ausdruck einer Verwandtschaft $\begin{matrix} f(u,v,t',w') = 0 \\ F(u,v,t'\ w') = 0 \end{matrix}$ im allgemeinen allzu bestimmt ist, als dass er *nur* diese Verwandtschaft ausdrücken sollte, und daher eigentlich eine gewisse Art ausdrückt, in welcher man sich selbige aus den unbestimmteren Verwandtschaften $f(u,v,t',w')$ und $F(u,v,t',w') = 0$ zusammengesetzt vorstellt. Die *Gerade* z.B., in welcher die beiden *Ebenen* $Ax+By+Cz+1=0$ und $Dx+Ey+Fz+1=0$ einander durchschneiden, ist zugleich der Durchschnitt jedes andern Paares von Ebenen, die die Gerade durchstreichen, und wird also nicht durch den, 6 Constanten enthaltenden Ausdruck $\begin{matrix} Ax+By+Cz+1 = 0 \\ Dx+Ey+Fz+1 = 0 \end{matrix}$ angedeutet, indem schon 4 Bedingungen zur Bestimmung der Lage einer Geraden im Raume hinreichen, sondern erst durch die Gleichungen

$$(Ax+By+Cz+1)+c(Dx+Ey+Fz+1) = 0\,,$$
$$(Ax+By+Cz+1)+c'(Dx+Ey+Fz+1) = 0\,;$$

wo durch das Hinzutreten zweier unbestimmter Grössen c und c', die 6 Constanten auf 4 reducirt sind. So auch enthält die durch die Bedingungen

$$Au+Bv+Ct'+Dw'+1 = 0 \quad \text{und} \quad Eu+Fv+Gt'+Hw'+1 = 0$$

dargestellte allgemeine Verwandtschaft ersten Grades, welche bei der Annahme, dass uv und $t'w'$ gewöhnliche Parallelcoordinaten sind, die Verwandtschaft der *Affinität* ausdrückt, nicht 8, sondern nur $8-2=6$, in den Ausdrücken

$$\frac{A+cE}{c+1}u+\frac{B+cF}{c+1}v+\frac{C+cG}{c+1}t'+\frac{D+cH}{c+1}w'+1 = 0 \text{ und}$$

$$\frac{A+c'E}{c'+1}u+\frac{B+c'F}{c'+1}v+\frac{C+c'G}{c'+1}t'+\frac{D+c'H}{c'+1}w'+1=0$$

enthaltene Constanten.

Mit den *Curven doppelter Krümmung* stimmen ferner die Verwandtschaften auch in der Hinsicht überein, dass, so wie man aus den Gleichungen $\begin{matrix} f(x,y,z)=0 \\ F(x,y,z)=0 \end{matrix}$ jede der 3 Coordinaten eliminiren und sich alsdann jedes Paares der 3 auf diese Weise gefundenen Projections-Ausdrücke $\psi(x,y)=0$, $\chi(x,z)=0$, $\varphi(y,z)=0$ statt der gegebenen zwei Gleichungen zum Ausdruck der Curve bedienen darf, so auch der gegebene Ausdruck $\begin{matrix} f(u,v,t',w')=0 \\ F(u,v,t',w)=0 \end{matrix}$ einer Verwandtschaft durch 2 willkührliche der 4 durch Elimination einer Coordinate aus ihm erhaltenen Ausdrücke

$$\psi(u,v,t')=0 \qquad F(u,v,w')=0 \qquad \varphi(v,t',w')=0 \qquad \chi(u,t',w')=0$$

ersetzt werden darf. Es ist aber im Systeme xyz keine der 3 Coordinaten x oder y oder z mit der einen Coordinate inniger als mit der andern verbunden; weshalb denn, so lange man keine speciellen Curven betrachtet, im Allgemeinen kein Grund vorhanden ist, des einen oder des andern der 3 Paare Projectionen eher als eines der beiden andern Paare sich zu bedienen. Im Systeme u, v, t', w', dagegen sind die vier Coordinaten je zwei und zwei zu einer nämlichen Figur gehörig, weshalb man im Allgemeinen, zwar nicht einfachere, aber doch zur Untersuchung geeignetere Formen einer Verwandtschaft erhält, wenn man sich des ersten und des zweiten Paares, d. h. $\begin{matrix} t'=\psi'(u,v) \\ w'=F'(u,v) \end{matrix}$, oder des dritten und des vierten, d. h. $\begin{matrix} v=\varphi'(t',w') \\ u=\chi'(t',w') \end{matrix}$, als wenn man sich des Paares $\begin{matrix} \psi(u,v,t')=0 \\ \varphi(v,t',w')=0 \end{matrix}$ oder $\begin{matrix} \psi(u,v,t')=0 \\ \chi(u,t',w')=0 \end{matrix}$ oder $\begin{matrix} F(u,v,w')=0 \\ \varphi(v,t',w')=0 \end{matrix}$ oder $\begin{matrix} F(u,v,w')=0 \\ \chi(u,t',w')=0 \end{matrix}$ zum Ausdrucke der gegebenen Verwandtschaft bedienen wollte. Es können jedoch Fälle vorkommen, wie z. B. bei der Verwandtschaft

$$\begin{aligned} x' &= \sin(ax)+\cos(by) \\ x &= \sin(cx)+\cos(dy'), \end{aligned}$$

wo die Einfachheit eines gewissen Gleichungen-Paares $\begin{matrix} \psi(u,v,t')=0 \\ \chi(u,t',w')=0 \end{matrix}$ dieses als den zur Untersuchung der Verwandtschaft geeigneteren ihrer 6 Projections-Ausdrücke bezeichnet.

Ein Gegenstand, dessen Erforschung bei der Untersuchung der Eigenschaften der Curven und Flächen vorkommt, ist die Bestimmung der Anzahl und

der Art der *Durchschnittspuncte* oder *Durchschnittscurven*, in welchen zwei Curven oder zwei Flächen einander schneiden. So ist es zur Ergründung der Natur zweier Verwandtschaften

$$\begin{matrix}\varphi(u, v, t', w') = 0 \\ \chi(u, v, t', w') = 0\end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix}\psi(u, v, t', w') = 0 \\ F(u, v, t', w') = 0\end{matrix}$$

sehr geeignet, zu untersuchen, welche ihre *Durchschnitts-Elemente*, d. h. welche die den beiden Verwandtschaften gemeinschaftlichen Elemente des Systems $uvt'w'$ sind, d. h. welche Elemente des Systems uv mit ihnen analogen Elementen des Systems $t'w'$, sowohl der einen als der andern Verwandtschaft nach correspondiren. Solche Elemente des Systems $uvt'w'$ müssen den vier Bedingungen

$$\varphi(u, v, t', w') = 0 \quad \chi(u, v, t', w') = 0 \quad \psi(u, v, t', w') = 0 \quad F(u, v, t', w') = 0$$

zugleich genügen; durch welche 4 Gleichungen die 4 Coordinaten u, v, t', w' dieser gemeinschaftlichen Elemente völlig bestimmt werden. Ihre Coordinaten u und v z. B. ergeben sich, wenn man aus den gegebenen vier Gleichungen t' und w' entwickelt und aus den gefundenen 4 Gleichungen

$$t' = \varphi'(u, v) \quad w' = \chi'(u, v) \quad t' = \psi'(u, v) \quad w' = F'(u, v)$$

t' und w' eliminirt, nemlich durch die zwei Gleichungen

$$\varphi'(u, v) - \psi'(u, v) = 0 \qquad \chi(u, v) - F'(u, v) = 0$$

Um Dies durch ein Beispiel zu erläutern, seien die beiden Verwandtschaften respective durch die Gleichungen $\begin{matrix}x' = ax \\ y' = ay\end{matrix}$ und $\begin{matrix}\xi' = b\xi \\ \eta' = a\eta\end{matrix}$ gegeben. Soll nun das Punctenpaar p und l (Fig. 9) das den beiden Vergrösserungen gemeinschaftliche Element sein, so muss die Bewegung pl, welche der Punct p der primitiven Figur durch die Transformation $\begin{matrix}x' = ax \\ y' = ay\end{matrix}$, d. h. durch eine vom Vergrösserungs-Centrum A ausgehende $a$malige Vergrösserung erfährt, mit der ihm durch die Vergrösserung $\begin{matrix}\xi' = b\xi \\ \eta' = b\eta\end{matrix}$ ertheilten Bewegung pk identisch sein, d. h. es müssen die Puncte k und l *auf einander fallen*; was bei der Lage der Figur keineswegs Statt findet, indem dazu nöthig ist, dass die beiden Bewegungen pl und pk, d. h. die beiden Radii-vectores Ap und Bp, mit einander parallel laufen, also dass die Puncte p und l in gewissen Puncten der Geraden $aABb$ liegen.

Die den beiden Verwandtschaften

$$\begin{matrix}\varphi(u, v, t', w') = 0 \\ \chi(u, v, t', w') = 0\end{matrix} \quad \text{und} \quad \begin{matrix}\psi(u, v, t', w') = 0 \\ F(u, v, t', w') = 0\end{matrix}$$

gemeinschaftlichen Elemente sind, da sie den vier Bedingungen

$$\varphi(u, v, t', w') = 0 \quad \chi(u, v, t', w') = 0 \quad \psi(u, v, t', w') = 0 \quad F(u, v, t', w') = 0$$

und daher auch den **6** aus der Combination dieser 4 Gleichungen entspringenden Verwandtschaften

$$\varphi(u, v, t', w') = 0 \quad \varphi(u, v, t', w') = 0 \quad \varphi(u, v, t', w') = 0 \quad \chi(u, v, t', w') = 0$$
$$\chi(u, v, t', w') = 0 \quad \psi(u, v, t', w') = 0$$
$$\chi(u, v, t', w') = 0 \quad \psi(u, v, t', w') = 0 \quad F(u, v, t', w') = 0 \quad F(u, v, t', w') = 0$$
$$\psi(u, v, t', w') = 0 \quad F(u, v, t', w') = 0$$

zugleich genügen müssen, nicht nur für die beiden gegebenen Verwandtschaften

$$\varphi(u, v, t', w') = 0 \quad \chi(u, v, t', w') = 0 \quad \text{und} \quad \psi(u, v, t', w') = 0 \quad F(u, v, t', w') = 0,$$

sondern im Allgemeinen für jedes der aus der Combination der **6** Verwandtschaften zu findenden Verwandtschaftspaare

$$\varphi(u, v, t', w') = 0 \quad \psi(u, v, t', w') = 0 \quad \text{und} \quad \chi(u, v, t', w') = 0 \quad F(u, v, t', w') = 0$$

u. s. w. *Durchschnitts-Elemente.* Es sind überdies die nämlichen Elemente auch die der beiden **6** fach unbestimmten Verwandtschaften

$$\varphi(u, v, t', w') + C_1\chi(u, v, t', w') + C_2\psi(u, v, t', w') + C_3F(u, v, t', w') = 0$$
$$\varphi(u, v, t', w') + C_4\chi(u, v, t', w') + C_5\psi(u, v, t', w') + C_6F(u, v, t', w') = 0$$

und

$$\varphi(u, v, t', w') + C_7\chi(u, v, t', w') + C_8\psi(u, v, t', w') + C_9F(u, v, t', w') = 0$$
$$\varphi(u, v, t', w') + C_{10}\chi(u, v, t', w') + C_{11}\psi(u, v, t', w') + C_{12}F(u, v, t', w') = 0$$

gemeinschaftliche Elemente, so dass, wenn die Functionen φ, χ, ψ, F die allgemeinen Functionen vom $q$ten Grade in Bezug auf alle **4** Veränderlichen u, v, t', w' sind, die Durchschnitts-Elemente der gegebenen beiden Verwandtschaften zugleich ∞^6 andern Verwandtschaften $q$ten Grades genügen, und daher zugleich die Durchschnitts-Elemente ∞^{36} anderer Paare zweier Verwandtschaften $q$ten Grades sind. Man nehme zum Beispiel den Fall an, wo die Functionen φ, χ, ψ, F alle vom *ersten* Grade sind, und wo die Systeme uv und $t'w'$ homoelementische Systeme und zwar gewöhnlicher Parallelcoordinaten bedeuten, so ist das Durchschnitts-Element der beiden Affinitäten

$$Ax + By + Cx' + Dy' + 1 = 0 \quad Ex + Fy + Gx' + Hy' + 1 = 0 \quad \text{und} \quad Kx + Ly + Mx' + Ny' + 1 = 0 \quad Px + Ry + Sx' + Fy' + 1 = 0$$

oder, wenn man Projections-Ausdrücke benutzen will, der beiden Affinitäten

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + c \\ y' &= dx + ey + f \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y + \gamma \\ y' &= \delta x + \varepsilon y + \tau \end{aligned}$$

zu betrachten. Nur werden die Coordinaten x und y desjenigen Puncts der primitiven Figur, welcher mit seinem analogen Puncte sowohl der einen als der andern Affinität correspondirt, durch die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} (a-\alpha)x + (b-\beta)y + (c-\gamma) &= 0 \\ (d-\delta)x + (e-\varepsilon)y + (f-\tau) &= 0 \end{aligned}$$

gegeben, woraus sich

$$x = \frac{(c-\gamma)(e-\varepsilon) - (f-\tau)(b-\beta)}{(d-\delta)(b-\beta) - (a-\alpha)(e-\varepsilon)}$$

findet, während die drei übrigen Coordinaten y, x', y' des Punctenpaares bekanntlich den nämlichen Nenner, aber andere Zähler haben. Es sind aber diese beiden Puncte nicht nur das einzige, nach den gegebenen beiden Affinitäten mit einander correspondirende Punctenpaar, sondern auch das einzige Punctenpaar, dessen Puncte sowohl nach der Affinität

$$\begin{aligned} Ax + By + Cx' + Dy' + 1 &= 0 \\ Kx + Ly + Mx' + Ny' + 1 &= 0, \end{aligned}$$

als nach der Affinität

$$\begin{aligned} Ex + Fy + Gx' + Hy' + 1 &= 0 \\ Px + Ry + Sx' + Fy' + 1 &= 0 \end{aligned}$$

mit einander correspondiren. Es sind zugleich diese beiden Puncte das einzige Paar Puncte, deren Correspondenz jeder der ∞^6 im 6-fach unbestimmten Ausdruck

$$\begin{aligned} &(A+C_1E+C_2K+C_3P)x + (B+C_1F+C_2L+C_3R)y + (C+C_1G+C_2M+C_3S)x' \\ &\quad + (D+C_1H+C_2N+C_3F)y' + (1+C_1+C_2+C_3) = 0 \\ &(A+C_4E+C_5K+C_6P)x + (B+C_4F+C_5L+C_6R)y + (C+C_4G+C_5M+C_6S)x' \\ &\quad + (D+C_4H+C_5N+C_6F)y' + (1+C_4+C_5+C_6) = 0 \end{aligned}$$

enthaltenen Affinitäten mit jeder der ∞^6 durch den nämlichen Ausdruck dargestellten Affinitäten gemeinschaftlich ist.

Rücksichtlich der Anzahl der zweien Verwandtschaften gemeinschaftlichen Elemente ist auf Folgendes zu achten. Eine Curve vom $p$ten Grade

$$\varphi(xy) \equiv ax^p + bx^{p-1}y + cx^{p-2}y^2 + \ldots\ldots + 1 = 0$$

begegnet einer Curve vom $q$ten Grade $\psi(x,y) = 0$ im Allgemeinen in $p \times q$

Durchschnittspuncten. Lässt man jedoch die $\frac{1}{2}p(p+3)$ Coefficienten a, b, c etc. ..... der Curve $\varphi(xy)=0$ und die $\frac{1}{2}q(q+3)$ Coefficienten α, β, γ, etc. ..... der Curve $\psi(xy)=0$ continuirlich sich ändern, so werden unter gewisser gegenseitiger Beziehung der Coefficienten a,b,c, etc. ..... und α,β,γ, etc. ..... einige der $p\times q$ Durchschnittspuncte, welche vorher endliche Coordinatenwerthe hatten, jetzt unendlich grosse Werthe bekommen und sich daher vom Coordinaten-Ursprung $\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}$ unendlich weit entfernen. Da nun aber solche unendlich sich entfernenden Puncte ihre Existenz in gewisser Beziehung verlieren, so pflegt man auch wohl diese, so wie die imaginären Durchschnittspuncte, nicht mitzuzählen; in welchem Falle $p\times q$ *nicht* die Anzahl der Durchschnittspuncte, sondern nur das *Maximum* derselben ausdrückt, welches diese Anzahl niemals überschreiten darf. So auch bei zwei Verwandtschaften

$$\begin{matrix}\varphi(xyx'y')=\\ \chi(xyx'y')=\end{matrix}\quad\text{und}\quad\begin{matrix}\psi(xyx'y')=0\\ F(xyx'y')=0\,.\end{matrix}$$

Sind die Functionen φ,χ,ψ,F respective vom p^{ten}, q^{ten}, r^{ten} und s^{ten} Grade in Bezug auf alle vier Coordinaten x,y,x',y', so giebt es im Allgemeinen $p\times q\times r\times s$ Punctenpaare, deren Puncte nach beiden Verwandtschaften mit einander correspondiren. Will man jedoch, nach Analogie der bei den Durchschnittspuncten der Curven üblichen Terminologie, nur diejenigen Punctenpaare betrachten, deren Coordinaten alle *reell* sind, d. h. bei denen ein reeller Punct der primitiven Figur mit einem reellen Puncte der analogen Figur, sowohl nach der einen als nach der andern Verwandtschaft correspondirt, so bekommt man im allgemeinen viel weniger als $pqrs$ Punctenpaare. Die Anzahl der gemeinschaftlichen Punctenpaare vergrössert sich etwas, wenn man nach *Magnus* Erinnerung (Bd. II, S. 418) auch auf die Correspondenz derjenigen Puncte Rücksicht nimmt, von welchen ein reeller Punct der primitiven Figur mit einem imaginären der analogen, oder ein imaginärer Punct der primitiven mit einem reellen Punct der analogen Figur correspondirt. Nimmt man endlich auch auf diejenige Punctenpaare Rücksicht, deren Coordinaten alle vier imaginär sind, d. h. bei denen ein imaginärer Punct der primitiven Figur mit einem imaginären der analogen Figur correspondirt, so erhält man die vollständige Zahl $pqrs$ der gemeinschaftlich correspondirenden Punctenpaare beider Verwandtschaften, so lange wenigstens keines derselben unendlich grosse Coordinaten-Werthe bekommt. Findet *Dies* Statt, und zwar entweder so, dass alle vier Coordinaten, oder so, dass nur einige derselben, z. B. die x und y, unendlich gross werden, die x' und y' dagegen

endlich bleiben, so erfordert die analytische Consequenz, dass man im ersten Falle die unendlich entfernten Puncte der primitiven Figur als mit den unendlich entfernten Puncten der analogen Figur einmal oder mehrere Male nach beiden Verwandtschaften correspondirend betrachtet; und im zweiten Falle, dass man die unendlich entfernten Puncte der primitiven Figur mit einem oder mehreren, vom Coordinaten-Ursprung nicht unendlich entfernten Puncten der analogen Figur nach beiden Verwandtschaften correspondirend sich vorstellt. Die gewöhnliche Redensart jedoch nimmt auf diese Correspondenz der im Unendlichen liegenden Puncte keine Rücksicht, und erkennt daher den beiden Verwandtschaften alsdann weniger als $p\,q\,r\,s$ gemeinschaftlich correspondirende Punctenpaare zu.

Ein Beispiel imaginärer, zweien Verwandtschaften gemeinschaftlicher Elemente giebt die *Collineation*. Denn es seien zwei allgemeine Collineationen durch die Gleichungen

$$x' = \frac{ax+by+c}{dx+ey+1} \qquad y' = \frac{gx+hy+j}{dx+ey+1}$$

und

$$x' = \frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{\delta x+\varepsilon y+1} \qquad y' = \frac{\tau x+\vartheta y+k}{\delta x+\varepsilon y+1}$$

gegeben, so findet man diejenigen Puncte der primitiven Figur, welche durch die erste collineäre Transformation zu den nämlichen Puncten der analogen werden, wie durch die zweite Transformation, durch Auflösung der Gleichungen

$$\frac{ax+by+c}{dx+ey+c} = \frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{\delta x+\varepsilon y+1} \quad \text{und} \quad \frac{gx+hy+j}{dx+ey+1} = \frac{\tau x+\vartheta y+k}{\delta x+\varepsilon y+1},$$

d. h. sie sind die vier Durchschnittspuncte der zwei Kegelschnitte

$$(ax+by+c)(\delta x+\varepsilon y+1)-(dx+ey+1)(\alpha x+\beta y+\gamma)=0$$
$$(gx+hy+j)(\delta x+\varepsilon y+1)-(dx+\varepsilon y+1)(\tau x+\vartheta y+k)=0.$$

Da nun aber entweder 2 dieser 4 Durchschnittspuncte, oder alle 4 imaginär sein können, so ergiebt sich, dass es bei jedem Paare zweier Collineationen immer 4 Puncte der primitiven Figur giebt, welche nach beiden Collineationen mit den nämlichen Puncten analog sind; und zwar entweder so, dass die 8 Puncte alle reell, oder so, dass sie alle 8 imaginär sind; oder endlich so, dass es in der primitiven 2 reelle und 2 imaginäre Puncte giebt, welche respective mit 2 reellen und 2 imaginären Puncten der analogen Figur in zweifacher Hinsicht collineär verwandt sind. Diejenige gemeinschaftliche Correspondenz eines Punctenpaares, wo ein reeller Punct der einen Figur mit einem imaginären der andern nach beiden Arten verwandt wäre, kann in diesem Beispiel nicht vorkommen, weil in der Collineation (wenigstens in der gewöhnlich betrachteten, wo

die Coefficienten $a, b, c,$ etc..... alle reell sind) einem reellen Puncte immer ein reeller Punct entspricht.

Specialiren sich die Collineationen zu den *Affinitäten*

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + c \\ y' &= gx + hy + j \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta y + \gamma \\ y' &= \tau x + \vartheta y + \varkappa, \end{aligned}$$

so ist das jetzt einzige, gemeinschaftlich correspondirende Punctenpaar immer reell, in Bezug auf alle vier Coordinaten; so lange wenigstens, als die Coefficienten a, b, c alle reell sind. Gleichwohl kann durch das Unendlich-sich-entfernen correspondirender Puncte auch bei den Affinitäten die gemeinschaftliche Correspondenz ihre Existenz gewissermaassen verlieren. Es ist dazu nur die Bedingung

$$\frac{g-\tau}{a-\alpha} = \frac{h-\vartheta}{b-\beta}$$

nöthig, d. h. dass der den vier Coordinaten

$$x = \frac{(c-\gamma)(h-\vartheta)-(j-k)(b-\beta)}{(g-\tau)(b-\beta)-(a-\alpha)(h-\vartheta)} \text{ etc.}$$

gemeinschaftliche Nenner $= 0$ sei, und zwar ohne dass diese Bedingung allen vier Coordinaten endliche, in der Form $\frac{0}{0}$ ausgedrückte Werthe gäbe. Specialisiren z. B. die Affinitäten sich zu den Ortsveränderungen

$$\begin{aligned} x' &= x + 1 \\ y' &= y + 2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x' &= x + 3 \\ y' &= y + 4, \end{aligned}$$

so bekommen alle vier Coordinaten unendlich grosse, durch $\frac{0}{0}$ ausgedrückte Werthe.

Es betrachtet nun die gewöhnliche Redensart die der primitiven Figur in einer von der Richtung der XX' von den Winkel arc.tg.2 abweichenden Richtung gegebene Bewegung niemals, auch nicht bei den unendlich entfernt liegenden Puncten, als mit einer in der Richtung arc.tg $\frac{4}{3}$ Statt findenden Bewegung identisch. Indessen verlangt die analytische Consequenz, dass man alsdann die in unendlicher Entfernung Statt findende endliche Bewegung der primitiven Figur als eine vom Coordinaten-Ursprung aus unmerkbare, d. h. als eine Nicht-Bewegung betrachte, welche alsdann mit der von den asymptotischen Zweigen der primitiven, bei der zweiten Bewegung erlangten scheinbaren Unveränderlichkeit coïncidirt.

Stellt man sich nicht zwei, sondern drei verschiedene Verwandtschaften, z. B. die drei *Affinitäten*

$$\begin{array}{lll} x' = ax + by + c & x' = \alpha x + \beta y + \gamma & x' = Ax + By + C \\ y' = gx + hy + j & y' = \tau x + \vartheta y + \varkappa & y' = Dx + Ey + F \end{array}$$

vor, so wird es nicht immer ein gewisses Element der primitiven Figur geben, welches mit einem gewissen Elemente der analogen Figur nach allen drei Verwandtschaften zugleich correspondirt. Giebt es aber ein oder mehrere solcher Elementenpaare, so müssen deren vier Coordinaten den 6 die drei Verwandtschaften ausdrückenden Gleichungen genügen; so dass solch ein specieller Zusammenhang der drei Verwandschaften die Erfüllung von $6-4=2$ Bedingungen erfordert.

Zur Ergründung der Eigenschaften der *Flächen* und der *Curven doppelter Krümmung* gehört, ausser der Untersuchung der *Durchschnittspuncte* und *Durchschnittscurven* zweier Curven oder zweier Flächen, insbesondere auch die Betrachtung desjenigen Falles, wo die eine Curve oder Fläche eine der drei Coordinaten-Axen oder Coordinaten-Ebenen ist. Entfernen sich in diesem Falle die Durchschnittspuncte unendlich weit vom Coordinaten-Ursprunge, so gelangt man zu denjenigen speciellen *Grenz-Formen* der Curve, wo sie einer Coordinaten-Ebene oder einer Coordinaten-Axe parallel ist, d. h. wo sie in eine Curve *einfacher* Krummung oder in eine *Gerade* übergeht. Wir wollen jetzt die Untersuchung der analogen speciellen Verwandtschafts-Arten versuchen.

Jede der beiden Gleichungen einer Verwandtschaft

$$f(u, v, t', w') = 0$$
$$F(u, v, t', w') = 0$$

enthält im Allgemeinen sowohl die Coordinaten der primitiven, als die der analogen Figur. Kommen dagegen in der einen Gleichung nur die Coordinaten *einer* Figur vor, so theilt sich die erhaltene specielle Verwandtschaftsart $\begin{matrix} f(u, v) = 0 \\ F(u, v, t', w') = 0 \end{matrix}$ je nachdem in der andern Gleichung nur die Coordinaten t' und w' der andern Figur, oder nur die Coordinaten u und v, oder endlich alle vier Coordinaten vorkommen, in folgende drei Arten:

$$\begin{array}{lll} f(u, v) = 0 & f(u, v) = 0 & f(u, v) = 0 \\ F(t', w') = 0 & F(u, v) = 0 & F(u, v, t', w') = 0. \end{array}$$

Zur Vereinfachung wollen wir den Fall homoelementischer Coordinatensysteme, und zwar paralleler Coordinaten betrachten, da die meisten Schlüsse von den speciellen Verwandtschafts-Arten

$$f(x, y) = 0 \qquad f(x, y) = 0 \qquad f(x, y) = 0$$
$$F(x', y) = 0 \qquad F(x, y) = 0 \qquad F(x, y, x', y') = 0$$

mit geringer Veränderung unmittelbar auf den allgemeinern Fall nicht-homoelementischer Coordinatensysteme sich übertragen lassen.

Betrachten wir zuerst die Verwandtschaft

$$f(x, y) = 0$$
$$F(x, y) = 0.$$

Welche auch die endlichen Werthe α und β eines beliebigen Punts $\begin{matrix} x = \alpha \\ y = \beta \end{matrix}$ der primitiven Figur sein mögen: immer müssen die analogen Coordinaten x' und y' der von α und β unabhängigen Bedingung $F(x', y') = 0$ genügen, d. h. immer muss der analoge Punct sich auf der Curve $F(x', y') = 0$ befinden. Umgekehrt muss jeder Punct der primitiven Curve, welchen nicht im Unendlichen liegenden Punct der analogen Curve er auch zum Correspondenten haben möge, immer auf der vom analogen Puncte unabhängigen Curve $f(x, y) = 0$ sich befinden. Es hat also jeder auf der Curve $f(x, y) = 0$ liegende und vom Coordinaten-Ursprung nicht unendlich entfernte Punct $\begin{matrix} x = \alpha \\ y = \beta \end{matrix}$ der primitiven Figur jeden beliebigen Punct der Curve $F(x', y') = 0$ zum Correspondenten, d. h. die *ganze Curve* $F(x', y') = 0$. Jeder dagegen nicht auf der Curve $f(x, y) = 0$ und nicht im Unendlichen liegende Punct $\begin{matrix} x = \gamma \\ y = \delta \end{matrix}$ der primitiven Curve hat in der analogen Figur *keinen einzigen* Punct zum Correspondenten, ausser den im Unendlichen liegenden und zugleich auf der Curve $F(x', y') = 0$ sich befindenden Puncten, d. h. ausser den Spitzen der der Curve $F(x', y') = 0$ angehörigen asymptotischen Zweige. Umgekehrt ist jeder nicht im Unendlichen liegende Punct der analogen Figur, wenn er sich zufällig auf der Curve $F(x', y') = 0$ befindet, der Correspondent der ganzen Curve $f(x', y') = 0$. Wenn er sich dagegen nicht auf der Curve $F(x, y) = 0$ befindet, ist er nur der Correspondent der Spitzen der asymptotischen Zweige dieser Curve $f(x, y) = 0$. Ein Beispiel dieser speciellen Verwandtschafts-Art ist die aus der allgemeinen Affinität

$$\begin{matrix} Ax+By+Cx'+Dy'+1=0 \\ Ex+Fy+Gx'+Hy'+1=0 \end{matrix} \quad \text{oder} \quad x'=\frac{H(Ax+By+1)-D(Ex+Fy+1)}{DG-HC}$$

$$y'=\frac{C(Ex+Fy+1)-G(Ax+By+1)}{DG-HC}$$

durch die vier Specialisirungen $C=D=E=F=0$ entspringende Verwandtschaft

$$\begin{aligned} Ax+By+1&=0 \\ Gx'+Hy'+1&=0. \end{aligned}$$

Für jeden auf der Geraden $Ax+By+1=0$ nicht liegenden Punct $\begin{matrix} x=\alpha \\ y=\beta \end{matrix}$ der primitiven Figur bekommt man alsdann $x'=\frac{H(A\alpha+B\beta+1)}{0}=\infty$, für jeden Punct dagegen der Geraden $Ax+By+1=0$ erhält man $x'=\frac{0}{0}$, d. h. in unserm Fall jeden beliebigen der Bedingung $Gx'+Hy'+1=0$ genügenden Werth der x'; und eben so bekommen auch die übrigen Coordinaten y' und x und y entweder den Werth ∞, oder den unbestimmten Werth $\frac{0}{0}$.

Zu einer geometrischen Erläuterung dieser Verwandtschafts-Art führt folgende Betrachtung. Man nehme zwei nicht parallele Ebenen und einen ausserhalb derselben liegenden Punct an, verbinde jeden in der einen Ebene liegenden Punct mit dem festen Punct durch eine Gerade, und betrachte alsdann, mit *Steiner* (Systematische Entwickelung etc. S. 254), als den entsprechenden Punct des veränderlichen Punctes denjenigen Punct der andern Ebene, in welchem sie von der Geraden getroffen wird. Man stelle sich nun den festen Punct als unendlich entfernt, und zwar auf der Spitze des gemeinschaftlichen Durchschnitts der beiden Ebenen liegend vor: dann hat jeder in dieser Durchschnitts-Geraden liegende Punct der einen oder der anderen Ebene diese ganze Gerade zum Correspondenten, da solch ein Punct der primitiven Ebene mit dem festen Puncte durch eben diese Gerade verbunden wird, die Gerade aber ganz auf der andern Ebene liegt und daher mit allen ihren Puncten diese Ebene trifft. Jeder dagegen nicht in dieser Durchschnitts-Geraden liegende Punct einer von beiden Ebenen wird mit dem festen Puncte durch eine der andern Ebene parallele Gerade verbunden, und hat daher den unendlich entfernten Durchschnittspunct dieser Ebene mit der ihr parallelen Geraden zum Correspondenzpunct. Nimmt man jetzt die Coordinaten-Axen so auf den Ebenen liegend an, dass die Axe YY' im Durchschnitt beider Ebenen liegt, so hat die Verwandtschaft unseres Beispiels

zum analytischen Ausdruck $\begin{matrix} x = 0 \\ x' = 0 \end{matrix}$, während sie bei einer andern Lage der Coordinaten-Axen Ausdrücke von der Form $\begin{matrix} Ax + By + 1 = 0 \\ Gx' + Hy' + 1 = 0 \end{matrix}$ bekommt.

Man betrachte jetzt die andere specielle Verwandtschafts-Art

$$f(x, y) = 0$$
$$F(x, y) = 0.$$

Hier sind die Coordinaten x und y, welche endliche Coordinaten-Werthe $\begin{matrix} x' = \varepsilon \\ y' = \eta \end{matrix}$ sie auch zu Correspondenten haben mögen, immer den beiden von ε und η unabhängigen Bedingungen $\begin{matrix} f(x, y) = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{matrix}$ unterworfen, d. h. sie sollen immer eines der durch Auflösung der Gleichungen $\begin{matrix} f(x, y) = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{matrix}$ sich ergebenden Werthen-Paare $\begin{matrix} x = \alpha & x = \alpha' \\ \eta = \beta & \eta = \beta' \end{matrix}$ etc. sein; die Coordinaten x' und y' dagegen kommen in der Verwandtschaft nicht vor, und bleiben daher, so lange wenigstens x und y eines jener Werthen-Paare $\begin{matrix} x = \alpha \\ y = \beta \end{matrix}$ etc. darstellen, ganz unbestimmt. Es correspondirt folglich jeder nicht im Unendlichen liegende Punct der primitiven Figur, wenn er einer von jenen Durchschnittspuncten $\begin{matrix} x = \alpha \\ y = \beta \end{matrix}$ etc. der beiden Curven $f(x, y) = 0$ und $F(x, y) = 0$ ist, mit der ganzen analogen Figur; dagegen, wenn es kein anderer Punct $\begin{matrix} x = \gamma \\ y = \delta \end{matrix}$ ist, mit keinem einzigen Puncte der analogen Figur, oder wenigstens mit keinem ausser den unendlich entfernten. Jeder nicht im Unendlichen liegende Punct, oder sogar jede Curve der analogen Figur, hat, wo sie auch liegen möge, immer die nämlichen Puncte $\begin{matrix} x = \alpha & x = \alpha' \\ y = \beta & y = \beta' \end{matrix}$ etc. zu Correspondenten. Ein Beispiel gibt die aus zwei allgemeinen Affinitäten durch die Specialisirungen $C = D = G = H = 0$ entstehende Verwandtschaft

$$Ax + By + 1 = 0$$
$$Ex + Fy + 1 = 0.$$

Der Ausdruck

$$x' = \frac{H(Ax + By + 1) - D(Ex + Fy + 1)}{DG - HC}$$

reducirt sich durch die Specialisirung zwar für jeden Werth der x und y auf die scheinbar unbestimmte Form $\frac{0}{0}$, bleibt jedoch nur für denjenigen Werth $\begin{matrix} x = \alpha \\ y = \beta \end{matrix}$ welcher die Ausdrücke $A\alpha + \beta\beta + 1$ und $\varepsilon\alpha + F\beta + 1$ zugleich annullirt,

wirklich unbestimmt, und reducirt sich für jedes andere Paar Werthe $\begin{matrix} x = \gamma \\ y = \delta \end{matrix}$ auf auf die bestimmte Form ∞. Eine geometrische Erläuterung ergiebt sich, wenn man, wie oben, zwei Ebenen xy und $x'y'$ und einen festen Punct betrachtet und die beiden Ebenen einander parallel und den festen Punct im Puncte

$$x = \frac{-(Fy+1)}{\varepsilon}$$

$$y = \frac{\overline{-(Fy+1)}}{\varepsilon}$$

der Ebene liegend sich vorstellt, d. h. wenn man für die zwischen den beiden Figuren Statt findende Verwandtschaft die Aehnlichkeit mit unendlichem Unterschiede der Grösse annimmt. Jede in der Ebene $x'y'$ gezeichnete Figur wird alsdann mit dem festen Puncte durch Gerade verbunden, welche alle die Ebene xy in diesem festen Puncte treffen, und hat daher nur diesen einzigen Punct zum Correspondenten: jede dagegen in der Ebene xy gezeichnete Figur hat zu ihrem Correspondenten die unendlich entfernten Durchschnittspuncte der Ebene $x'y'$ mit den ihr parallelen Geraden, welche die in der Ebene xy liegende Figur mit dem festen Puncte verbinden.

Betrachten wir jetzt die *dritte* Verwandtschaft

$$f(x, y) = 0$$
$$F(x, y, x', y') = 0.$$

Die Coordinaten x und y jedes beliebigen Puncts der primitiven Figur sind hier, wie in dem Falle No. 1, immer der von der Lage ihrer endlich entfernten analogen Puncte unabhängigen Bedingung $f(x, y) = 0$ unterworfen, und müssen sich daher auf der Curve $f(x, y) = 0$ befinden: die Coordinaten x' und y' dagegen sind weder, wie in dem Fall No. 2, unbestimmt, noch unterliegen sie, wie in dem Fall No. 1, einer von x und y unabhängigen Bedingung. Es correspondirt also jeder nicht auf der Curve $f(x, y) = 0$ liegende Punct $\begin{matrix} x = \gamma \\ y = \delta \end{matrix}$ der primitiven nur mit den im Unendlichen liegenden Puncten der analogen Figur; jeder dagegen auf der Curve $f(x, y) = 0$ liegende Punct $\begin{matrix} x = \alpha \\ y = \beta \end{matrix}$ hat eine ganze, gewisse, mit der Fortbewegung des Puncts $\begin{matrix} x = \alpha \\ y = \beta \end{matrix}$ in Form und Lage sich ändernde Curve $F(\alpha, \beta, x', y') = 0$ zum Correspondenten. Umgekehrt hat jeder Punct $\begin{matrix} x' = \varepsilon \\ y' = \tau \end{matrix}$ einen gewissen von der Lage dieses Punctes $\begin{matrix} x' = \varepsilon \\ y' = \tau \end{matrix}$ abhängigen Punct $\begin{matrix} f(x, y) = 0 \\ F(x, y, \varepsilon, \tau) = 0 \end{matrix}$

der primitiven Curve zum Correspondenten, und zwar immer einen auf der Curve $f(x, y) = 0$ sich befindenden Punct. Es hat jedoch dieser Punct $\begin{matrix} x = \varepsilon \\ y' = \tau \end{matrix}$ seine mit dem Puncte der Curve $f(x,y) = 0$ Statt findende Correspondenz mit allen denjenigen Puncten $\begin{matrix} x' = \varepsilon' & x' = \varepsilon'' \\ y' = \tau' & y' = \tau'' \end{matrix}$ etc. gemein, welche sich mit dem Puncte $\begin{matrix} x' = \varepsilon \\ y' = \tau \end{matrix}$ auf einer nämlichen Curve von der Art $F(\alpha, \beta, x', y') = 0$ befinden.

Als Beispiel diene der Fall, wo die Verwandtschaft $\begin{matrix} f(x, y) = 0 \\ F(x, y, x', y') = 0 \end{matrix}$ sich zu der Form $\begin{matrix} f(x, y) = 0 \\ F(x, y, x') = 0 \end{matrix}$ specialisirt, d. h. wo sie sich auf eine beliebige der Formen $\begin{matrix} f(x, y) = 0 \\ \psi(x, x') = 0 \end{matrix}$, oder $\begin{matrix} f(x, y) = 0 \\ \chi(x', y) = 0 \end{matrix}$, oder $\begin{matrix} \psi(x, x') = 0 \\ \chi(x', y) = 0 \end{matrix}$ bringen lässt. Es lässt alsdann der Punct $\begin{matrix} x = \alpha \\ y = \beta \end{matrix}$ die Coordinate η' unbestimmt, bestimmt dagegen den Werth der x' zu $F(\alpha, \beta, x') = 0$, d. h. zu $x' = \varepsilon$, und es hat folglich der Punct $\begin{matrix} x = \alpha \\ \eta = \beta \end{matrix}$ die ganze der Coordinaten-Axe YY' parallele Gerade $x' = \varepsilon$ zum Correspondenten, während umgekehrt nicht nur der Punct $\begin{matrix} x' = \varepsilon \\ y' = \tau \end{matrix}$, sondern jeder andere, von der Axe YY' gleichweit entfernte Punct $\begin{matrix} x' = \varepsilon \\ y' = \tau' \end{matrix}$ mit dem Puncte $\begin{matrix} x = \alpha \\ y = \beta \end{matrix}$ correspondirt. Geometrisch wird Dies erläutert, wenn man sich, wie oben, zwei Ebenen und einen festen Punct vorstellt, und zwar die beiden Ebenen nicht mit einander parallel, den festen Punct aber auf der Ebene $x'y'$ liegend, in einem beliebigen, unendlich entfernten Ort, nur nicht auf der Spitze des Durchschnitts der beiden Ebenen; d. h. wenn man diejenige Verwandtschaft betrachtet, welche, wenn die Coordinaten-Axe XX' in den Durchschnitt der beiden Ebenen gelegt und die Axe YY nach dem festen Punct gerichtet wird, die Form $\begin{matrix} y = 0 \\ x' = x \end{matrix}$ zum analytischen Ausdruck hat. Es hat alsdann jeder in dieser Durchschnittsgeraden liegende Punct der Ebene xy die ganze ihn mit dem festen Punct verbindende und auf der Ebene $x'y'$ liegende Gerade zum Correspondenten, während jeder andere Punct der Ebene xy mit dem festen Punct durch der Ebene $x'y'$ parallele Gerade verbunden wird, und daher nur die unendlich entfernten Durchschnittspuncte der Ebene $x'y'$ und dieser ihr parallele Geraden zu Correspondenten hat.

Von der Untersuchung der Eigenschaften einer Curve $f(x, y) = 0$ besteht, wie oben bemerkt, ein wichtiger Theil in der Betrachtung ihrer *Durchschnitts-*

puncte mit einer Curve $\psi(x, y) = 0$, d. h. in der Aufsuchung derjenigen speciellen Puncte der Curve $f(x, y) = 0$, welche, ausser dieser, allen Puncten der Curve gemeinschaftlichen Bedingung $f(x, y) = 0$, auch noch der neuen Bedingung genügen, dass sie auf der Curve $\psi(x, y) = 0$ liegen sollen. So liegt für die Untersuchung einer gegebenen Verwandtschaft $\begin{matrix} f(u, v, t', w') = 0 \\ F(u, v, t', w') = 0 \end{matrix}$ ein wichtiges Mittel darin, dass man die Verwandtschaft durch Hinzufügung einer oder zwei neuer Bedingungen $\begin{matrix} \psi(u, v, t', w') = 0 \\ \chi(u, v, t', w') = 0 \end{matrix}$ specialisirt. Wird *nur eine* neue Bedingung $\psi(u, v, t', w') = 0$ hinzugefügt, so reducirt sich die Anzahl der ∞^2, durch die gegebene Verwandtschaft dargestellten Elemente des Systems u, v, t', w' auf ∞^1, d. h. es findet nicht mehr die Correspondenz jedes der ∞^2 Elementen des Systems uv oder $t'w'$ mit einem oder mit mehreren Elementen des andern Systems Statt, sondern es reducirt sich alsdann diese Correspondenz auf diejenige gewisser ∞^1 Elemente des Systems uv und gewisser ∞^1 Elemente des Systems $t'w'$ mit einander. Fügt man z.B. der in homoelementischen Polar-Coordinaten ausgedrückten Verwandtschaft $\begin{matrix} f(r, \varphi, r', \varphi') = \\ F(r, \varphi, r', \varphi') = \end{matrix}$ die Specialisirung $\varphi' - \varphi = 0$ hinzu, so hebt sich aus allen, nach der Verwandtschaft $\begin{matrix} f(r, \varphi, r', \varphi') = 0 \\ F(r, \varphi, r', \varphi') = 0 \end{matrix}$ mit einander correspondirenden Curvenpaaren dasjenige heraus, welches die Eigenschaft hat, dass die Vereinigungs-Gerade je zweier correspondirenden Puncte durch den Coordinaten-Ursprung geht. Fügt man dagegen der Verwandtschaft $\begin{matrix} f(r, \varphi, r', \varphi') = 0 \\ F(r, \varphi, r', \varphi') = 0 \end{matrix}$ die Specialisirung $\psi(r, \varphi) = 0$ hinzu, so bleibt die Correspondenz der bestimmten Curve $\psi(r, \varphi) = 0$ mit der ihr nach der Verwandtschaft $\begin{matrix} f(r, \varphi, r', \varphi') = 0 \\ F(r, \varphi, r', \varphi') = 0 \end{matrix}$ analogen Curve zu betrachten.

Werden der gegebenen Verwandtschaft zwei Specialisirungs-Bedingungen hinzugefügt, so reducirt sich, (wenigstens wenn die Functionen f, F, ψ, χ algebraisch sind) die Anzahl der ∞^2 durch die Verwandtschaft überhaupt dargestellten Elemente des Systems u, v, t', w' im Allgemeinen auf eine endliche Anzahl Elemente von u, v, t', w'; d. h. es werden nur diejenigen speciellen, in endlicher Anzahl vorhandenen Elemente des Systems uv und des Systems $t'w'$ betrachtet, welche mit einander, ausser nach der gegebenen, auch nach der neuen hinzugefügten Verwandtschaft correspondiren. Es ändert sich jedoch die Bedeutung dieser Specialirung einigermaassen, wenn die hinzugefügten neuen Bedingungen nicht die allgemeine Form

$$\psi(u, v, t', w') = 0$$
$$\chi(u, v, t', w') = 0,$$

sondern eine der beiden speciellen Formen

$$\begin{matrix}\psi(u, v) = 0 \\ \chi(u, v) = 0\end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix}\psi(u, v) = 0 \\ \chi(t', w') = 0\end{matrix}$$

haben. Im ersten Fall sind diejenigen Elemente der analogen Figur zu betrachten, welche nach der gegebenen Verwandtschaft mit den aus den Bedingungen $\psi(u, v) = 0$ und $\chi(u, v) = 0$ zu entwickelnden Elementen $\begin{matrix}u = \alpha & u = \alpha' \\ v = \beta & v = \beta'\end{matrix}$ etc. correspondiren; im zweiten Fall die mit einander nach der gegebenen Verwandtschaft $\begin{matrix}f(u, v, t', w') = 0 \\ F(u, v, t', w') = 0\end{matrix}$ correspondirenden primitiven Elemente der Reihe $\psi(u, v) = 0$ und der analogen Elemente der Reihe $\chi(t', w') = 0$. Fügt man z. B. der Verwandtschaft $\begin{matrix}f(x, y, x', y') = 0 \\ F(x, y, x', y') = 0\end{matrix}$ die correspondirenden Bedingungen $\begin{matrix}x = 0 \\ y = 0\end{matrix}$ oder $\begin{matrix}x = \infty \\ y = \infty\end{matrix}$ hinzu, so bekommt man respective diejenigen Puncte der analogen Figur, welche mit dem im Coordinaten-Ursprunge befindlichen Punct der primitiven Figur, oder diejenigen, welche mit den im Unendlichen liegenden Puncten der primitiven correspondiren; welche letzgenannten Puncte der analogen Figur sich bei vielen Verwandtschaften jeder zu einer ganzen Curve ausbreiten; wie z. B. bei der *Collineation*, wo der einzige Punct sich zu einer Geraden, d. h. zu der sogenannten *Gegen-Axe* ausdehnt. Specialisirt man dagegen die gegebene Verwandtschaft $\begin{matrix}f(x, y, x', y') = 0 \\ F(x, y, x', y') = 0\end{matrix}$ durch die Bedingungen $\begin{matrix}x = 0 \\ x' = 0\end{matrix}$, so gelangt man durch die für y und y' gefundenen Werthe $\begin{matrix}y = \beta & y = \beta' \\ y' = \delta & y = \delta'\end{matrix}$ etc. zur Kenntniss derjenigen Eigenschaft der gegebenen Verwandtschaft, nach welcher es auf der Coordinaten-Axe YY' keine andern Puncte der primitiven giebt, deren entsprechende sich auf der nämlichen Axe YY' befänden, als gerade die gefundenen Puncte $\begin{matrix}x = 0 & x = 0 \\ y = \beta & y = \beta'\end{matrix}$ etc. denen respective die Puncte $\begin{matrix}x' = 0 & x' = 0 \\ y' = \delta & y' = \delta'\end{matrix}$ etc. entsprechen. Specialisirt man die gegebene Verwandtschaft $\begin{matrix}f(r, \varphi, r', \varphi') = 0 \\ F(r, \varphi, r', \varphi') = 0\end{matrix}$ durch die Bedingungen $\begin{matrix}r = \infty \\ r' = \infty\end{matrix}$, so bekommt man die im Unendlichen liegenden, einander entsprechenden Puncte beider Figuren, d. h. man gelangt durch die für φ und φ' gefundenen Werthe zur Kenntniss derjenigen Richtung, welche

ein asymptotischer Zweig der primitiven Curve haben soll, damit er nach der gegebenen Verwandtschaft mit einem asymptotischen Zweige der analogen correspondiren könne.

Unter den zur Untersuchung einer gegebenen Verwandtschaft $\begin{matrix} f(u,v,t',w')=0 \\ F(u,v,t',w')=0 \end{matrix}$ ihr zuzufügenden Specialisirungs-Bedingungen ist wohl eine der einfachsten das Gleichungs-Paar

$$u \pm t' = 0$$
$$v \pm w' = 0.$$

Diese Specialisirungen werden insbesondere bei homoelementischen Coordinatensystemen interessant. Fügt man z. B. der gegebenen Verwandtschaft, je nachdem sie unter den Formen

$$\begin{matrix} f(x, y, x', y') = 0 \\ F(x, y, x', y') = 0 \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} f(r, \varphi, r', \varphi') = 0 \\ F(r, \varphi, r', \varphi') = 0 \end{matrix}$$

begriffen ist, die Specialirungen

$$\begin{matrix} x + x' = 0 \\ y + y' = 0 \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} r + r' = 0 \\ \varphi + \varphi' = 0 \end{matrix}$$

hinzu, so bekommt man in beiden Fällen diejenigen correspondirenden Puncte der primitiven und der analogen Figur, deren gegenseitige Entfernung vom Coordinaten-Ursprunge halbirt wird. Wichtiger noch als die Specialisirungen

$$\begin{matrix} u + u' = 0 \\ v + v' = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} u + u' = 0 \\ v - v' = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} u - u' = 0 \\ v + v' = 0 \end{matrix}$$

ist diejenige

$$u - u' = 0$$
$$v - v' = 0,$$

welche aus den nach der gegebenen Verwandtschaft $\begin{matrix} f(u, v, u', v') = 0 \\ F(u, v, u', v') = 0 \end{matrix}$ correspondirenden Elementen beider Figuren diejenigen heraushebt, welche einander gegenseitig *bedecken*, d. h. welche diejenigen Elemente der primitiven Figur kennen lehrt, die bei der Transformation der primitiven in die ihr nach der gegebenen Verwandtschaft analoge Figur sich nicht von ihrer Stelle fortbewegen. Sind alsdann uv und $u'v'$ Systeme gewöhnlicher Parallelcoordinaten, und zwar, weil sie homoelementisch sind, mit einerlei Einheits-Länge und mit den nämlichen Coordinaten-Axen, oder sind sie Polar-Coordinaten, oder irgend eine andere Art homoelementischer Punctencoordinaten, so erhält man durch diese Specialisirung die von *Magnus* und *Plücker Situationspuncte* benannten Puncte. In conse-

quenter Weise wollen wir überhaupt die aus einer zwischen homoelementischen Coordinaten ausgedrückten Verwandtschaft durch die Specialisirung $\begin{matrix} u = u' \\ v = v' \end{matrix}$ sich ergebenden Elemente *Situations-Elemente* der Verwandtschaft $\begin{matrix} f(u, v, u', v') = 0 \\ F(u, v, u', v') = 0 \end{matrix}$ nennen.

Die vier, die Situations-Elemente einer Verwandtschaft bestimmenden Gleichungen

$$f(u, v, u', v') = 0 \qquad F(u, v, u', v') = 0 \qquad u = u' \qquad v = v'$$

lassen sich, wenn man aus den beiden letzten die Werthe von u' und v' in die beiden ersten substituirt, unmittelbar auf die beiden Gleichungen

$$f(u, v, u, v) \equiv \psi(u, v) = 0 \quad \text{und} \quad F(u, v, u, v) \equiv \chi(u, v) = 0$$

reduciren, und sind daher auch als die *Durchschnittspuncte* der Curven $\psi(x,y)=0$ und $\chi(x, y) = 0$, oder überhaupt als die den beiden Curven $\psi(u, v) = 0$ und $\chi(u, v) = 0$ *gemeinschaftlichen* Elemente zu betrachten. Da nun aber, wenn die Functionen f und F, in Bezug auf alle vier Coordinaten x, y, x', y', respective algebraische Functionen vom p^{ten} und q^{ten} Grade sind, auch die Functionen ψ und χ in Bezug auf die beiden Coordinaten x, y respective den p^{ten} und q^{ten} Grad haben, und daher die Curven vom p^{ten} und q^{ten} Grade $\psi(x, y) = 0$ und $\chi(x, y) = 0$ einander in $p \times q$ Puncten durchschneiden, so folgt, dass eine Verwandtschaft, deren eine Gleichung in Bezug auf alle oder einige Coordinaten vom p^{ten} Grade, die andere vom q^{ten} Grade ist, im Allgemeinen $p \times q$ reelle oder imaginäre *Situations-Elemente* hat. Die Situationspuncte, z. B. der Verwandtschaft $\begin{matrix} xx' = 1 \\ yy' = 1 \end{matrix}$, wo $p = q = 2$ ist, sind die Durchschnitte der sich auf zwei Systeme zweier Geraden reducirenden Kegelschnitte $\begin{matrix} x^2 = 1 \\ y^2 = 1 \end{matrix}$ und daher die $2\times2=4$ Puncte:

$$\begin{matrix} x = +1 & x = +1 & x = -1 & x = -1 \\ y = +1 & y = -1 & y = +1 & y = -1. \end{matrix}$$

Es vermindert sich aber, wie oben bemerkt, die Anzahl der eigentlichen $p\times q$ Durchschnittspuncte zweier Curven vom p^{ten} und q^{ten} Grade $\psi(x, y) = 0$ und $\chi(x, y) = 0$ um eine, oder um mehr als eine Einheit, wenn eine oder mehr als eine Asymptote der Curve $\psi(x, y) = 0$ mit einer, oder mehr als einer Asymptote der Curve $\chi(x, y) = 0$ parallel läuft, und daher ein oder mehr als einer von den $p \times q$ Durchschnittspuncten sich vom Coordinaten-Ursprung unendlich entfernt und gewissermaassen seine Existenz als Durchschnittspunct verliert. Es haben

daher auch diejenigen Verwandtschaften, von deren $p \times q$ Situationspuncten einer, oder mehr als einer, im Unendlichen liegen, meistens weniger als $p \times q$ eigentliche *Situationspuncte.*

Ein Beispiel giebt die *Collineation.* Es hat nämlich die Collineation mit allen in der allgemeinen Form

$$ax^2 + by^2 + cx'^2 + dy'^2 + exy + fxx' + gxy' + hyx' + jyy' + kx'y' + \ldots$$
$$\ldots + lx + my + nx' + py' + 1 = 0$$
$$Ax^2 + By^2 + Cx'^2 + Dy'^2 + Exy + Fxx' + Gxy' + Hyx' + Iyy' + Kx'y' + \ldots$$
$$\ldots + Lx + My + Nx' + Py' + 1 = 0$$

enthaltenen Verwandtschaften den Besitz von vier reellen oder imaginären Situationspuncten gemein. Da jedoch die Coefficienten $f, g \ldots F, G \ldots$ etc. der Gleichungen

$$fxx' + gxy' + hyx' + jyy' + lx + my + nx' + py' + 1 = 0$$
$$Fxx' + Gxy' + Hyx' + Iyy' + Lx + My + Nx' + Py' + 1 = 0,$$

wenn sie die Collineation darstellen sollen, nicht alle 16 von einander unabhängig sein mögen, indem durch 8 Bedingungen schon die Collineation ganz bestimmt wird, so sind die beiden, die vier Situationspuncte einer willkührlichen Collineation durch ihre vier Durchschnittspuncte darstellenden Kegelschnitte nicht zwei willkürliche Kegelschnitte, sondern zwei solche, zwischen welchen eine gewisse gegenseitige Beziehung Statt findet; und zwar die, dass eine der beiden Asymptoten-Richtungen beiden Kegelschnitten gemein ist. Von den vier Durchschnittspuncten beider Kegelschnitte liegt daher immer einer im Unendlichen; weshalb denn auch einer der vier Situationspuncte der allgemeinen Collineation sich immer in unendlicher Entfernung vom Coordinaten-Ursprunge befindet. Da nun aber dieser vierte Situationspunct, während er sich unendlich entfernt, seine Existenz gewissermaassen verloren hat, so kann man auch wohl, mit *Plücker,* (System der anslytischen Geometrie S. 56) und mit *Seydewitz* (*Grunert's* Archiv Bd. 8. S. 25) der Collineation nur drei Situationspuncte zuerkennen.

Betrachtet man, um die Natur des vierten Situationspuncts genauer zu ergründen, die die allgemeine Collineation ausdrückenden Gleichungen

$$x' = \frac{ax + by + c}{dx + ey + 1} \quad \text{und} \quad y' = \frac{gx + hy + j}{dx + ey + 1},$$

so bekommt man für diejenigen Puncte der primitiven Figur, deren entsprechende die Coordinaten-Werthe $\begin{matrix} x' = \infty \\ y' = \infty \end{matrix}$ haben sollen, die sogenannte Gegen-Axe

$dx + ey + 1 = 0$. Betrachtet man die nämliche Collineation unter der anderen Form:

$$x = \frac{(ey' - h)(x' - c) - (ex' - b)(y' - j)}{(ex' - b)(dy' - g) - (ey' - h)(dx' - a)} \text{ und}$$

$$y = \frac{(dx' - a)(y' - j) - (dy' - g)(x' - c)}{(ex' - b)(dy' - g) - (ey' - h)(dx' - a)},$$

so bekommt man für diejenigen Puncte der analogen Figur, welche den im Unendlichen liegenden Puncten der primitiven Figur entsprechen, die Gleichung der andern Gegen-Axe

$$(dh - ge)x' + (ae - bd)y' + (bg - ah) = 0,$$

welche im Allgemeinen der vorigen Gegen-Axe nicht parallel ist. Es hat also derjenige Punct der primitiven Figur, welcher den Bedingungen $\begin{matrix} x = \infty \\ y = \infty \end{matrix}$ und $dx + ey + 1 = 0$ zugleich genügt, d. h. die Spitze der Gegen-Axe $dx + ey + 1 = 0$, die den Bedingungen $(dh - ge)x' + (ae - bd)y' + (bg - ah) = 0$ und $\begin{matrix} x' = \infty \\ y' = \infty \end{matrix}$ zugleich genügende Spitze der andern Gegen-Axe zu ihrem analogen Puncte; jeder andere dagegen, im Unendlichen liegende Punct der primitiven Figur hat irgend einen nicht im Unendlichen liegenden Punct der Geraden

$$(dh - ge)x' + (ae - bd)y' + (bg - ah) = 0$$

zum Correspondenten. Es giebt daher bei der Collineation keinen im Unendlichen liegenden Punct der primitiven Figur, dem die den eigentlichen Situationspuncten eigene totale Unveränderlichkeit der Lage bei der Transformation der primitiven in die analoge Figur zukäme, sondern es giebt alsdann auf der Spitze der Geraden $dx + ey + 1 = 0$ einen gewissen Punct der primitiven Figur, welcher, wenn gleich er sich nach der Spitze der andern Gegen-Axe fortbewegt, doch insofern ein Situationspunct genannt werden kann, als er stets im Unendlichen sich befindet, d. h. weil seine Coordinaten $\begin{matrix} x = \infty \\ y = \infty \end{matrix}$ die nämlichen sind; wenigstens die durch den nämlichen analytischen Ausdruck dargestellten Werthe $\begin{matrix} x' = \infty \\ y' = \infty \end{matrix}$ behalten. Fragt man daher, welche die Lage des vierten Situationspuncts der allgemeinen Collineation

$$x' = \frac{ax + by + c}{dx + ey + 1} \qquad y' = \frac{gx + hy + j}{dx + ey + 1}$$

sei, so geben die analytischen Formeln einander *widersprechende* Antworten. Je nachdem man nämlich von dieser Form der Collineation, oder von der die x

und y in x' und y' ausdrückenden Form der nämlichen Verwandtschaft ausgeht, bekommt man für die gesuchte Lage eine unendliche Entfernung vom Coordinaten-Ursprunge: entweder in derjenigen Richtung, welche von der Richtung der Coordinaten-Axe XX' um den Winkel arc. tg. $\left(-\frac{d}{e}\right)$ abweicht, oder in derjenigen, welche mit der Richtung der XX' den Winkel arc. tg. $\left(\frac{ge-dh}{ae-bd}\right)$ macht.

Alle *Situations-Elemente* einer beliebigen Transformation D, welche die primitive Figur, je nachdem sie die Figur A, oder die Figur C ist, entweder in C oder in H sich verändern lässt, sind zugleich Situations-Elemente der Transformation $2D$, wodurch die Figur A in H übergeht. Es hat aber die neue Verwandtschaft $2D$ im Allgemeinen noch andere, der D nicht angehörige Situations-Elemente. Denn es sei die Verwandtschaft D durch die Gleichungen

$$u' = \varphi(u, v)$$
$$v' = F(u, v)$$

gegeben, so wird jedes Werthen-Paar $\begin{matrix} u = \alpha \\ v = \beta \end{matrix}$, welches den Gleichungen $\begin{matrix} u = \varphi(u, v) \\ v = F(u, v) \end{matrix}$ genügt, die Gleichungen

$$u' = \varphi[\varphi(u, v), F(u, v)]$$
$$v' = F[\varphi(u, v), F(u, v)]$$

auf $\begin{matrix} u' = \varphi(u, v) \\ v' = F(u, v) \end{matrix}$ und daher auch auf $\begin{matrix} u' = u \\ v' = v \end{matrix}$ reduciren, d. h. es wird auch den neuen Gleichungen

$$u = \varphi[\varphi(u, v), F(u, v)]$$
$$v = F[\varphi(u, v), F(u, v)]$$

genügen. Diese neuen Gleichungen sind aber, wenn φ und F algebraische rationale Functionen bezeichnen, im Allgemeinen von höheren Graden, als die vorigen $\begin{matrix} u = \varphi(u, v) \\ v = F(u, v) \end{matrix}$, und geben daher mehrere Werthe von u und v, d. h. mehrere Situations-Elemente der Verwandtschaft $2D$, als die durch die Gleichungen $\begin{matrix} u = \varphi(u, v) \\ r = F(u, v) \end{matrix}$ gegebenen der Verwandtschaft D. Es seien z. B. bei der Verwandtschaft D, ausser den Situationspuncten $\begin{matrix} x = \alpha \\ y = \beta \end{matrix}$ $\begin{matrix} x = \alpha' \\ y = \beta' \end{matrix}$ etc. ....., d. h. ausser den gar keine Ortsveränderung erleidenden Puncten der primitiven Figur, noch andere gewisse Puncte $\begin{matrix} x = \gamma \\ y = \delta \end{matrix}$ $\begin{matrix} x = \gamma' \\ y = \delta' \end{matrix}$, etc. ..... vorhanden, welche beim Uebergange der primitiven in die analoge Figur nach den Oertern $\begin{matrix} x' = -\gamma \\ y' = -\delta \end{matrix}$

$x' = -\gamma'$
$y' = -\delta'$, etc. ..... sich fortbewegen, also eine halbe Umdrehung um den Coordinaten-Ursprung machen, so wird die Verwandtschaft $2D$ sowohl die Puncte $x = \alpha$, $y = \beta$ etc., als die Puncte $x = \gamma$, $y = \delta$ etc. zu ihren Situationspuncten haben. Es werden also im Allgemeinen die Situations-Elemente der $m$fachen und $n$fachen Transformationen

$$u' = \varphi[(\varphi \ldots\ldots \varphi[\varphi(u, v), F(u, v)], F[\varphi(u, v), F(u, v)] \ldots\ldots)]$$
$$v' = F[(\varphi \ldots\ldots \varphi[\varphi(u, v), F(u, v)], F(\varphi(u, v), F(u, v)] \ldots\ldots)]$$

nicht coïncidiren. Eine Ausnahme macht jedoch der Fall $m + n = 0$, z. B. wenn $m = +1$, $n = -1$ ist: denn die Situations-Elemente der Verwandtschaft $+D$ oder $f(u, v, u', v') = 0$, $F(u, v, u'. v') = 0$ sind alle mit denen der Verwandtschaft $-D$ oder $f(u', v', u, v) = 0$, $F(u', u', u, v) = 0$ identisch, weil beide durch das nämliche Paar Gleichungen $f(u, v, u, v) = 0$, $F(u, v, u, v) = 0$ gefunden werden.

Diese Identität der Situations-Elemente zweier entgegengesetzter Transformationen findet auch dann noch Statt, wenn jede eine aus der Nacheinander-Folge zweier Transformationen zusammengesetzte doppelte Transformation ist. Lässt man z. B. der Transformation $+D$, welche eine primitive Figur A in C ändert, die die Figur C in G ändernde Transformation $+E$ folgen, so hat die hieraus entstehende, die A in G ändernde doppelte Transformation $+D+E$ die nämlichen Situations-Elemente, wie die entgegengesetzte, die G in A ändernde Transformation $-(+D+E)$ oder $-E-D$; und überhaupt coïncidiren die Situations-Elemente der vier Transformationen $\pm D \pm E$ respective mit denen der vier entgegengesetzten Transformationen $\mp E \mp D$. Ueberdiess sind die nämlichen vier Elementen-Gruppen zwar nicht immer, aber doch bei vielen Verwandtschaften, mit den den vier Verwandtschafts-Paaren $\pm D$ und $\mp E$ gemeinschaftlichen Elementen respective identisch. Denn es seien die Transformationen $+D$ und $+E$ respective durch die Gleichungen

$$u' = \varphi(u, v) \quad v' = \chi(u, v) \qquad \text{und} \qquad u' = \psi(u, v) \quad v' = F(u, v)$$

gegeben, so wird die doppelte Transformation $+D+E$, wenn man durch ϕ und J die den Functionen ψ und F entgegengesetzter Functionen bezeichnet, durch die Gleichungen

$$u' = \phi[\varphi(u, v), \quad \chi(u, v)]$$
$$v' = \mathit{J}[\varphi(u, v), \quad \chi(u, v)]$$

ausgedrückt, so dass im Allgemeinen die die Durchschnitts-Elemente der Verwandtchaften $+D$ und $+E$ ausdrückenden Gleichungen

$$\psi(u, v) = u' = \varphi(u, v)$$
$$F(u, v) = v' = \chi(u, v)$$

mit den die Situations-Elemente der Verwandtschaft $+D-E$ bezeichnenden Gleichungen

$$u = \phi[\varphi(u, v), \chi(u, v)]$$
$$v = \mathit{J}[\varphi(u, v), \chi(u, v)]$$

nicht identisch sind, sondern andere Werthe der u und v, d. h. andere Elemente geben. Wären z. B. die Verwandtschaften $+D$ und $-E$ zwei allgemeine Collineationen

$$x' = \frac{ax+by+c}{dx+ey+1} \quad \text{und} \quad x' = \frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{\delta x+\varepsilon y+1}$$
$$y' = \frac{gx+hy+j}{dx+ey+1} \quad \text{und} \quad y' = \frac{\tau x+\vartheta y+\varkappa}{\delta x+\varepsilon y+1},$$

so sind bekanntlich die Verwandtschaften $-E$ und $+D-E$ zwei neue Collineationen. Da aber von den vier Situationspuncten einer beliebigen Collineation $+D-E$ der eine immer ein im Unendlichen liegender uneigentlicher Situationspunct ist, so sind die Situations-Elemente der Verwandtschaft $+D-E$ und die nach den Verwandtschaften $+D$ und $+E$ gemeinschaftlich correspondirenden Elemente in dem Beispiel im Allgemeinen nicht identisch, weil diejenigen vier Puncte der primitiven Figur, welche durch die collineäre Transformation $+D$ in die nämlichen Puncte der analogen Figur, wie durch die Collineation $+E$ sich ändern, die vier im Allgemeinen nicht im Unendlichen liegenden Durchschnittspuncte zweier allgemeiner Kegelschnitte sind.

Ein Beispiel dagegen von zwei solchen Verwandtschaften $+D$ und $+E$, bei welchen die Situations-Elemente der Verwandtschaft $+D-E$ mit den Durchschnitts-Elementen der Verwandtschaften $+D$ und $+E$ coïncidiren, geben die beiden Verwandtschaften

$$\begin{aligned} x' &= ax+by \\ y' &= cx+dy \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} x' &= ex^2+fy^2 \\ y' &= gx^2+hy^2. \end{aligned}$$

Es folgt daraus für die Verwandtschaft $-E$:

$$x = \sqrt{\frac{hx'-fy'}{he-fg}}, \qquad y = \sqrt{\frac{ey'-gx'}{he-fg}},$$

und daher für die Verwandtschaft $+D-E$:

$$x' = \sqrt{\frac{h(ax+by)-f(cx+dy)}{he-fg}} = \sqrt{\frac{(ha-fc)x+(hb-fd)y}{he-fg}}$$
$$'y = \sqrt{\frac{e(cx+dy)-g(ax+by)}{he-fg}} = \sqrt{\frac{(ec-ga)x+(ed-gb)y}{he-fg}}.$$

Es werden nun diejenigen Puncte der primitiven Figur, welche nach den Verwandtschaften $+D$ und $+E$ mit den nämlichen Puncten der analogen Figur correspondiren, gefunden, wenn man in den Gleichungen

$$\begin{aligned} ax+by &= ex'^2+fy'^2 \\ cx+dy &= gx'^2+hy'^2 \end{aligned} \quad \text{d. h. in} \quad x' = \sqrt{\frac{h(ax+by)-f(cx+dy)}{he-fg}}$$
$$y' = \sqrt{\frac{e(cx+dy)-g(ax+by)}{he-fg}}$$

die Accente weglässt: also durch die nämlichen zwei Gleichungen, welche auch die Situationspuncte der Verwandtschaft $+D-E$ geben.

Zu den Verwandtschaften $+D$ und $+E$, bei welchen die nach den Verwandtschaften $\pm D$ und $\pm E$ gemeinschaftlich correspondirenden Elemente respective mit den Situations-Elementen der Verwandtschaften $\pm D \mp E$ und daher auch mit den der Verwandtschaften $\pm E \mp D$ coïncidiren, gehören alle Verwandtschaften von der Form

$$\begin{aligned} u' &= \varphi(u) \\ v' &= \chi(v) \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} u' &= \psi(u) \\ v' &= F(v); \end{aligned}$$

was sogleich erhellet, wenn man in den die Situations-Elemente der $+D-E$ bestimmenden Gleichungen

$$u = \phi[\varphi(u)] \qquad v = \mathit{J}[X(v)]$$

die entgegengesetzten Functionen ϕ und J nach der andern Seite hinüberschafft und sie daher auf die Form

$$\psi(u) = \varphi(u) \qquad F(v) = \chi(v)$$

bringt, indem aus eben diesen Gleichungen auch die nach den Verwandtschaften $+D+E$ in die nämlichen Elemente der analogen sich ändernden Elemente der primitiven Figur gefunden werden.

Folgendes ist ein Beispiel solcher Coïncidenz. Es sei die Transformation $+D$ eine von dem Puncte A (Fig. 10), dessen Coordinaten s und s' sein mögen, ausgehende $e$malige Vergrösserung, und es sei daher $+D$ durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} x'-s &= e(x-s) \\ y'-s' &= e(y-s') \end{aligned} \quad \text{d. h.} \quad \begin{aligned} x' &= ex-(e-1)s \\ y' &= ey-(e-1)s' \end{aligned}$$

ausgedrückt, während $+\varepsilon$ eine vom Vergrösserungs-Centrum B oder $\begin{matrix} x = r \\ y = r' \end{matrix}$ ausgehende und durch

$$x' = fx - (f-1)r$$
$$y' = fy - (f-1)r'$$

ausgedrückte $f$malige Vergrösserung der primitiven Figur bedeutet. Soll nun p derjenige Punct der primitiven Figur sein, welcher mit seinem Analogon das Puncten-Paar darstellt, deren gegenseitige Correspondenz den Aehnlichkeiten $+D$ und $+E$ gemein ist: so müssen die dem Puncte p, entweder vom Puncte A aus, oder von B aus gegebene Vergrösserungs-Bewegungen pl und pk identisch sein; d. h. es müssen die Puncte l und k den nämlichen Punct darstellen. Eben so ist eine gegenseitige Bedeckung der Puncte l und n, oder q und p, oder q und n nöthig, wenn der Punct p mit dem analogen Puncte der andern Figur das dem Verwandtschafts-Paare $\begin{matrix} +D \\ -E \end{matrix}$ oder $\begin{matrix} -D \\ +E \end{matrix}$ oder $\begin{matrix} -D \\ -E \end{matrix}$ gemeinschaftliche Element darstellen soll. Soll dagegen der Punct p der Situationspunct der Aehnlichkeit $-D-E$ sein, so muss der im Puncte p liegende Punct der primitiven Figur, nachdem er Anfangs die von A ausgehende Verkleinerung $-D$ erfahren und sich nach q fortbewegt hat, nachher aber, wegen der von B ausgehenden Verkleinerung $-E$, von q nach m hinübergegangen ist, einen solchen Punct der analogen Figur darstellen, der gleichfalls in p sich befindet; d. h. es müssen die Puncte p und m *auf einander fallen.* Eben so ist, soll der Punct p der Situationspunct der Aehnlichkeit $-E-D$, oder der Aehnlichkeit $+E-D$, oder der $+D+E$ etc. sein, dazu die Erfüllung der Bedingung nothwendig, dass der Punct p respective mit dem Puncte r, oder g, oder h etc. coïncidire.

Fallen nun aber die Puncte k und l, d. h. die Bewegungen pk und pl, *zusammen,* so müssen (den Fall, dass der Punct p sich unendlich entfernt, ausgenommen) die Geraden Bpk und Apl einander decken; d. h. beide müssen die Gerade $aABb$ darstellen; also muss sich der Punct p irgendwo in der Geraden $aABb$ befinden. Fallen dagegen die Puncte p und m, d. h. die Bewegungen qp und qm *zusammen,* so müssen die Geraden Aqp und Bmq im Allgemeinen sich auf der Geraden $aABb$ vereinigen; mithin muss der Punct q, und daher auch wiederum der Punct p, sich auf der Geraden $aABb$ befinden. Es erhellet hieraus, dass alle betrachteten Situationspuncte und gemeinschaftlich correspondirenden Punctenpaare im Allgemeinen auf der Geraden $aABb$ sich befinden. Und zwar findet man die Lage des ersten jener Puncte, entweder wenn man ihn als den primitiven Punct des nach den Verwandtschaften $+D$ und $+E$ gemein-

schaftlich correspondirenden Punctenpaars betrachtet, d. h. wenn man seine Coordinaten x und y aus den Gleichungen

$$ex-(e-1)s=fx-(f-1)r \text{ und } ey-(e-1)s'=fy-(f-1)r'$$

entwickelt, oder wenn man ihn als den Situationspunct der Verwandtschaft $+D-E$ oder $+E-D$ betrachtet, d. h. wenn man den Transformationen $+D$ und $+E$ respective die Transformationen $-E$ und $-D$, nemlich

$$x'=\left(\frac{1}{f}\right)x-\left(\frac{1}{f}-1\right)r=\frac{x+(f-1)r}{f} \qquad x'=\frac{x+(e-1)s}{e}$$
$$\text{und}$$
$$y'=\left(\frac{1}{f}\right)y-\left(\frac{1}{f}-1\right)r'=\frac{y+(f-1)r'}{f} \qquad y'=\frac{y+(e-1)s'}{e}$$

hinzufügt und alsdann aus den von ihren Accenten befreiten Ausdrücken

$$x=\frac{[ex-(e-1)s]+(f-1)r}{f} \qquad x=\frac{[fx-(f-1)r]+(e-1)s}{e}$$
$$\text{und}$$
$$y=\frac{[ey-(e-1)s']+(f-1)r'}{f} \qquad y=\frac{[fy-(f-1)r]+(e-1)s'}{e}$$

der Transformationen $+D-E$ oder $+E-D$ die Werthe der Coordinaten x und y ableitet. Auf alle drei Arten bekommt man für den gesuchten Punct die Lage

$$x=\frac{(e-1)s+r(1-f)}{e-f}, \qquad y=\frac{(e-1)s'+r'(1-f)}{e-f}$$

Und eben so findet sich, dass die Puncte

$$x=\frac{fs(e-1)+er(1-f)}{e-f}, \qquad y=\frac{fs'(e-1)+er'(1-f)}{e-f}$$
$$x=\frac{fs(e-1)+r(f-1)}{ef-1}, \qquad y=\frac{fs'(e-1)+r'(f-1)}{ef-1}$$
$$x=\frac{s(e-1)+er(f-1)}{ef-1}, \qquad y=\frac{s'(e-1)+er'(f-1)}{ef-1}$$

respective die Situationspuncte der Verwandtschaften

$$\pm(-D+E), \qquad \pm(+D+E), \qquad \pm(-D-E),$$

d. h. die von jeder von den beiden Verwandtschaften

$$\begin{matrix} -D & , & +D & , & -D \\ -E & , & -E & , & +E \end{matrix}$$

in gleicher Weise afficirten Puncte der primitiven Figur sind.

Utrecht im Juli 1850.

12.

Ueber die Factorielle

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots k},$$

in welcher die Basis m eine complexe Zahl von der Form $p+qi$ und i die imaginäre Einheit ist, p und q aber reelle Zahlen bezeichnen; desgleichen über einige bestimmte Integrale, die mit derselben im Zusammenhang stehen.

(Von Herrn Prof. Dr. *Raabe* zu Zürich.)

(Aus einer Jubelschrift der dortigen naturforschenden Gesellschaft.)

1.

Zufolge der in der Ueberschrift angegebenen Bedeutung der Factorielle $\binom{m}{k}$ ist

$$(1.)\qquad \binom{p+qi}{k} = \frac{(p+qi)(p-1+qi)(p-2+qi)\ldots(p-k+1+qi)}{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots k}.$$

Vollzieht man das Product rechts vom Gleichheitszeichen, sondert die rellen von den imaginären Theilen, stellt dann erstere der Kürze wegen durch P_k und letztere durch Q_k vor, so dass

$$(1'.)\qquad \binom{p+qi}{k} = \frac{P_k + Q_k i}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}$$

ist, wo nunmehr P_k und Q_k reelle Grössen sind, so ist es die nächste und wesentliche Aufgabe: die Grössen P_k und Q_k zu finden.

Zu einer Bestimmungsgleichung dieser Grössen, die von der imaginären Einheit frei ist, gelangt man auf folgendem einfachen Wege.

Da man die Gleichung

(2.) $P_k + Q_k i = (p + qi)(p - 1 + qi)(p - 2 + qi) \ldots\ldots (p - k + 1 + qi)$

hat, so hat man durch die Annahme, i gehe $-i$ über, auch folgende:

(3.) $P_k - Q_k i = (p - qi)(p - 1 - qi)(p - 2 - qi) \ldots\ldots (p - k + 1 - qi)$.

Multiplicirt man die homologen Theile dieser Gleichungen mit einander, so ergiebt sich

(4.) $P_k^2 + Q_k^2 = (p^2 + p^2)((p-1)^2 + q^2)((p-2)^2 + q^2) \ldots\ldots ((p-k+1)^2 + q^2)$;

welches die angekündigte Gleichung ist.

2.

Zur Bestimmung von P_k und Q_k können auch Recursionsgleichungen aufgestellt werden, die wir, ehe wir zu den directen Bestimmungen dieser Grössen übergehen, mittheilen wollen.

Es besteht für jeden ganzen, nicht negativen Zahlenwerth von k die identische Gleichung

$$P_{k+1} + Q_{k+1} i = (P_k + Q_k i)(p - k + qi).$$

Verrichtet man hier rechts die angedeutete Multiplication und setzt die reellen den reellen und die imaginären den imaginären Theilen gleich, so ergeben sich folgende zwei Recursionen:

(5.) $P_{k+1} = (p - k) P_k - q Q_k$, $\quad Q_{k+1} = (p - k) Q_k + q P_k$.

Lässt man in jeder dieser Gleichungen k in $k + 1$ übergehen und nimmt bei jeder die andere zur Hülfe, so bieten sich folgende Gleichungen dar:

$$P_{k+2} = (p - k - 1) P_{k+1} - q(p - k) Q_k - q^2 P_k ,$$
$$Q_{k+2} = (p - k - 1) Q_{k+1} + q(p - k) P_k - q^2 Q_k .$$

Verbindet man die erste mit der ersten der vorhergehenden durch Elimination von Q_k, und eben so die zweiten dieser Gleichungen durch Elimination von P_k, so stellen sich folgende gesonderte Recursionen dar:

(6.) $$\begin{cases} P_{k+2} - (2(p - k) - 1) P_{k+1} + ((p - k)^2 + q^2) P_k = 0 , \\ Q_{k+2} - (2(p - k) - 1) Q_{k+1} + ((p - k)^2 + q^2) Q_k = 0 . \end{cases}$$

Diese zwei Gleichungen werden, wenn für k nach und nach $1, 2, 3, \ldots\ldots k-2$ gesetzt wird, P_k in derselben Weise durch P_1 und P_2, wie Q_k durch Q_1 und Q_2

darstellen. Erwägt man aber die gegenseitige Verschiedenheit der letztgenannten Grössenpaare, dass nämlich:

$$P_1 = p \quad , \quad P_2 = p(p-1) - q^2 ,$$
$$Q_1 = q \quad , \quad Q_2 = 2pq - 1$$

ist: so zeigt sich die gegenseitige Verschiedenheit der aus den Recursionen in (6) zu erwartenden Endbestimmungen für P_k und Q_k, welche, wenn k in der ganzen Allgemeinheit einer positiven und ganzen Zahl auftritt, schon a priori erkannt und auch aus den in der zweitfolgenden Nummer mitzutheilenden Endergebnissen unzweideutig hervorgehen wird.

3.

Durch das bekannte Verfahren, eine algebraische, echtgebrochene und rationale Function von x in Partialbrüche aufzulösen, kann der Bruch

$$\frac{f(x)}{(x+1)(x+2)(x+3)\ldots\ldots(x+r)},$$

wo $f(x)$ eine ganze rationale Function von x bezeichnet, deren Grad kleiner als r ist und die keinen der Factoren des Nenners enthält, in eine algebraische Summe von Brüchen aufgelöset werden, deren Nenner die einzelnen linearen Factoren des Nenners des vorgelegten Bruchs sind. Damit befassen wir uns in der vorliegenden Nummer, worauf wir in der nächstfolgenden dem in Rede stehenden Gegenstande uns zuwenden werden.

Stellt man die Summe besagter Partialbrüche folgendermassen dar:

$$\frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{x+2} + \frac{A_3}{x+3} + \ldots\ldots \frac{A_\lambda}{x+\lambda} + \ldots\ldots \frac{A_r}{x+r},$$

so ist die allgemeine Constante A_λ zu ermitteln, um dann für $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, $\lambda = 3$, $\ldots\ldots$ $\lambda = r$ die sämmtlichen Constanten A_1, A_2, A_3, $\ldots\ldots$ A_r zu finden.

Zur Bestimmung dieser allgemeinen Constante dient nach dem bekannten Verfahren die Gleichung:

$$f(-\lambda) = (-\lambda+1)(-\lambda+2)\ldots(-\lambda+\lambda-1)(-\lambda+\lambda+1)(-\lambda+\lambda+2)\ldots(-\lambda+r)A_\lambda,$$

oder auch:

$$f(-\lambda) = (-1)^{\lambda-1}\, 1.2.3\ldots\ldots(\lambda-1).1.2.3\ldots\ldots(r-\lambda)A_\lambda,$$

welche mit folgender Gleichung gleichbedeutend ist:

$$f(-\lambda) = (-1)^{\lambda-1}\, \frac{1.\quad 2.\quad 3\ldots\ldots(r-1)}{(r-1)(r-2)(r-3)\ldots\ldots\lambda}\, .1.2.3\ldots\ldots(r-\lambda)A_\lambda,$$

oder auch mit folgender:

$$f(-\lambda) = (-1)^{\lambda-1} \cdot \frac{1.2.3.4.....(r-1)}{\binom{r-1}{r-\lambda}} A_\lambda .$$

Bezeichnet man der Kürze wegen das Product $1.2.3.....(r-1)$ durch $G(r)$, so erhält man:

$$A_\lambda = \frac{(-1)^{\lambda-1}}{G(r)} \cdot \binom{r-1}{r-\lambda} f(-\lambda) ,$$

und der im Eingange vorgelegte Bruch stellt sich folgendermassen dar:

$$\frac{f(x)}{(x+1)(x+2)(x+3).....(x+r)} =$$

$$= \frac{1}{G(r)} \left\{ \frac{f(-1)}{x+1} - \binom{r-1}{1} \frac{f(-2)}{x+2} + \binom{r-1}{2} \frac{f(-3)}{x+3} \cdots (-1)^{r-1} \binom{r-1}{r-1} \frac{f(-r)}{x+r} \right\} .$$

Eine noch allgemeinere Zerlegung geschieht auf folgende Weise. Ist φ ein neues Functionszeichen, und setzt man

$$f(x) = \varphi(x-p) ,$$

wo p eine beliebige Constante ist, so ergeben sich folgende Gleichungen

$$f(-1) = \varphi(-1-p), \quad f(-2) = \varphi(-2-p), \ldots\ldots f(-r) = \varphi(-r-p).$$

Mittels derselben geht die vorhin gefundene Umstellungsgleichung in folgende über:

$$\frac{\varphi(x-p)}{(x+1)(x+2)(x+3).....(x+r)}$$

$$= \frac{1}{G(r)} \left\{ \frac{\varphi(-1-p)}{(x+1)} - \binom{r-1}{1} \frac{\varphi(-2-p)}{x+2} + \ldots\ldots (-1)^{r-1} \binom{r-1}{r-1} \frac{\varphi(-r-p)}{x+r} \right\} .$$

Lässt man hier x in $x+p$, p in $p-1$ übergehen, und ersetzt $\varphi(x)$ durch $f(x)$, so erhält man

$$(7.) \qquad \frac{f(x)}{(x+p)(x+p+1)(x+p+2).....(x+p+r-1)}$$

$$= \frac{1}{G(r)} \left\{ \frac{f(-p)}{x+p} - \binom{r-1}{2} \frac{f(-p-1)}{x+p+1} + \binom{r-1}{2} \frac{f(-p-2)}{x+p+2} \cdots (-1)^{r-1} \binom{r-1}{r-1} \frac{f(-p-r+1)}{x+p+r-1} \right\} ;$$

welches die angekündigte allgemeinere Zerlegung und die obige für den speciellen Fall $p = 1$ giebt.

Dieses Ergebniss legen wir in der folgenden Nummer bei der directen Bestimmung von P_k und Q_k zum Grunde.

4.

Erklärt man in dem allgemeinen Ausdruck (7) die durch $f(x)$ bezeichnete Function von x einer Constante und zwar der positiven Einheit gleich, so geht sie in folgende über:

$$\frac{1}{(x+p)(x+p+1)(x+p+2)\ldots\ldots x+p+r-1)}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{G}(r)}\left\{\frac{1}{x+p} - \binom{r-1}{1}\frac{1}{x+p+1} + \binom{r-1}{2}\frac{1}{x+p+2}\ldots\ldots(-1)^{r-1}\binom{r-1}{r-1}\frac{1}{x+p+r-1}\right\}.$$

Ersetzt man nun x durch qi, p durch $p-k+1$ und r durch k, so erhält man, beachtend die Gleichungen (2 und 3 §. 1), folgende Bestimmungsgleichungen für P_k und Q_k:

$$\frac{1}{\mathrm{P}_k+\mathrm{Q}_k i} = \frac{1}{\mathrm{G}(k)}\left\{\frac{1}{p-k+1+qi} - \frac{\binom{k-1}{1}}{p-k+2+qi} + \frac{\binom{k-1}{2}}{p-k+3+qi}\ldots\ldots(-1)^{k-1}\frac{\binom{k-1}{k-1}}{p+qi}\right\},$$

$$\frac{1}{\mathrm{P}_k-\mathrm{Q}_k i} = \frac{1}{\mathrm{G}(k)}\left\{\frac{1}{p-k+1-qi} - \frac{\binom{k-1}{1}}{p-k+2-qi} + \frac{\binom{k-1}{2}}{p-k+3-qi}\ldots\ldots(-1)^{k-1}\frac{\binom{k-1}{k-1}}{p+qi}\right\}.$$

Werden diese zwei Gleichungen addirt und subtrahirt, so erhält man in gleicher Ordnung folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{2\mathrm{P}_k}{p_k+\mathrm{Q}_k^2} = \frac{2}{\mathrm{G}(k)}\left\{(p\text{-}k\text{+}1)\frac{1}{(p-k+1)^2+q^2} - (p-k\text{+}2)\frac{\binom{k-1}{1}}{(p-k+2)^2+q^2}\ldots\ldots(-1)^{-1}p\,\frac{\binom{k-1}{k-1}}{p^2+q^2}\right\},$$

$$\frac{2\mathrm{Q}_k i}{p_k^2+\mathrm{Q}_k^2} = \frac{2qi}{\mathrm{G}(k)}\left\{\frac{1}{(p-k+1)^2+q^2} - \frac{\binom{k-1}{1}}{(p-k+2)^2+q^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots(-1)^{k-1}\frac{\binom{k-1}{k-1}}{p^2+q^2}\right\}.$$

Stellt man der Kürze wegen die drei Gleichungen

$$(8.)\begin{cases} \Pi(p,q_k) = (p^2+q^2)\left((p-1)^2+q^2\right)\left((p-2)^2+q^2\right)\ldots\ldots\left((p-k+1)^2+q^2\right), \\ \varphi(p,q_k) = \frac{p}{p^2+q^2} - \binom{k-1}{1}\frac{p-1}{(p-1)^2+q^2} + \binom{k-1}{2}\frac{p-1}{(p-2)^2+q^2}\cdot(-1)^{k-1}\binom{k-1}{k-1}\frac{p-k+1}{(p-k+1)^2+q^2}, \\ \psi(p,q)_k = \frac{q}{p^2+q^2} - \binom{k-1}{1}\frac{q}{(p-1)^2+q^2} + \binom{k-1}{2}\frac{q}{(p-2)^2+q^2}\cdot(-1)^{k-1}\binom{k-1}{k-1}\frac{q}{(-k+1)^2+q^2} \end{cases}$$

auf, so ergiebt sich, beachtend die Gleichung (4) und die Bedeutung von $G(k)$, für die angekündigten Bestimmungsgleichungen:

$$(9.)\qquad \begin{cases} P_k = (-1)^{k-1}\dfrac{\Pi(p,q)_k\,\varphi(p,q)_k}{1.2.3.4\ldots\ldots(k-1)}, \\ Q_k = (-1)^{k-1}\dfrac{\Pi(p,q)^k\,\psi(p,q)_k}{1.2.3.4\ldots\ldots(k-1)}, \end{cases}$$

welche sämmtlichen Recursionen in (§. 2) genügen und die Ausgangs daselbst ausgesprochene Behauptung rechtfertigen.

Mit Zugrundelegung dieser Ergebnisse findet sich nach Gleichung (1'§.1):

$$(10.)\quad \binom{p+qi}{k} = (-1)^{k-1} k \frac{\Pi(p,q)_k}{1^2.2^2.3^2 \ldots .. k^2} \left\{ \varphi(p,q)_k + i\psi(p,q)_k \right\},$$

oder auch, beachtend die Gleichungen (4 und 9):

$$(11.)\quad \binom{p+qi}{k} = \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot \frac{\varphi(p,q)_k + i\psi(p,q)_k}{\varphi(p,q)_k^2 + \psi(p,q)_k^2};$$

so dass jede dieser zwei Gleichungen (10 und 11) die im Eingange von (§. 1) verlangte Umformung darstellt.

5.

Die im vorigen Paragraphen eingeführten Functionen von p und q sind auch durch bestimmte Integrale darstellbar, und umgekehrt können diese bestimmten Integrale auf besagte Functionen und mithin auf die in Rede stehende Factorielle gebracht werden; was wir in dieser und den folgenden Nummern zeigen wollen.

Es ist (S. meine Integral-Rechnung 159'.)

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \qquad \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

Aus diesen, für alle reellen Werthe von b, so wie für reelle und positive Werthe von a geltenden Ausdrücken ergeben sich leicht folgende:

$$\int_0^\infty e^{-qx} \binom{k-1}{k-r} \cos(p-k+r)x\, dx = \binom{k-1}{k-r} \frac{q}{(p-k+r)^2+q^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-qx} \binom{k-1}{k-r} \sin(p-k+r)x\, dx = \binom{k-1}{k-r} \frac{p-k+r}{(p-k+r)^2+q^2}.$$

Wenn hier für r nach und nach die ganzen Zahlenwerthe k, $k-1$, $k-2$, ... 2, 1 gesetzt werden, so gelangt man, beachtend die Gleichungen (8), zu folgenden Ausdrücken:

$$\psi(p,q)_k = \int_0^\infty e^{-qx} \left\{ \cos px - \binom{k-1}{1} \cos(p-1)x \ldots (-1)^{k-1} \binom{k-1}{k-1} \cos(p-k+1)x \right\} dx,$$

$$\varphi(p,q)_k = \int_0^\infty e^{-qx} \left\{ \sin px - \binom{k-1}{1} \sin(p-1)x \ldots (-1)^{k-1} \binom{k-1}{k-1} \sin(p-k+1)x \right\} dx;$$

und aus diesen leicht zu den beiden folgenden:

$$\psi(p, q)_k + i\varphi(p, q)_k$$
$$= \int_0^\infty e^{-qx} e^{pxi} \left\{ 1 - \binom{k-1}{1} e^{-xi} + \binom{k-1}{2} e^{-2xi} \cdots (-1)^{k-1} \binom{k-1}{k-1} e^{-(k-1)xi} \right\} dx ,$$

$$\psi(p, q)_k - i\varphi(p, q)_k$$
$$= \int_0^\infty e^{-qx} e^{-pxi} \left\{ 1 - \binom{k-1}{1} e^{xi} + \binom{k-1}{2} e^{2xi} \cdots\cdots (-1)^{k-1} \binom{k-1}{k-1} e^{(k-1)xi} \right\} dx ,$$

aus welchen sich durch Summation der Grössen innerhalb der Klammern die Ausdrücke

$$\psi(p, q)_k + i\varphi(p, q)_k = \int_0^\infty e^{-qx} e^{pxi} (1 - e^{-xi})^{k-1} dx ,$$

$$\psi(p, q)_k - i\varphi(p, q)_k = \int_0^\infty e^{-qx} e^{-pxi} (1 - e^{-xi})^{k-1} dx ,$$

oder auch die Ausdrücke:

$$\psi(p, q)_k + i\varphi(p, q)_k = (2i)^{k-1} \int_0^\infty e^{-qx} e^{(p - \frac{1}{2}(k-1))xi} (\sin \tfrac{1}{2}x)^{k-1} dx ,$$

$$\psi(p, q)_k + i\varphi(p, q)_k = (-2i^{k-1} \int_0^\infty e^{-qx} e^{(p - \frac{1}{2}(k-1))xi} (\sin \tfrac{1}{2}x)^{k-1} dx$$

ergeben.

Sondern wir nun die Fälle, wenn k eine gerade und wenn k eine ungerade Zahl ist, so ergeben sich durch Addition und Subtraction der Ergebnisse, falls überdies noch rechterhand der Gleichheitszeichen x durch $2x$ ersetzt wird, folgende vier Bestimmungen:

(12.) $$\varphi(p, q)_{2k} = (-1)^{k-1} 2^{2k} \int_0^\infty e^{-2qx} \cos(2p - 2k + 1)x \sin x^{2k-1} dx ,$$

(13.) $$\varphi(p, q)_{2k+1} = (-1)^k 2^{2k+1} \int_0^\infty e^{-2qx} \cos(2p - 2k)x \sin x^{2k} dx ,$$

(14.) $$\psi(p, q)_{2k} = (-1)^k 2^{2k} \int_0^\infty e^{-2qx} \sin(2p - 2k + 1)x \sin x^{2k-1} dx ,$$

(15.) $$\psi(p, q)_{2k+1} = (-1)^k 2^{2k+1} \int_0^\infty e^{2qx} \sin(2p - 2k)x \sin x^{2k} dx ,$$

Wird Dieses in die Gleichungen (10 und 11) eingeführt, so stellt sich, wie Eingangs dieser Nummer angekündigt, die Factorielle $\binom{p+qi}{k}$ durch be-

stimmte Integrale ausgedrückt dar, k mag gerade oder ungerade sein. Umgekehrt sind auch Integrale, wie die unmittelbar vorhergehenden, durch dergleichen Factoriellen angebbar; wie sich Dies in der folgenden Nummer zeigen wird.

6.

Aus der Gleichung (11 §. 4) ergeben sich, je nachdem die imaginäre Einheit i positiv oder negativ genommen wird, folgende zwei Bestimmungen:

$$(16.)\qquad \begin{cases} \varphi(p,q)_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{2k}\left\{\dfrac{1}{\binom{p-qi}{k}}+\dfrac{1}{\binom{p+qi}{k}}\right\}, \\ \psi(p,q)_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{2ki}\left\{\dfrac{1}{\binom{p-qi}{k}}-\dfrac{1}{\binom{p-qi}{k}}\right\}, \end{cases}$$

Je nachdem hier k gerade oder ungerade ist, geben die Gleichungen (12 bis 15 §. 5) folgende Integral-Ausdrücke:

$$\int_0^\infty e^{-2qx}\cos(2p-2k+1)x\sin x^{2k-1}\,dx = \frac{(-1)^k}{2k\cdot 2^{2k+1}}\left\{\frac{1}{\binom{p-qi}{2k}}+\frac{1}{\binom{p+qi}{2k}}\right\},$$

$$\int_0^\infty e^{-2qx}\sin(2p-2k+1)x\sin x^{2k-1}\,dx = \frac{i(-1)^k}{2k\cdot 2^{2k+1}}\left\{\frac{1}{\binom{p-qi}{2k}}-\frac{1}{\binom{p+qi}{2k}}\right\},$$

$$\int_0^\infty e^{-2qx}\cos(2p-2k)x\sin x^{2k}\,dx = \frac{i(-1)^{k-1}}{(2k+1)2^{2k+2}}\left\{\frac{1}{\binom{p-qi}{2k+1}}-\frac{1}{\binom{p+qi}{2k+1}}\right\},$$

$$\int_0^\infty e^{-2qx}\sin(2p-2k)x\sin x^{2k}\,dx = \frac{(-1)^k}{(2k+1)2^{2k+1}}\left\{\frac{1}{\binom{p-qi}{2k+1}}+\frac{1}{\binom{p+qi}{2k+1}}\right\},$$

Ersetzt man $2q$ durch a, dann in den beiden ersten Ausdrücken $2p-2k+1$ durch b und in den beiden letzten $2p-2k$ durch b, so stellen sich diese Ergebnisse auch folgendermaassen dar:

$$(17.)\quad \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\sin x^{2k-1}\,dx = \frac{(-1)^k}{2k\cdot 2^{2k+1}}\left\{\frac{1}{\binom{\frac{1}{2}(b-1)+k-\frac{1}{2}ai}{2k}}+\frac{1}{\binom{\frac{1}{2}(b-1)+k+\frac{1}{2}ai}{2k}}\right\},$$

$$(18.)\quad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\sin x^{2k-1}\,dx = \frac{i(-1)^k}{2k\cdot 2^{2k+1}}\left\{\frac{1}{\binom{\frac{1}{2}(b-1)+k-\frac{1}{2}ai}{2k}}-\frac{1}{\binom{\frac{1}{2}(b-1)+k+\frac{1}{2}ai}{2k}}\right\},$$

$$(19.)\quad \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\sin x^{2k}\,dx = \frac{i(-1)^{k-1}}{(2k+1)2^{2k+2}}\left\{\frac{1}{\binom{\frac{1}{2}b+k-\frac{1}{2}ai}{2k+1}}-\frac{1}{\binom{\frac{1}{2}b+h+\frac{1}{2}a^i}{2k+1}}\right\},$$

$$(20.)\quad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\sin x^{2k}\,dx = \frac{(-1)^k}{(2k+1)2^{2k+2}}\left\{\frac{1}{\binom{\frac{1}{2}b+k-\frac{1}{2}ai}{2k+1}}+\frac{1}{\binom{\frac{1}{2}b+k+\frac{1}{2}ai}{2k+1}}\right\};$$

was für alle nicht negativen Werthe von a, für alle reellen Werthe von b und für alle ganzen und positiven Werthe von k identisch gilt.

2.

Man hat ferner (S. m. Int.-R. 164) folgendes Integral:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{1-a^2x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\pi a\,.\,e^{-\frac{b}{a}},$$

oder, wenn a in $\frac{1}{a}$ übergeht, folgendes:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}\,.\,e^{-ab},$$

wo a und b positive reelle Grössen sind.

Aus dieser Gleichung lässt sich auch folgende ziehen:

$$\int_0^\infty \frac{a}{a^2+x^2}\cos bx\,.\,dx = \tfrac{1}{2}\pi\,.\,e^{-ab},$$

und wenn für a nach und nach $a-1,\quad a-2,\quad a-3\,\ldots\ldots\, a-k+1$ gesetzt wird und die Ergebnisse nach der Ordnung ihrer Folge mit

$$-\binom{k-1}{1},\quad \binom{k-1}{2},\quad -\binom{k-1}{3},\ \ldots\ldots\ (-1)^{k-1}\binom{k-1}{k-1}$$

multiplicirt werden, so giebt die Summe derselben und der eben aufgestellten den Ausdruck

$$\int_0^\infty \left\{\frac{a}{a^2+x^2}-\binom{k-1}{1}\frac{a-1}{(a-1)^2+x^2}+\ldots\ldots(-1)^{k-1}\binom{k-1}{k-1}\frac{a-k+1}{(a-k+1)^2+x^2}\right\}\cos bx\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi\left\{e^{-ab}-\binom{k-1}{1}e^{-(a-1)b}+\ldots\ldots(-1)^{k-1}\binom{k-1}{k-1}\,e^{-(a-k+1)b}\right\}.$$

Berücksichtigt man die Bedeutung der in (8) durch $\varphi(p,\,q)_k$ bezeichneten Function von p und q, so ist auch:

$$\int_0^\infty \varphi(a,\,x)_k\cos bx\,dx$$

$$= \tfrac{1}{2}\pi\,e^{-ab}\left\{-1\binom{k-1}{1}e^{b}+\binom{k-1}{2}e^{2b}\ldots\ldots(-1)^{k-1}\binom{k-1}{k-1}e^{(k-1)b}\right\},$$

oder auch:

$$\int_0^\infty \varphi(a,x)_k \cos bx\, dx = \tfrac{1}{2}\pi e^{-ab}(1-e^b)^{k-1}.$$

Wird nun die erste der Gleichungen in (16 §. 6) berücksichtigt, so stellt sich folgender Integral-Ausdruck heraus:

$$(21.)\quad \int_0^\infty \left\{\frac{1}{\binom{a-xi}{k}}+\frac{1}{\binom{a+xi}{k}}\right\}\cos bx\, dx = (-1)^{k-1}k\pi e^{-ab}(1-e^b)^{k-1},$$

in welchem a und b beliebige positive und reelle Grössen sind.

Wendet man auf dieses Ergebniss ein bekanntes Theorem (S. m. Int.-R. 388) an, so erhält man aus demselben auch folgendes Integral:

$$(22.)\quad \int_0^\infty e^{-ax}(1-e^x)^{k-1}\cos bx\, dx = \frac{(-1)^{k-1}}{2k}\left\{\frac{1}{\binom{a-bi}{k}}+\frac{1}{\binom{a+bi}{k}}\right\};$$

wo a nicht negativ sein darf, b aber alle reelle Werthe haben kann.

8.

Die Differentiation nach b der Gleichung in (§. 7), welche auf die Ergebnisse in (21 und 22) führte, giebt auch folgende Gleichung:

$$\int_0^\infty \frac{x}{a^2+x^2}\sin bx\, dx = \tfrac{1}{2}\pi . e^{-ab}.$$

Behandelt man dieselbe wie die analoge in (§. 7), so erhält man:

$$\int_0^\infty \left\{\frac{1}{a^2+x^2}-\frac{\binom{k-1}{1}}{(a-1)^2+x^2}+\ldots\ldots(-1)^{k-1}\frac{\binom{k-1}{k-1}}{(a+k+1)^2+x^2}\right\}x\sin bx\, dx = \tfrac{1}{2}\pi . e^{-ab}(1-e)^{k-1}.$$

Berücksichtigt man nun die dritte der Gleichungen in (8), so ergiebt sich

$$\int_0^\infty \psi(a,x)_k \sin bx\, dx = \tfrac{1}{2}\pi . e^{-ab}(1-e^b)^{k-1}.$$

Zieht man ferner die zweite der Gleichungen in (16) in Betracht, so erhält man den Integral-Ausdruck

$$(21'.)\quad \int_0^\infty \left\{\frac{1}{\binom{a-xi}{k}}-\frac{1}{\binom{a+xi}{k}}\right\}\sin bx\, dx = (-1)^{k-1}ik\pi e^{-ab}(1-e^b)^{k-1}.$$

Wird auch auf diese Gleichung ein analoges Theorem, (Int.-R. 389) wie auf die in (21 §. 7) angewendet, so erhält man folgenden analogen Integral-Ausdruck zu dem in (22) dargestellten:

$$(22'.)\quad \int_0^x e^{-ax}(1-e^x)^{k-1}\sin bx\,dx = \frac{i(-1)^k}{2k}\left\{\frac{1}{\binom{a-bi}{k}} - \frac{1}{\binom{a+bi}{k}}\right\},$$

wo a und b dieselben Werthe wie in (22) haben können.

9.

Berücksichtigt man die Ergebnisse in (22 und 22′ §. 7 u. 8), so wie die Gleichungen (16 §. 6), so erhält man auch folgende zwei Bestimmungen für die im Eingange durch $\varphi(p, q)_k$ und $\psi(p, q)_k$ vorgestellten Functionen von p und q:

$$(23.)\quad \begin{cases} \varphi(p, q)_k = \int_0^\infty e^{-px}(e-1^x)^{k-1}\cos qx\,dx, \\ \psi(p, q)_k = \int_0^\infty e^{-px}(e-1^x)^{k-1}\sin qx\,dx, \end{cases}$$

oder auch, weil innerhalb der Integrationsgrenze $1-e^x$ beständig negativ und folglich e^x-1 beständig positiv ist, folgende:

$$(23'.)\quad \begin{cases} \varphi(p, q)_k = (-1)^{k-1}\int_0^\infty e^{-px}(e^x-1)^{k-1}\cos qx\,dx, \\ \psi(p, q)_k = (-1)^{k-1}\int_0^\infty e^{-px}(e^x-1)^{-1}\sin qx\,dx. \end{cases}$$

Diese Gleichungen ersetzen ganz diejenigen (12 bis 15 §. 5); d. h. sie stellen, wie diese, die hier in Rede stehenden Functionen $\varphi(p, q)_k$ *und* $\psi(p, q)_k$ durch bestimmte Integrale dar.

Vergleicht man endlich die Gleichungen (10 und 11 §. 4) mit einander, so ergiebt sich, mit Zuziehung der ersten Gleichung in (8) eben daselbst, so wie der unmittelbar vorausgehenden Gleichungen in (23′), folgender Ausdruck:

$$(24.)\quad \left(\int_0^\infty e^{-px}(e^x-1)^{k-1}\cos qx\,dx\right)^2 + \left(\int_0^\infty e^{-px}(e^x-1)^{k-1}\sin qx\,dx\right)^2$$
$$= \frac{1^2 \quad 2^2 \quad 3^2 \quad \ldots\ldots \quad (k-1)^2}{(p^2+q^2)\,((p-1)^2+q^2)\,((p-2)^2+q^2)\,\ldots\ldots\,((p-k+1)^2+q^2)},$$

wo p keine negative reelle Zahl, q hingegen jede reelle Zahl sein darf.

13.

Fundamenta Trigonometriae sphaeroïdicae exacta; imprimis de lineis brevissimis, vulgo dictis geodaeticis, in superficie sphaeroïdica.

(Auctore Dr. *Chr. Gudermann*, math. prof. ord. Monast. Guestph.)

1.

De figuris planis in superficie sphaeroïdica.

Si ellipsis plana gyratur circa axem aut minorem, aut majorem, describitur corpus, quod dicimus *Sphaeroïdem.* Quia vero a Geographis et Astronomis docetur, formam terrae optime aequari eae corporis sphaeroïdici, rotatione ellipseos circa axem minorem descripti, in sequentibus supponitur, lineas brevissimas, tunc dictas geodaeticas, in eiusmodi corporis superficie esse descriptas.

Sit in (Fig. 1.) linea $CP = B$ semiaxis terrae sphaeroïdicae, C ipsius centrum, P sit polus (septentrionalis), $EFDE'$ sit semiaequator, $CE = CF = CD = CE' = A$ sint radii aequatoris. Quadrantes congrui elliptici PE, PF, PD erunt meridiani punctorum A, M, D, per quae linea brevissima sive geodaetica A, M, D, transeat.

Excentricitas meridianorum, quae simul est ea corporis sphaeroïdici, sive ratio $\frac{\sqrt{(A-B)}}{A}$, quae vulgo litera ε designatur, in sequentibus functione $\sin e$ designabitur. Si vero sumis

$$\frac{\sqrt{(A^2-B^2)}}{A} = \sin e,$$

invenis

$$B = A \cdot \cos e .$$

Compressio polorum sive complanatio terrae sphaeroïdicae versus polos est ratio $\frac{A-B}{A} = 1-\sqrt{(1-\varepsilon^2)}$, quae vero e nostra notatione fit:

$$\frac{A-B}{A} = 1-\cos e = 2\sin^2.\tfrac{1}{2}e.$$

Chorda e polo P ducta si circa hoc punctum ita movetur, ut cum axe PC constantem faciat angulum e, describit coni recti superficiem, per aequatoris planum ita transeuntem, ut intersectio sit circulus, qui est locus focorum uniuscuiusque meridiani.

Omnes intersectiones, quarum plana axem contineant, ideoque angulos rectos cum aequatoris plano faciant, esse ellipses congruas, scilicet meridianos, ex ipsa corporis definitione sequitur. Si intersectionis planum cum eo aequatoris angulos rectos facit, at per centrum non transit, sine opera perspicies, intersectionem cum superficie corporis hanc esse ellipsin similem et simul parallelam eidem meridiano. Si intersectiones aequatoris plano parallelae sunt, eae erunt circuli, qui vulgo dicuntur circuli paralleli, et quorum quilibet continet omnia puncta ea, quibus est eadem latitudo geographica.

Quaenam vero sunt intersectiones planae innumerae reliquae? Huic quaestioni respondendum est, priusquam disquisitiones aggrediaris, quae curvas non planas in superficie sphaeroïdica spectent. At leges has frustra quaeris in libris stereometricis, equidem eas non inveni. Si intersectionis planum per centrum corporis transit, et cum aequatoris plano facit angulum φ, intersectio ipsa erit ellipsis; cuius si seminaxem maiorem litera a, minorem vero litera b designat, erit

$$(1.) \qquad a = A\,, \quad b = \frac{A}{\sqrt{(1 + \operatorname{tang}^2 e \cdot \sin^2\varphi)}} = \frac{B}{\sqrt{(1 - \sin^2 e \cos^2\varphi}}\,,$$

et si huic intersectioni parallela est alia, cuius itaque planum per corporis centrum non transit, intersectio haec erit ellipsis priori similis.

Excentricitas vero ellipseos, cuius semiaxium longitudines formulis modo prolatis indicantur, si est $\sin\vartheta$, quia pariter est

$$\frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}}{a} = \sin\vartheta\,,$$

invenitur

$$(2.) \qquad \begin{cases} \sin\vartheta = \dfrac{\operatorname{tang} e \cdot \sin\varphi}{\sqrt{(1 + \operatorname{tang}^2 e \cdot \sin^2\varphi)}}, & \text{quare} \\ \cos\vartheta = \dfrac{1}{\sqrt{(1 + \operatorname{tang}^2 e \cdot \sin^2\varphi)}}, \\ \operatorname{tang}\vartheta = \operatorname{tang} e \,.\, \sin\varphi\,. \end{cases}$$

Directiones axium facillime determinantur. E formulis (1) perspicis semiaxem maiorem intersectionum omnium, quarum plana per corporis centrum transeant, radio aequatoris esse aequales, quicunque sit angulus φ, quem planum secans faciat cum aequatoris plano. At semiaxis minor b, quae pro $\varphi = 0$ aequatoris

radio aequalis est, minuitur, crescente angulo φ, et fit minima $b = B$, si angulus φ et rectus.

Demonstrationem huius legis simplicis brevitatis causa supprimimus, et ipsius loco formulas communico, quibus semiaxes ellipsium exprimantur, quae sunt sectiones corporis sphaeroïdici rotatione ellipseos circa axem maiorem descripti. Si φ iterum designat angulum, quem intersectionis planum per corporis centrum transiens facit cum aequatoris plano, formulae sunt

$$(3.)\quad \begin{cases} b = B\,, \quad a = \dfrac{B}{\sqrt{(1-\sin^2 e \sin^2\varphi)}} = \dfrac{A\cos e}{\sqrt{(1-\sin^2 e\sin^2 e\varphi)}} = \dfrac{A}{\sqrt{(1+\tang^2 e\cos^2\varphi)}}\,. \\ \text{et } \sin\vartheta = \sin e \sin\varphi\,. \end{cases}$$

Lectoribus, quibus nimis breves sumus, quia studia in his rebus incipere volunt, libellum prae multis simplicitate et perspicuitate excellentem commendamus auctoris reverendissimi mihi amici, eheu quod semper dolebo, ante plures annos defuncti viri praestantissimi: „Anleitung zu Rechnungen der Geodaesie, „von Dr. *Fried. Th. Poselger*, Berlin, bei *Dümmler*, 1831. (57 Seiten, „klein 4.)"

Si ex hoc libro sumis $\log\varepsilon^2 = 7{,}8089667$, sive $\log\varepsilon = 8{,}9044834$ et $\sqrt{(1-\varepsilon^2)} = 9{,}9985953$, est

$$\begin{aligned} \log\sin e &= 8{,}9044834 \\ \log\cos e &= 9{,}9985953 \\ \log\tang e &= 8{,}9058881 \\ \log 2\sin^2\tfrac{1}{2}e &= 8{,}9061036 \end{aligned}$$

et $e = 4^0\,37^1\,5''{,}838$, cuius arcus pro radio $= 1$ invenitur: 0,0806044.

Angulus e non iniuste appellatur *excentricitas sphaeroïdica angularis*. Si ellipseos cuiuscunque verticem axis minoris cum foco linea recta coniungis, semiaxi maiori haec aequalis est, et cum axe minore facit excentricitatem angularem huius curvae.

2.

De puncti latitudinibus tribus sphaeroïdicis.

Si PF est meridianus puncti M in sphaeroïdis superficie positi, qui itaque per punctum hoc ipsum transit, a puncto M demittamus $MN = x$ in axem PC, et si $CN = y$ est, rectanguli $MNCQ$ latera opposita sunt

$$CQ = MN = x \quad \text{et} \quad CN = QM = y$$

lineae coordinatae rectangulares puncti M, coniunctae aequatione notissima

(1.) $$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=1,$$

qua differentiata praebet: $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{B^2x}{A^2y}$, unde lineae normalis MLO, quae axes meridiani in punctis L et O secet, et cum ipsis angulos

$$MLF=L \quad \text{et} \quad MOP=\tfrac{1}{2}\pi-L$$

faciat, aequationem esse hanc concludis:

(2.) $$y'-y=\frac{A^2y}{B^2x}(x'-x)=\frac{1}{\cos^2 e}\cdot\frac{y}{x}\cdot(x'-x)\ ;$$

et simul angulus L est inclinatio lineae normalis LM versus, sive potius elevatio supra planum aequatoris. Angulus hic a Geographis dicitur latitudo (geographica) sive geodatica puncti M, quia circulus minor radio $NM=x$ a puncto M descriptus cum aequatore ipso intercipit superficiei sphaeroïdicae lamellam sive terrae zonam, cuius latitudo determinatur angulo L, qui ob aequationem (1) computantur e formula

(3.) $$\operatorname{tang} L=\frac{A^2y}{B^2x}=\frac{1}{\cos^2 e}\cdot\frac{y}{x},$$

Pari ratione angulus ECF planus, sive ipsi aequalis sphaeroïdicus EPF, cui totidem gradus et minuta tum prima tum secunda sunt ac aequatoris arcui EF, dicitur *longitudo* puncti M, si PE est meridianus primus; si non est, ille angulus sive aequatoris arcus dicitur recte *longitudinem differentia,* scilicet earum longitudinum, quae ad puncta M et A pertinent, et quarum initium determinatur meridiano primo.

Linea normalis LM eo se commendat, quod per punctum determinandum M ipsum transeat at in eo vituperanda, quod per sphaeroïdis centrum C non transit, si L est inter fines $L=0$ et $L=\frac{1}{2}\pi$.

Quare et alia linea in usum vocata est. E centro C duae describantur sphaerae, vel saltem ipsarum superficies, quarum prima sphaeroïdem tangat extrinsecus in omnibus aequatoris punctis, altera vero sphaeroïdis superficiem intus tangat in duobus polis, ita ut sphaeroïdes tota contineatur inter duas sphaerarum superficies.

Si nunc applicatam QM prolongas, ut ea sphaerae maioris superficiem secet in α, radius $C\alpha=A$ sphaerae minoris superficiem perforabit in puncto quodam β, quod cum punctis N et M erit in eadem linea recta.

Radius $C\beta\alpha$ enim cum aequatoris radio CF faciet angulum quendam $\alpha CF=G$ et ideo cum axe corporis CP angulum $\alpha CP=\frac{1}{2}\pi-G$. Quum vero inde sequatur

(4.) $x = A\cos G$ et $y = B\sin G = A\cos e.\sin G$,

valores hi revera aequationi (1) satisfaciunt. Angulus G, quem peculiari modo, qui in libris non invenitur, determinavimus e situ puncti M, est idem, quem Astronomi habita ratione motus puncti M in ellipsi FMP *anomaliam excentricam* apellare consueverunt, quem vero nunc *latitudinem puncti M mediam* sive *excentricam* appellemus. Mox videbis esse $G < L$, at esse $G = L$, si aut $L = 0$, aut $L = \frac{1}{2}\pi$ sit.

Radius $R\beta\alpha$, e cuius situ pendet situs puncti M, et qui facit angulum $\alpha CF = G$ cum aequatoris radio CF, eo commendatur, quod per sphaeroïdis centrum C transit, at vituperandus est, quia per punctum determinandum M non transit, exceptis duobus casibus, si M est aut in F, aut in polo P.

Opprobrium vero hoc parum valet, dummodo geometricae constructionis regulam modo prolatam bene intelligis. Dato enim angulo G, hoc modo persimplici invenis quovis casu situm puncti M: In plano PCF ducas e centro quodam C radium $C\beta\alpha$, qui hunc angulum G faciat cum aequatoris radio CF, et sphaerarum superficies e centro C descriptas, vel si mavis, circulos radiis A et B e centro C in plano PCF descriptos secet in punctis α et β. Si e punctis hoc modo facili inventis α et β demittis lineas perpendiculares, ex α in CF, et ex β in axem CP, harum linearum intersectio erit punctum e data latitudine media G determinandum M.

Imo et lineam normalem ML ipsam cum linea tangente paullum continuata constructione invenis.

Si enim tangentes circulorum ducis, quarum altera circulum maiorem tangat in α, et radium prolongatum CF secet in F', altera vero circulum minorem tangat in β, et axem prolongatam CP secet in P', linea recta $P'F'$ ellipsin tanget in M, et erecta in M perpendicularis erit quaesita linea normalis ML, ita ut hoc modo angulus L inveniatur e data latitudine media G.

Insuper videbis, adhibita latitudine puncti M media G, formulas arithmeticas fieri simpliciores et elegantiores.

Si denique radium sphaeroïdicum $CM = r$ in usum vocas, qui cum aequatoris radio CF faciat angulum $MCF = L'$, valent formulae

(5.) $x = r.\cos' L$ et $y = r.\sin' L$

et quarum combinatione oriuntur

(6.) $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$ et $\operatorname{tang}' L = \frac{y}{x}$.

Quare tres anguli L, G, $'L$ accurate distinguendi appellantur puncti M latitudines, quos nunc comparemus. Quia e formulis (4) sequitur formula

$$\frac{y}{x} = \cos e \,.\, \text{tang}\, G\,.$$

substituendo obtines

(7.) $$\text{tang}\,'L = \cos e \,.\, \text{tang}\, G\,.$$

unde perspicis esse latudinem $'L < G$, et

(8.) $$\text{tang}\, G = \cos G \,\text{tang}\, L,$$

unde perspicis, esse $L > G > L$, quare non iniuste *latitudinem* G appellavimus *mediam*, praesertim cum ex formulis (7 et 8) componatur proportio continua

$$\text{tang}\, L : \text{tang}\, G = \text{tang}\, G : \text{tang}\,'L$$

sive formula

(9.) $$\text{tang}\, G = \sqrt{(\text{tang}\, L \,.\, \text{tang}\,'L)}.$$

Quum Astronomi latitudinem eam L, quam instrumentis in usum et commodum Geographorum metiri possunt, et diligentissime in ipsorum speculis et in itineribus mensi sunt, ideoque *latitudinem veram* appellare consuevere, retinebimus hoc nomen, ideoque latitudinem $'L$ appellemus aut *tertiam*, aut *reductam*, quia omnium minima est.

In finibus meridiani est $L = G = 'L$, et si $e = 0$ ponitur, quo Sphaeroïdes in Sphaeram abit, pro quovis puncto M fit $L = G = 'L$.

3.

Nexus inter altitudinem veram et mediam, illustratus triangulo rectangulari sphaerico.

Formula in articulo praeced. eruta $\text{tang}\, G = \cos e \,.\, \text{tang}\, L$, quae nexum inter latitudinem veram L et mediam G exprimit, satis indicat, latitudinem veram L habendam esse pro hypotenusa et mediam pro catheto trianguli rectangularis sphaerici, quocum hypotenusa faciat angulum excentricitati corporis sphaeroïdici angulari e aequalem. Si cathetum alterum litera Θ, et angulum ab eo cum hypotenusa factum litera P significas, nexum inter quinque quantitates, quarum unica e est constans, omnimodis exprimunt formulae decem:

(1.)
$$\begin{cases} \cos L = \cos G \,.\, \cos \Theta\,, & \text{tang}\,\Theta = \text{tang}\, L \,.\, \cos P\,, \\ \cos L = \cot e \,.\, \cot P\,, & \text{tang}\,\Theta = \text{tang}\, e \,.\, \sin G\,, \\ \sin \Theta = \sin L \,.\, \sin e\,, & \text{tang}\, G = \text{tang}\, P \,.\, \sin \Theta\,, \\ \sin G = \sin L \,.\, \sin P\,, & \cos P = \cos G \,.\, \sin e\,, \\ \text{tang}\, G = \text{tang}\, L \,.\, \cos e & \cos e = \cos \Theta \,.\, \sin P\,. \end{cases}$$

e quibus perspicis, quomodo quantitates tres L, G, e cohaereant cum duabus novis

Θ et P auxiliaribus tantum, at usu gravissimo excellentibus, quum adiuvantibus illis non solum calculus in numeris definitis, sed et calculus analyticus ipse mirum in modum simplificetur.

Nexus inter altitudinem mediam et tertiam, illustratus triangulo rectangulari sphaerico altero, prioris parte.

Si e vertice anguli recti in prioris trianguli hypotenusam L demittis perpendicularem arcum H, quocum cathetus G faciat angulum Q, duo oriuntur triangula rectangula, quae unicum tertium constituunt. Quare priores formulae augendae sunt formulis decem novis:

$$(2.)\quad \begin{cases} \cos G = \cos H . \cos {}'L, & \tang H = \tang G . \cos Q, \\ \cos G = \cot e \,. \cot t, & \tang H = \tang e \,. \sin {}'L, \\ \sin {}'L = \sin G \,. \sin Q, \quad \text{et} & \tang {}'L = \tang Q . \sin H, \\ \sin H = \sin G \,. \sin e, & \cos Q = \cos {}'L . \sin e, \\ \tang L' = \tang G . \cos e, & \cos e = \cos H . \sin Q, \end{cases}$$

nec non sequentibus:

$$(3.)\quad \begin{cases} \cos \Theta = (L-{}'L).\cos H, & \sin(L-{}'L) = \sin \Theta . \cos Q, \\ \cos \Theta = \cot P \,. \tang P, & \tang(L-{}'L) = \cot Q \,. \sin H, \\ \tang(L-{}'L) = \tang \Theta . \cos P, & \tang H = \tang P . \sin(L-{}'L), \\ \tang H = \tang \Theta . \sin Q, & \sin Q = \cos(L-{}'L) . \sin P, \\ \sin H = \sin \Theta . \sin P, & \cos P = \cos H . \cos Q, \end{cases}$$

quae pluribus modis coniunctae cum prioribus suppeditant novas, inter quas memoratu dignissima est

$$(4.)\qquad (L-{}'L) = \frac{\tang^2 \Theta}{\tang L},$$

sive

$${}'L = L - \text{arc tang}\left(\frac{\tang^2 \Theta}{\tang L}\right)$$

cum ipsius ope e data latitudine vera facillime computetur altitudo tertia.

4.

Significatio geometrica quantitatum auxiliarium Θ et P.

Non in lectoris incommodum formulas triginta in articulo praecedenti protulimus, inter quas revera sunt tales, quae alias quantitates non contineant quam auxiliares ipsas; formulae saltem haec $\cos P = \cos H \cdot \cos Q$, $\sin H = \sin \Theta . \sin P$, $\tang H = \tang \Theta . \sin Q$ et aliae eius sunt generis; sed ne te poeniteat, illas perlus-

trasse; videbis enim quantitates auxiliares has eiusdem esse momenti, cuius reliquae. Quem in finem superficiem sphaeroïdicam secabis plano per corporis centrum C transeunte, quod cum aequatoris plano faciat angulum latitudini mediae aequalem. Si non mutata latitudine media puncti M planum secans ita sumis, ut simul angulum rectum faciat cum meridiani PMF plano, radius $C\beta\alpha$ duorum circulorum concentricorum articuli (2) totus continebitur in plano secante, quod itaque per punctum M ipsum non transit. Plani huius intersectio cum superficie sphaeroïdica erit ellipsis, cuius axis maior $2a = 2A$ tota continetur in aequatoris plano, et angulos rectos faciet cum aequatoris radio CF, quo simul directio semiaxis minoris b determinata est, cum contineatur tum in plano secante, tum in meridiani plano PCF, ideoque duorum planorum intersectio sit, scilicet in directione radii $C\beta\alpha$ sit. Quia vero in formula (1) articuli (1) est $\varphi = G$, invenis

$$b = \frac{A}{\sqrt{(1 + \operatorname{tng}^2 e \sin^2 G)}} = \frac{B}{\sqrt{(1 - \sin^2 e \cos^2 G)}},$$

quae formulae fiunt

$$b = a \cdot \cos\Theta \qquad \text{et} \qquad b = \frac{B}{\sin P}.$$

E formula prima perspicis *angulum auxiliarem* Θ esse *angularem excentricitatem ellipseos in plano secante contentae.*

E formula altera perspicis, angulum auxiliarem P esse talem, ut functio $\sin P$ sit ratio $\frac{B}{b}$, scilicet inter semiaxem corporis et semiaxem minorem ellipseos in plano secante descriptae. Si semiaxem minorem hanc b projicis in axem corporis, et proiectionem hanc paullisper littera b insignis, quia duae axes angulum $\frac{1}{2}\pi - G$ faciunt, $\beta = b\cos(\frac{1}{2}\pi - G)$ sive $\beta = b\sin G$ fit; quare est $\frac{b'}{B} = \frac{\sin G}{\sin P}$, sive

$$\frac{\beta}{B} = \sin L.$$

Si vero formulas nunc erutas colligis, est

$$\begin{aligned} b &= a\cos\Theta, \\ B &= b\sin P, \\ \beta &= b\sin G, \\ \beta &= B\sin L; \end{aligned}$$

unde perspicis, quantitates trianguli primi in articulo praeced. omnes praeter e, quae a corpore ipso pendeat, in usum venire.

Vis geometrica quantitatum auxiliarum H et Q.

Nunc vero corporis superficiem seces plano, quod contineat radium corporis CM ipsum, et per corporis centrum C transiens angulos rectos faciat cum meridiano puncti M.

Si ellipseos in corporis superficie ortae semiaxis minor b' et maior a' est, iterum erit $a' = a$, et quia angulus φ nunc $= {}'L$ est, formulae articuli primi nunc praebent

$$b' = \frac{A}{\sqrt{(1 + \operatorname{tang}^2 e \cdot \sin^2 {}'L)}}, \quad \text{sive}$$

$$b' = a' . \cos H,$$

et

$$b' = \frac{B}{\sin Q},$$

quare excentricitas angularis ellipseos ortae est angulo H aequalis, et sin Q est ratio $\frac{B}{b'}$ inter semiaxes minores tum meridiani tum ellipseos novae; radius CM ipse est axis minor, et axis ellipseos maior in aequatoris plano per centrum C ita transit, ut ab aequatoris radio CF normaliter intersecetur.

Si nunc semiaxis CM proicitur in corporis axem CP, proiectio est $y = CN = b' \sin {}'L$, quare est $y = B . \frac{\sin {}'L}{\sin Q} = B \sin G$; quae formula revera convenit cum altera formula (4 art. 2).

Eruta igitur est vis geometrica quatuor quantitatum auxiliarium Θ, P, H et Q, quarum nexus tum inter se, tum cum altitudinibus tribus L' G, ${}'L$ et excentricitate corporis angulari e triginta formulis in articulo praecedenti prolatis exprimitur omnimodis.

5.

Lineae definitae rectae in meridiani plano ductae, quae sunt functiones altitudinis puncti M.

E formulis $x = A \cos G$ et $y = A \cos e . \sin G$ conponis primo formulam, qua exprimatur longitudo radii sphaeroïdici $CM = r$. Quia enim $r = \sqrt{(x^2 + y^2)}$, est

$$r = A . \sqrt{(\cos^2 G + \cos^2 e . \sin^2 G)}, \quad \text{sive}$$

$$r = A . \sqrt{(1 - \sin^2 e . \sin^2 G)}.$$

Quia e formula $\operatorname{tang} L = \frac{\operatorname{tang} G}{\cos e} = \frac{\sin G}{\cos e \cos G}$ sequitur $\sin L = \frac{\sin G}{\sqrt{(\sin^2 G + \cos^2 e \cos^2 G)}}$ et $\cos L = \frac{\cos e \cdot \cos G}{\sqrt{(\sin^2 G + \cos^2 e \cos^2 G)}}$, est

$$(1.)\quad \begin{cases} \sin L = \dfrac{\sin G}{\sqrt{(\cos^2 e + \sin^2 e \sin^2 G)}} = \dfrac{\sin G}{\cos e\sqrt{(1+\tan g^2 e \cdot \sin^2 G)}} = \dfrac{\sin G \cdot \cos \Theta}{\cos e} \\ \cos L = \dfrac{\cos e \cos G}{\sqrt{(\cos^2 e + \sin^2 e \sin^2 G)}} = \dfrac{\cos G}{\sqrt{(1+\tan g^2 e \cdot \sin^2 G)}} = \cos G \cos \Theta \end{cases}$$

et vice versa invenis formulas

$$\sin G = \frac{\cos e \sin L}{\sqrt{(1-\sin^2 e \sin^2 L)}} = \frac{\cos e \cdot \sin L}{\cos \Theta},$$

$$\cos G = \frac{\cos L}{\sqrt{(1-\sin^2 e \sin^2 L)}} = \frac{\cos L}{\cos \Theta},$$

quibus una cum formula $\tan g\, G = \cos e \,.\, \tan g\, L$ utendum est, si formulas, quae altitudinem veram continent, transformare vis in eas, quae altitudinem mediam contineant; patet insuper relatio

$$(2)\qquad \sqrt{(1-\sin^2 e \,.\, \sin^2 L)}\,.\sqrt{(1+\tan g^2 e \,.\, \sin^2 G)} = 1,$$

indicans, permutari G et L, dummodo permutentur $\cos e$ et $\dfrac{1}{\cos e}$; $\sin e$ et $i \tan g e$, nec non $\tan g e$ cum $-i \sin e$, posito $i = \sqrt{-1}$.

Adhibitis formulis his fiunt

$$(3.)\quad \begin{cases} x = \dfrac{A \cos L}{\sqrt{(1-\sin^2 e \sin^2 L)}} = A \cos G \\ y = \dfrac{A \cos^2 e \sin L}{\sqrt{(1-\sin^2 e \sin^2 L)}} = A \cos e \sin G \end{cases}$$

$$CM = r = \frac{A\sqrt{[1-(2\sin^2 e - \sin^4 e)\sin^2 L]}}{\sqrt{(1-\sin^2 e \sin^2 L)}} = A\sqrt{(1-\sin^2 e \,.\, \sin^2 G)}.$$

Quia lineae normalis aequatio est $y' - y = \tan g\, L(x' - x')$, ponendo aut $y' = 0$, aut $x' = 0$, obtines $CL = x - y \cot L$ et $CO = y - x \tan g\, L$, quae substitutis valoribus coordinatarum x et y antea inventis fiunt

$$CL = \frac{A \sin^2 e \cdot \cos L}{\sqrt{(1-\sin^2 e \sin^2 L)}} = A \sin^2 e \,.\, \cos G$$

$$CO = -\frac{A \sin^2 e \cdot \sin L}{\sqrt{(1-\sin^2 e \sin^2 L)}} = \frac{-A \sin^2 e}{\cos e} \,.\, \sin G$$

quibus in formulis signum praefixum $-$ indicat, punctum intersectionis O infra aequatoris planum esse situm.

Quadrata harum formularum addendo invenis

$$LO = \frac{A \sin^2 e}{\sqrt{(1-\sin^2 e \sin^2 L)}} = A \sin^2 e \sqrt{(1+\tan g^2 e \,.\, \sin^2 G)} = \frac{A \sin^2 e}{\cos \Theta},$$

Quia $y = ML \,.\, \sin L$, vice versa est

$$ML = \frac{A \cos^2 e}{\sqrt{(1-\sin^2 e \sin^2 L)}} = A \cos^2 e \sqrt{(1+\tan g^2 e \,.\, \sin^2 G)} = \frac{A \cos^2 e}{\cos \Theta},$$

Quia denique $MO = ML + LO$, erit

$$MO = \frac{A}{\sqrt{(1-\sin^2 e \cdot \sin^2 L)}} = \sqrt{(1 + \tang^2 e \,.\, \sin^2 G)} = \frac{A}{\cos\Theta},$$

dummodo memineris, esse $\sin e \sin L = \sin\Theta$ et $\tang e \sin G = \tang\Theta$.

6.

De curvatura et rectificatione meridiani, et de complanatione zonarum.

Si radium curvaturae meridiani, qui ad ipsius punctum M pertinet, litera ϱ insignire vis, adhibebimus formulam generalem hanc

$$\varrho = \frac{\partial y}{\partial \sin L} = \frac{\partial x}{\partial \cos L}.$$

Quia vero $x = A\cos G$, est primo $r = \frac{A\sin G}{\sin L} \cdot \frac{\partial G}{\partial L}$; quia insuper $\log\tang G = \log\tang L + \text{const.}$, est

$$\frac{\partial G}{\sin G \cos G} = \frac{\partial L}{\sin L \cos L}, \text{ ideoque}$$

$$\varrho = A \,.\, \left(\frac{\sin G}{\sin L}\right)^2 \cdot \frac{\cos G}{\cos L}.$$

Quia vero $\frac{\sin G}{\sin L} = \frac{\cos e}{\cos\Theta}$ et $\frac{\cos G}{\cos L} = \frac{1}{\cos\Theta}$ est, oritur formula quantum fieri potest simplex

$$\varrho = \frac{A\cos^2 e}{\cos^3\Theta}. \qquad (1.)$$

Quum insuper linea normalis usque ad corporis axem prolongata est $MO = \frac{A}{\cos\Theta}$, valet relatio

$$\varrho = \frac{MO^3}{A^2} \cdot \cos^2 e$$

Si arcus $FM = s$ esse fingitur, est $\partial s = \mp\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$, et quum $\partial x = -A\sin G \,.\, \partial G$, $\partial y = A\cos e \,.\, \cos G \,.\, \partial G$, oritur formula

$$\partial s = A \,.\, \partial G \,.\, \sqrt{(\sin^2 G + \cos^2 e \,.\, \cos^2 G)} = A\cos e \,.\, \partial G \sqrt{(1 + \tang^2 e \,.\, \sin G^2)}$$

sive adhibita functione angulari Θ:

$$\partial s = \frac{A\cos e \cdot \partial G}{\cos\Theta};$$

quia vero $\frac{\partial s}{\varrho} = \partial L$, oritur relatio

$$\partial G = \frac{\cos^2\Theta}{\cos e} \cdot \partial G. \qquad (2.)$$

qua comparantur variationes altidudinum L et G eiusdem puncti M in eodem meridiano situ variabilis.

Rectificatio ipsa facillime succedit adhibendo formulam primariam

$$\partial s = A.\partial G.\sqrt{(\sin^2 G + \cos^2 e.\cos^2 G)}.$$

(3.) Sumatur modulus $k = \sin e$, unde sequitur $k' = \cos e$, et ponatur

$$G = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u$$

quo fit $\sin G = \operatorname{cnc} u$, $\cos G = \operatorname{snc} u$, $\sqrt{(\sin^2 G + \cos^2 e.\cos^2 G)} = \operatorname{dnc} u$, $\partial G = A \operatorname{dnc} u.\partial u$, ideoque $\partial s = A.\operatorname{dnc}^2 u.\partial u$, sive integrando,

$$(4.) \qquad s = A(E - \operatorname{elc} u),$$

dummodo E est quadrans ellipticus ad modulum $k = \sin e$ pertinens.

Quia $\operatorname{tang} G = \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc} u) = k'.\operatorname{tn} u$, est $\operatorname{tn} u = \operatorname{tang} L$, sive

$$(5.) \qquad L = \operatorname{am} u.$$

Quia $\cos\Theta = \sqrt{(1 - \sin^2 e.\sin^2 L)} = \sqrt{(1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u)} = \operatorname{dn} u$, est

$$(6.) \qquad \Theta = \operatorname{am}\left(k u, \frac{1}{k}\right).$$

(7.) Quia $\operatorname{dnc} u = \dfrac{\cos e}{\cos\vartheta} = \sin P = \cos(\tfrac{1}{2}\pi - P)$, est $P = \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{am}\left(k(K-u), \dfrac{1}{k}\right)$.

Si meridianus PCF circa axem CP gyratur, arcu elliptico FM describitur zona sphaeroïdica, cuius area si litera Z insignitur, est

$$\partial Z = 2\pi.x.\partial s.$$

Quia vero $\partial s = \dfrac{A\cos e \cdot \partial G}{\cos\Theta} = \dfrac{A\cos^2 e \cdot \partial L}{\cos^3\Theta}$ et $x = \dfrac{A\cos L}{\cos\Theta}$, est

$$\partial Z = 2\pi A^2 \cos^2 e \cdot \frac{\partial \sin L}{(1 - \sin^2 e \cdot \sin^2 L)^2} = \frac{2\pi A^2 \cos^2 e}{\sin e} \cdot \frac{\partial v}{(1 - v^2)^2},$$

si paullisper $v = \sin e \sin L = \sin\Theta$ sumis. Quia vero

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{1+v} + \frac{1}{1-v}\right) = \frac{1}{1-v^2},$$

sequitur $\dfrac{1}{(1-v^2)^2} = \tfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{(1-v)^2} + \dfrac{2}{1-v^2} + \dfrac{1}{(1+v)^2}\right)$, ideoque

$$\partial z = \frac{\pi A^2 \cos^2 e}{2\sin e}\left\{\frac{\partial v}{(1-v)^2} + \frac{\partial v}{(1+v)^2} + \frac{2\partial v}{1-v^2}\right\}, \quad \text{sive}$$

$$Z = \frac{\pi A^2 \cos^2 e}{2\sin e} \cdot \left\{\frac{1}{1-v} - \frac{1}{1+v} + 2\,\mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}(v)\right\},$$

quare est $Z = \dfrac{\pi A^2 \cos^2 e}{\sin e}\left\{\dfrac{v}{1-v^2} + \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}(v)\right\}$. Si valorem $v = \sin\Theta$ substituis, obtines denique, adhibita functione longitudinali hyperbolica,

$$(8.) \qquad Z = \frac{\pi B^2}{\sin e} \cdot \left(\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \mathfrak{L}\theta \right).$$

Tota superficies sphaeroïdica invenitur sumendo $L = \frac{1}{2}\pi$, quo fit $\theta = e$; quare ipsam habes

$$(9.) \qquad 2Z' = \frac{2\pi B^2}{\sin e}\left(\frac{\sin e}{\cos^2 e} + \mathfrak{L}e \right) = 2\pi A^2 + 2\pi B^2 \cdot \frac{\mathfrak{L}e}{\sin e},$$

7.

De linea brevissima in sphaeroïdis superficie, et de ipsius initio sumendo aptissimo.

Linea brevissima in sphaeroïdis superficie duo puncta eiusdem superficiei coniungens dicitur *linea geodaetica*, si in terrae spharoïdicae superficie ducitur. Lineam hanc in genere non esse planam, sive in eodem plano sitam iam ex eo perspicitur, quod quaevis superficiei sphaeroïdicae intersectio est ellipsis, et eiusmodi curvae lex diversa est ab ea, quam sequitur *linea geodaetica, quae est curva in terrae superficie ipsius meridianos secans omnes ita, ut sinus angulorum, quas cum illis faciat in intersectionum punctis inverse proportionales sint distantiis eorundem punctorum ab axi terrae.*

Quia circuli paralleli, inter quos aequator ipse referendus est, angulos rectos, ideoque constantes faciunt cum quolibet meridiano, et intersectionibus eiusdem circuli paralleli cum meridianis constantes sunt distantiae ab axe terrae, sequitur circulos parallelos esse lineas geodaeticas. Meridianos ipsos pariter esse lineas geodaeticas, mox melius perspicietur, si lex curvae distinctius erit expressa. Curvae modo nominatae planae inter intersectiones planas superficiei sphaeroïdicae innumeras sunt unicae, quae pro lineis geodaeticis sive brevissimis haberi queant.

Sit in Fig. 1. AMD curva quaedam brevissima, meridianum puncti M in hoc puncto secans, et angulum $PMA = M$, qui lineae sive directionis MA inde a puncto M *azimuth* dicitur, cum meridiano faciens, quia puncti M distantia ab axe CP est $MN = x$ est, puncti M ut in eadem linea brevissima sit, aequatio conditionalis est

$$\sin M = \frac{\text{const}}{x}, \quad \text{sive}$$

$$x \cdot \sin M = \text{const.}$$

Quare si puncti M locus est alius A aut D, etsi e punctis his demittis perpendiculares $AB = \alpha$ et $DC = A$ in axem CP, aequatio conditionalis fit

$$(1)\qquad \begin{cases} x\sin M = \alpha\sin A\,, & \text{sive} \\ x\sin M = A\sin D, \end{cases}$$

dummodo A est azimuth puncti A, et D est azimuth puncti D, in quo aequator secatur a linea brevissima AMD.

Si altitudo puncti A vera est l, media $= g$, tertia est $'l$, eaedem formulae valent pro puncto A, ac formulae **(1, 2, 3)** articuli **(3)**, dummodo loco literarum maiorum sumis minores. Formulas decem primas hoc loco repetimus quia ipsarum usus erit frequentissimus:

$$(2.)\quad \begin{cases} \cos l = \cos g\,.\cos\vartheta & & \tang\vartheta = \tang l\,.\cos p \\ \cos l = \cot e\,.\cot p & & \tang\vartheta = \tang e\,.\sin g \\ \sin\vartheta = \sin l\,.\sin e & \text{et} & \tang g = \tang p\,.\sin\vartheta \\ \sin g = \sin l\,.\sin p & & \cos p = \cos g\,.\sin e \\ \tang g = \tang l\,.\cos e & & \cos e = \cos\vartheta\,.\sin p. \end{cases}$$

Si aequatione conditionali praecedenti $\alpha\sin A = A\sin D = x\sin M$ substituis valores $x = A\cos G$ et pariter $\alpha = A\cos g$, oritur aequatio simplicior

$$(3.)\qquad \cos g\,.\sin A = \sin D = \cos G\,.\sin M$$

quae naturam lineae brevissimae exprimit in forma usui magis accomodata. Huius aequationis forma etiam ulterius simplificatur, si supponimus, meridianum invariabilem PAE esse eum, qui a linea brevissima normaliter secetur, sive esse angulum azimuthalem $A = \frac{1}{2}\pi$. *Punctum lineae brevissimae hoc A, cuius azimuth est angulus rectus, appelletur huius curvae initium, sive punctum initiale*, et meridianus per hoc punctum transiens appelletur ipsius *meridianus primus, sive meridianus initii curvae.* Si vero $\sin A = 1$ sumis in aequatione praecedente, invenis $\cos g = \sin D$, sive $g = \frac{1}{2}\pi - D$. *Quare angulus, quem linea brevissima facit cum aequatoris plano, aequalis est altitudini mediae sive excentricitatae puncti curvae initialis.*

Ex eadem aequatione sequitur formula generalis et simplex

$$(4.)\qquad \cos g = \cos G\,.\sin M$$

cuius ope e data curvae directione sive angulo azimuthali M inde a puncto dato M computatur altitudo initii curvae media g. Eadem aequatio addito factore $\sin e$, fit:

$$(5.)\qquad \cos p = \cos P\,.\sin M$$

Si G' est altitudo media alterius cuiuslibet puncti M' in eadem curva siti, et si M' est ipsius azimuth, pariter valet formula $\cos g = \cos G'.\sin M'$, quare est

$$\sin M' = \frac{\cos g}{\cos G'},$$

ita ut e data altidudine media cuiuslibet alterius puncti M', ope huius formulae computare possis eiusdem puncti angulum azimuthalem. Quia in genere est

$$\frac{\sin M'}{\sin M} = \frac{\cos G}{\cos G'} = \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi - G)}{\sin(\frac{1}{2}\pi - G')},$$

et quia in triangulo sphaeroïdico MPM' distantiae polares mediae $\frac{1}{2}\pi - G$ et $\frac{1}{2}\pi - G'$, quae loco laterum PM et $P'M'$ sumendae sunt, oppositae sunt angulis M' et M ipsis in eodem triangulo, formula haec similem relationem exprimit, quam notissima trigonometriae sphaericae, sinus laterum trianguli proportionales esse sinubus angulorum lateribus oppositorum.

Si angulum $M = 0$ sumis, fit $g = \frac{1}{2}\pi$ et $M' = 0$; quae formulae indicant, meridianos esse curvas geodaeticas, et polum ipsum esse commune ipsarum initium.

8.

Lineae sphaeroïdicae planae curvam tangentes.

Si planum quoddam MLT ita collocas, ut contineat lineam normalem ML in (Fig. 1) et cum plano MLF faciat angulum supra dictum M, cum aequatoris plano autem angulum quoddam χ, planum hoc sphaeroïdis superficiem secabit, et ellipsis MT hoc modo orta cum arcu elliptico MF angulum M faciens erit linea curvam MD in M tangens. E principiis vero trigonometriae sphaericae applicatis ad angulum solidum, cuius vertex est L, nota est formula

$$\cos\chi = \cos L . \sin M,$$

qua ellipsis ipsa determinatur. Quia vero $\cos L = \cos\Theta . G$, est $\cos\varphi = \cos\Theta . \cos G . \sin M$, et quia $\cos G . \sin M = \cos g$ est, formula abit in

$$(1.) \qquad \cos\chi = \cos g . \cos\Theta;$$

unde perspicis, angulum χ esse variabilem, ideoque curvam AMD non esse ellipsin, sive curvam planam. Ope formulae modo prolatae angulus χ constructione facili determinatur, qua simul determinatur arcus ellipticus MT ipse in hoc plano contentus, qui est lineae geodaeticae linea tangens sphaeroïdica, cuius vero planum per punctum L radii aequatorialis CF, ideoque non per sphaeroïdis centrum C transit. Invento angulo $MTF = \chi$ facile est invenire angulum subtangentem FLT adiumento formulae $\sin FLT = \frac{\operatorname{tang} L}{\operatorname{tang}\chi}$, et angulum tangentem MLT ipsum ope formulae $\operatorname{tang} MLT = \frac{\operatorname{tang} L}{\cos M}$.

9.

De curvatura lineae geodaeticae.

Inter lineas planas, quae per idem punctum M in superficie sphaeroïdica duci possunt, et quarum plana eandem superficiei sphaeroïdicae lineam normalem MLO contineant, referendae sunt duae, scilicet meridianus sive ipsius arcus MF, cuius igitur azimuth $= 0$ est, et alia ellipsis, circulum minorem per M ductum aequatori parallelum tangens, cuius itaque azimuth est angulus rectus. Radius curvaturae, quae ad lineam primam pertineat, in articulo (6) inventus est,

$$(1.) \qquad \varrho = \frac{A\cos^2 e}{\sqrt{(1-\sin^2 e\cdot\sin^2 L)^3}} = \frac{A\cos^2 e}{\cos^3 \Theta}.$$

Linea recta e puncto M ducta, quae circulum parallelum a puncto M descriptum tangit, angulos rectos facit cum lineis in plano PCF e puncto M ductis MN et ML, quare vice versa LM est linea normalis tum habita ratione circuli paralleli per M ducti, tum ratione lineae ellipticae sente memoratae, cuius azimuth $= \frac{1}{2}\pi$ et cuius planum continet normalem ML, quae itaque est linea normalis ratione superficiei sphaeroïdicae.

Huius ellipseos radium curvaturae ϱ' certo invenis, dummodo lineam normalem superficiei sphaeroïdicae prolongas usque ad intersectionem O cum sphaeroïdis axi CP. Quare radius curvaturae hic $\varrho' = MO$ determinatur formula

$$(2.) \qquad \varrho' = \frac{A}{\sqrt{(1-\sin^2 e\sin^2 L)}} = \frac{A}{\cos\Theta},$$

quae comparata cum priore praebet relationem simplicem hanc:

$$(3.) \qquad \varrho = \varrho'\cdot\sin^2 P.$$

E formulis radiorum ϱ et ϱ' principalium invenis radium curvaturae R cuiusvis aliae curvae in superficie sphaeroïdica per idem punctum ita ductae, ut ipsius azimuth sit angulus $FMD = FMT = M$ ope formulae, quae in Stereometria demonstratur:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 M}{\varrho} + \frac{\sin^2 M}{\varrho'}.$$

Si eas radiorum ϱ et ϱ' formulas substituis, quae latitudinem puncti M geographicam veram L continent, invenis formulam prius usitatam

$$(4.) \qquad R = \frac{A}{(1+\tang^2 e\cos^2 M\cos^2 L)\cdot\sqrt{(1-\sin^2 e\sin^2 L)}},$$

quae convenit cum inventa in libello supra laudato, dummodo memineris excentricitatem ε esse nostrum $\sin e$.

Si vero adhibes formulas reductas $\varrho = \frac{A\cos^2 e}{\cos^3 \Theta}$ et $\varrho' = \frac{A}{\cos\Theta}$ et in usum vocas tum curvae aequationem conditionalem $\cos g = \cos G . \sin M$, tum formulam $\operatorname{tang}\Theta = \operatorname{tang} e . \sin G$, obtines formulam

$$(5.) \qquad R = \frac{A\cos^2\vartheta}{\cos^3\Theta} .$$

Si vero in formuls (4) sumis angulum $'\Theta$ quendam talem, ut sit

$$(6.) \qquad \operatorname{tang}\Theta' = \operatorname{tang} e . \cos L . \cos M = \cot P . \cos M,$$

ipsam pariter reducis ad simpliciorem

$$(7.) \qquad R = \frac{A\cos^2{}'\Theta}{\cos\Theta} ,$$

quae comparata cum priore praebet relationem hanc:

$$(8.) \qquad \cos\Theta . \cos'\Theta = \cos\vartheta ,$$

cuius veram vim paullo post luculentius perspicies, et quam nunc alio modo derivemus.

Quia $\cos g = \cos G . \sin M$, est $\cos g = \frac{\cos L \cdot \sin M}{\sqrt{(1-\sin^2 e \cdot \sin^2 L)}} = \frac{\sin M}{\sqrt{(1+\cos^2 e \cdot \operatorname{tang}^2 L)}}$,

ideoque $\sin g = \sqrt{\frac{\cos^2 M + \cos^2 e . \operatorname{tang}^2 L}{1 + \cos^2 e \cdot \operatorname{tang}^2 L}}$.

Quia vero $\operatorname{tang}\vartheta = \operatorname{tang} e . \sin g$, est $\operatorname{tang}\vartheta = \operatorname{tang} e . \sqrt{\frac{\cos^2 M + \cos^2 e \cdot \operatorname{tang}^2 L}{1 + \cos^2 e \cdot \operatorname{tang}^2 L}}$,

sive $\sin\vartheta = \sqrt{\frac{\operatorname{tang}^2 e \cos^2 L \cos^2 M + \sin^2 e \sin^2 L}{1 + \operatorname{tang}^2 e \cdot \cos^2 L \cos^2 M}}$. Si itaque sumis

$$(9.) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tang}'\Theta = \operatorname{tang} e . \cos \boldsymbol{L} \cos M \\ \text{et} \quad \sin\Theta = \sin e . \sin \boldsymbol{L} \\ \text{prior formula mutatur in} \\ \sin\vartheta = \sqrt{(\sin^2{}'\Theta + \cos^2{}'\Theta \sin^2\Theta)} = \sqrt{(\sin^2\Theta + \cos^2\Theta . \sin^2{}'\Theta)} \\ \text{et} \quad \cos\vartheta = \cos\Theta . \cos'\Theta , \\ \text{quibus addimus} \\ \sin p = \frac{\cos e}{\cos\Theta \cdot \cos'\Theta} . \end{array} \right.$$

Ope formulae (7) computatio radii curvaturae R, qui ad lineae geodaeticae punctum M pertineat, certo est facillima, quia anguli auxiliares Θ et $'\Theta$, quorum usus in sequentibus alioquin est frequentissimus, e quantitatibus datis ipsis e, $\boldsymbol{L}$, M ope formularum praecedentium computantur.

Si formulam (7) comparas cum formula (2), invenis relationem

$$(10.) \qquad R = \varrho' . \cos {}'\Theta ;$$

si vero formulam (5) comparas cum formula (1), invenis relationem multo memorabiliorem

$$(11.) \qquad R = \frac{\varrho}{\sin^2 p} ,$$

quia p est quantitas tamdiu constans, quamdiu linea geodaetica manet eadem. Formula haec exprimit legem curvaturae ante multos annos a me inventam et in huius diarii volumine XVII promulgatam: *Curvaturas lineae geodaeticae in quibuscunque punctis proportionales esse curvaturis meridianorum in iisdem punctis.*

Eadem lex certo valet de lineis brevissimis in superficiebus rotatione ellipseos circa axem maiorem, sive rotatione alius sectionis conicae circa axem principalem descriptis, quod demonstrandi hic non est locus, et aliquatenus iam demonstratum invenis in huius diarii volumine XXVI, pag. 159. Eandem vero legem deficere in lineis brevissimis in superficie coni recti descriptis iam ex eo perspicis, quod meridiani tunc sunt lineae rectae, quibus curvatura nulla est, quod monemus, quia restrictionem hanc theorematis nostri amplificati nimis generaliter enunciati loco citato non invenis.

10.

De rectificatione arcuum lineae gaeodaeticae.

Si longitudo geographica puncti cuiusdam M in linea geodaetica AM siti, habita ipsius puncti initialis A longitudine $= 0$, litera φ insignitur, angulus $EPF = ECF = \varphi$ longitudo illa erit. Variatione huius anguli φ efficitur, ut punctum M describat arculum circuli minoris, qui aequatori parallelus, et cuius longitudo $= x . \partial\varphi$ est, et arculum alterum, qui est differentiale arcus meridiani FM, sive PM, si a signi praefigendi $\pm$ diversitate abstrahis, et qui in articulo (6) inventus est $= \frac{A\cos e \cdot \partial G}{\cos\Theta}$. Quare si arcus curvae brevissimae AM litera s insignitur, quadratum ∂s^2 invenis, si quadratum $(x\partial\varphi)^2$ auges quadrato $\left(\frac{A.\cos e.\partial G}{\cos\Theta}\right)$ quia illae quantitates sunt catheti et ∂s est hypotenusa trianguli rectangularis, cuius latera habentur pro lineis rectis. Quare est

$$(1.) \qquad \partial s^2 = (x.\partial\varphi)^2 + \left(\frac{A\cos e\cdot\partial G}{\cos\Theta}\right)^2 .$$

In triangulo modo dicto hypotenusa ∂s cum catheto $x\partial\varphi$ facit angulum $\frac{1}{2}\pi - M$, quare insuper valent formulae

$$(2.)\qquad \begin{cases} \sin M = \dfrac{x\,\partial\varphi}{\partial s} = A\cos G\,.\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial s}, \\ \cos M = \dfrac{A\cos e}{\cos\Theta}\,.\,\dfrac{\partial G}{\partial s}, \\ \cot M = \dfrac{A\cos e}{x\cos\Theta}\,.\,\dfrac{\partial G}{\partial\varphi} = \dfrac{\cos e}{\cos G\cdot\cos\Theta}\,.\,\dfrac{\partial G}{\partial\varphi}. \end{cases}$$

Quia vero, ut punctum M sit in linea geodaetica AM, valet conditio $\cos g = \cos G\sin M$, sive $\sin M = \dfrac{\cos g}{\cos G}$, est $x\,\partial\varphi = \dfrac{\cos g}{\cos G}\,.\,\partial s$, ita ut aequatio (1) fiat

$$\left(1-\frac{\cos^2 g}{\cos^2 G}\right).\partial s^2 = \left(\frac{A\cos e\,.\,\partial G}{\cos\Theta}\right)^2,$$

sive

$$\partial s = -A\cos e\,.\,\frac{\cos G\cdot\partial G}{\cos\Theta\cdot\sqrt{(\sin^2 g-\sin^2 G)}} = -A\cos e\,.\,\frac{\partial\sin G\,.\,\sqrt{(1+\tang^2 e\,.\sin^2 G)}}{\sqrt{(\sin^2 g-\sin^2 G)}}$$

in cuius dextrae parti signum — praefixum est, quia arcus s crescit decrescente puncti M latitudine media G.

Integratio huius formulae optime succedit ponendo

$$\sin G = \sin g\,.\,\cos\psi,$$

quo fit $-\cos G\cdot\partial G = \sin g\,.\sin\psi\,.\,\partial\psi$, $\sqrt{(\sin^2 g-\sin^2 G)} = \sin g\,.\sin\psi$, ita ut sit primo:

$$\partial s = A\cos e\,.\,\partial\psi\,.\sqrt{(1+\tang^2 e\,.\sin^2 G)}.$$

Quia vero $\sqrt{(1+\tang^2 e\,.\sin^2 G)} = \sqrt{(1+\tang^2 e\,.\sin^2 g\,.\cos^2\psi)} = \sqrt{(1+\tang^2\vartheta\,.\cos^2\psi)}$ $= \dfrac{1}{\cos\vartheta}\cdot\sqrt{(\cos^2\vartheta+\sin^2\vartheta\,.\cos\psi^2)} = \dfrac{1}{\cos\vartheta}\cdot\sqrt{(1-\sin^2\vartheta\,.\,\sin^2\psi)}$, et $\dfrac{\cos e}{\cos\vartheta} = \sin p$, est $\partial s = A\sin p\,.\,\partial\psi\sqrt{(1-\sin^2\vartheta\,.\sin^2\psi)}$. Si itaque adhibito modulo

$$(3.)\qquad k = \sin\vartheta,\ \text{cuius coniugatus } k' = \cos\vartheta,$$

sumitur

$$(4.)\qquad \psi = \operatorname{am} u$$

fit $\sin\psi = \operatorname{sn} u$, $\sqrt{(1-\sin^2\vartheta\,.\sin^2\psi)} = \sqrt{(1-k^2\operatorname{sn}^2 u)} = \operatorname{dn} u$, et $\partial\psi = \operatorname{dn} u\,.\,\partial u$, quare $\partial s = A\sin p\,.\operatorname{dn}^2 u\,.\,\partial u$, cuius integrale est

$$(5.)\qquad s = A\sin p\,.\,\operatorname{el} u = \frac{B}{\cos\vartheta}\,.\,\operatorname{el} u.$$

E formula hac perspicis, arcum lineae geodaeticae AM aequalem esse arcui ellipsis planae, cuius semiaxis maior $= A\sin p$; semiaxis igitur minor $= A\sin p\,.\cos\vartheta = A\cos e = B$, ideoque semiaxi corporis aequalis, et cuius anomalia excentrica ψ inde a vertice axis minoris, ubi arcus ellipticus incipit, ipsa

incipiat. Angulus modularis ϑ est huius ellipsis excentricitas angularis, et excentricitas in partibus semiaxis maioris $A \sin p$ est ipse modulus $k = \sin \Theta$.

11.

Vis functionum Θ et $'\Theta$ ratione habita argumenti u.

Inventa in articulo praecedenti formula $\partial s = A \cos e \,.\, \partial\psi \sqrt{(1+\tan g^2 e \,.\, \sin G)}$ $= A\,\partial\psi \sqrt{(\cos^2 e + \sin^2 e \,.\, \sin^2 G)}$ fit $\partial s = A\,\partial\psi \sqrt{(1 - \sin^2 e \,.\, \cos^2 G)}$, sive

$$(1.) \qquad \partial s = A \,.\, \sin P \,.\, \partial\psi.$$

Si formulam hanc comparas cum inventa $\partial s = A \sin p \,.\, \mathrm{dn}^2 u \,.\, \partial u = A \sin p \,.\, \partial\psi \,.\, \mathrm{dn}\, u$, comparatio praebet relationem hanc primam

$$(2.) \qquad \mathrm{dn}\, u = \frac{\sin P}{\sin p}.$$

Quia vero $\cos e = \cos \vartheta \,.\, \sin p = \cos \Theta \,.\, \sin P$, invenis relationem

$$\mathrm{dn}\, u = \frac{\cos \vartheta}{\cos \Theta}, \quad \text{sive } \cos \Theta = \frac{\cos \vartheta}{\mathrm{dn}\, u} = \frac{k'}{\mathrm{dn}\, u}, \quad \text{i. e.}$$

$$(3.) \qquad \cos \Theta = \mathrm{dnc}\, u.$$

Ob relationem vero $\cos \Theta \,.\, \cos' \Theta = \cos \vartheta$ in articulo (**9**) demonstratam, pariter invenis

$$(4.) \qquad \cos' \Theta = \mathrm{dn}\, u.$$

Si memor es formularum $\mathrm{dn}\, u = \mathrm{cn}\left(k\,u, \frac{1}{k}\right)$ et pariter $\mathrm{dnc}\, u = \mathrm{cn}\left(k\,(K-u), \frac{1}{k}\right)$ in (§. **30**) theoriae functionum modularium prolatarum, perspicis, formulas praecedentes et sic exprimi posse:

$$(5.) \qquad \begin{cases} '\Theta = \mathrm{am}\left(ku, \frac{1}{k}\right) = \text{arc tang}\,(\tan g\, e \cos L \cos M) \\ \Theta = \mathrm{am}\left(k(K-u), \frac{1}{k}\right) = \text{arc sin}\,(\sin e \sin L). \end{cases}$$

E computatis angulis Θ et $'\Theta$ ope harum formularum computantur functiones omnes reliquae tum argumenti u, tum complementi $K-u$, si K est quadrans modularis moduli $k = \sin \vartheta$, et simul ex iisdem computantur quantitates

$$(6.) \qquad \begin{cases} \cos \vartheta = \cos \Theta \cdot \cos' \Theta \text{ sive,} \\ \vartheta = \text{arc cos}\,(\cos \Theta \cos' \Theta), \quad \text{et} \\ \sin p = \dfrac{\cos e}{\cos \Theta \cdot \cos' \Theta}. \end{cases}$$

Formulae vero, quibus exprimuntur functiones modulares, sunt sequentes:

$$(7.)\quad \begin{cases} \operatorname{sn} u = \dfrac{\sin'\Theta}{\sin\vartheta}\,, & \operatorname{snc} u = \dfrac{\sin\Theta}{\sin\vartheta}\,, \\ \operatorname{cn} u = \dfrac{\cos'\Theta\cdot\sin\Theta}{\sin\vartheta}\,, & \operatorname{cnc} u = \dfrac{\cos\Theta\cdot\sin'\Theta}{\sin\vartheta}\,, \\ & \text{et} \\ \operatorname{tn} u = \dfrac{\operatorname{tang}'\Theta}{\sin\Theta}\,, & \operatorname{tnc} u = \dfrac{\operatorname{tang}\Theta}{\sin'\Theta}\,, \\ \operatorname{dn} u = \cos'\Theta\,, & \operatorname{dnc} u = \cos\Theta\,. \end{cases}$$

12.

Nexus inter cuiuslibet puncti in linea geodaetica siti longitudinem et latitudinem.

Inventa in articulo (10) formula $x\partial\varphi = \dfrac{\cos g}{\cos G}\cdot\partial s$, si valorem $x = A\cos^2 G$ substituis, fit

$$(1.)\qquad \partial\varphi = \frac{\cos g}{\cos^2 G}\cdot\frac{\partial s}{A}\,.$$

Quia vero invenimus $\dfrac{\partial s}{A} = \sin p\,.\,\operatorname{dn}^2 u\,.\,\partial u$, et quia $\cos^2 G = 1 - \sin^2 G = 1 - \sin^2 g\,.\,\cos^2\psi$ $= 1 - \sin^2 g\,.\,\operatorname{cn}^2 u = \cos^2 g\,(1 + \operatorname{tang}^2 g\,.\,\operatorname{sn}^2 u)$, est

$$\partial\varphi = \frac{\sin p}{\cos g}\cdot\frac{\operatorname{dn}^2 u\cdot\partial u}{1 + \operatorname{tang}^2 g\cdot\operatorname{sn}^2 u}$$

sive

$$\varphi = \int_0 \frac{\sin p}{\cos g}\cdot\frac{\operatorname{dn}^2 u\cdot\partial u^2}{1 + \operatorname{tang}^2 g\cdot\operatorname{sn}^2 u}$$

Si integrale hoc comparas cum integrali modulare

$$D(u, a) = \int_0 \frac{\operatorname{tn}' a\operatorname{dn}' a\cdot\operatorname{dn}^2 u\cdot\partial u}{1 + k^2\operatorname{tn}'^2 a\cdot\operatorname{sn}^2 u}\,,$$

relato ad modulum $k = \sin\vartheta$, sumes $k\operatorname{tn}' a = \operatorname{tang} g$, sive, quod idem, $\operatorname{tang}(\frac{1}{2}\pi - g) = \operatorname{tnc}' a$, unde sequitur

$$(1\text{a}.)\qquad \tfrac{1}{2}\pi - \operatorname{amc}' a = g.$$

Quia insuper est $\operatorname{tn}' a = \dfrac{\operatorname{tang} g}{k} = \dfrac{\operatorname{tang} g}{\sin\vartheta} = \operatorname{tang} p$, invenis secundo

$$(2.)\qquad \operatorname{am}' a = p.$$

Quia denique $\operatorname{tn}' a\,.\,\operatorname{dn}' a = \dfrac{\operatorname{sn}' a}{\operatorname{snc}' a} = \dfrac{\sin p}{\cos g}$ est, vides esse

$$(3.)\qquad \varphi = D(u, a).$$

Functiones modulares argumenti u computandae sunt e formulis (7) articuli praecedentis, et invento moduli angulo

$$\vartheta = \arccos(\cos\Theta . \cos'\Theta)$$

tum parameter a ipse, tum ipsius complementum $K'-a$, habito K' pro quadrante modulari coniugato, qui pertineat ad modulum $k' = \cos\vartheta$, determinantur formulis

$$(4.) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}\pi - \operatorname{amc}' a = g = \arcsin\left(\frac{\operatorname{tang}\vartheta}{\operatorname{tang} e}\right) \\ \operatorname{am}' a = p = \arcsin\left(\frac{\cos e}{\cos\vartheta}\right). \end{cases}$$

Quia vero $\operatorname{sn}' a = \sin p$, $\operatorname{cn}' a = \cos p$, $\operatorname{tn}' a = \operatorname{tang} p$, $k'\operatorname{sn}' a = \cos\vartheta \sin p = \cos e$, est $\operatorname{dn}' a = \sin e$, $\operatorname{dnc}' a = \frac{\sin\vartheta}{\sin e} = \sin l$, $k'\operatorname{snc}' a = \cos l$, $\operatorname{snc}' a = \frac{\cos l}{\cos\vartheta} = \cos g$, $\operatorname{cnc}' a = \sin g$, $\operatorname{tnc}' a = \cot g$.

13.

De nexu inter quantitates $\operatorname{am} u$, M, G, g' et longitudinem reductam sphaericam F geometrice construendo.

Triangulum sphaeroïdicum PAM in A rectangulare, si radius aequatoris $A = 1$ et simul semiaxis $CP = 1$ sumitur, quo excentricitas corporis angularis $e = 0$ fit, abit in triangulum sphaericum rectangulare. Lineae geodaeticae arcus $AM = A\sin p . \operatorname{el} u$ nunc fit $AM = \operatorname{el} u$ pro $k = 0$, sive $AM = \operatorname{am} u = \psi$; cathetus PA reducitur ad $\frac{1}{2}\pi - g = \frac{1}{2}\pi - l$, hypotenusa MP ad $\frac{1}{2}\pi - G = \frac{1}{2}\pi - L$; anguli azimuthalis dati $PMA = M$ magnitudo non mutatur, at longitudo puncti M sive angulus sphaeroïdicus $APM = \varphi$ mutatur, et si angulum mutatum litera F insignis, angulus hic F est proiectio sphaerica anguli sphaeroïdici φ, quam *longitudinem puncti M reductam sphaericam* appellare placeat, et *pariter* $\operatorname{am} u$ *est longitudo reducta lineae geodaeticae vel saltem sui arcus sphaeroïdici* AM.

Idem triangulus sphaericus rectangulus, qui trianguli sphaeroïdici APM proiectio sphaerica est, ob eam potissimum rationem est attentione animi dignus, quod nexus inter sua latera et angulos est revera idem, quem formulae plurimae ante inventae exhibent. Si primo consideras formulam $\sin G = \sin g . \cos\psi$, sive, quia $\psi = \operatorname{am} u$ est, hanc:

$$\sin G = \sin g . \operatorname{cn} u,$$

ita exhibitam, $\cos(\frac{1}{2}\pi - G) = \cos(\frac{1}{2}\pi - g) . \cos\operatorname{am} u$, iam vides, hac formula indicari, $\frac{1}{2}\pi - g$ et $\psi = \operatorname{am} u$ esse cathetos trigoni rectangularis sphaerici, cuius

hypotenusa sit $\frac{1}{2}\pi - \boldsymbol{G}$. Formula $\cos g = \cos \boldsymbol{G} . \sin \boldsymbol{M}$, sive $\sin(\frac{1}{2}\pi - \boldsymbol{G}) = \sin(\frac{1}{2}\pi - \boldsymbol{G}) . \sin \boldsymbol{M}$ edocet, cathetum eiusdem trianguli am u cum hypotenusa $\frac{1}{2}\pi - \boldsymbol{G}$ facere angulum angulo azimuthali $\boldsymbol{M}$ sphaeroïdici aequalem.

Angulus igitur F, quem cathetus alter $\frac{1}{2}\pi - g$ facit cum hypotenusa $\frac{1}{2}\pi - \boldsymbol{G}$, qui itaque catheto am u oppositus est, longitudinis sphaeroïdici angularis φ ad punctum $\boldsymbol{M}$ pertinentis erit longitudo sphaerica reducta, cuius itaque differentia a longitudine vera φ erit perexigua, ita ut F sit ipsius φ valor approximatus, et formam trianguli sphaerici modo descripti ipsam tamquam formam approximatam trianguli sphaeroïdici PAM spectari liceat.

Formulae vero quae nexum modo dictum omni modis exprimunt, sunt sequentes:

$$\begin{aligned}
&\sin \boldsymbol{G} = \cos u . \sin g , && \cot g = \cot \boldsymbol{G} . \cos F ,\\
&\sin \boldsymbol{G} = \cot \boldsymbol{M} . \cot F , && \cot g = \operatorname{tang} \boldsymbol{M} . \operatorname{sn} u ,\\
&\cos g = \cos \boldsymbol{G} . \sin \boldsymbol{M} , \quad \text{et} && \operatorname{tn} u = \operatorname{tang} F . \cos g ,\\
&\operatorname{sn} u = \cos \boldsymbol{G} . \sin F , && \cos \boldsymbol{M} = \sin g . \sin F ,\\
&\operatorname{tn} u = \cot \boldsymbol{G} . \cos \boldsymbol{M} , && \cos F = \operatorname{cn} u . \sin \boldsymbol{M} .
\end{aligned}$$

Quare argumenti u functiones iam determinatae formulis (7) articuli (10) nunc novis exprimuntur formulis his

$$(1.)\qquad \begin{cases} \operatorname{sn} u = \cot g \cot \boldsymbol{M} = \cos \boldsymbol{G} . \sin F , \\ \operatorname{cn} u = \dfrac{\sin \boldsymbol{G}}{\sin g} = \dfrac{\cos F}{\sin \boldsymbol{M}} , \\ \operatorname{tn} u = \cot \boldsymbol{G} \cos \boldsymbol{M} = \cos g \operatorname{tang} F , \end{cases}$$

et longitudo puncti $\boldsymbol{M}$ geographica reducta sphaerica formulis his

$$(2.)\qquad \cos F = \frac{\operatorname{tang} \boldsymbol{G}}{\operatorname{tang} g} = \frac{\operatorname{tang} \boldsymbol{L}}{\operatorname{tang} l} ,$$

$$(3.)\qquad \sin F = \frac{\cos \boldsymbol{M}}{\sin g} ,$$

$$(4.)\qquad \cot F = \sin \boldsymbol{G} . \operatorname{tang} \boldsymbol{M} ,$$

et reliqua est sola formula $\cos g = \cos \boldsymbol{G} . \sin \boldsymbol{M}$ conditionalis adimplenda, ut punctum $\boldsymbol{M}$ sit revera in linea geodaetica $\boldsymbol{AM}$, determinata solo loco puncti initialis $\boldsymbol{A}$ in meridiano habito pro primo.

E formula $\operatorname{tn} u = \cos g . \operatorname{tang} F$, si $\operatorname{am} u = \psi$ sumis, sequitur $\operatorname{tng} F = \dfrac{\operatorname{tang} \psi}{\cos g}$, quare differentiando obtines $\partial F = \dfrac{\cos^2 F}{\cos g \cos^2 \psi} . \partial \psi = \dfrac{\cos^2 F}{\cos g \operatorname{cn}^2 u} . \partial \psi = \dfrac{\sin^2 \boldsymbol{M}}{\cos g} . \partial \psi$, sive

$$\partial F = \frac{\cos g}{\cos^2 \boldsymbol{G}} . \partial \psi .$$

Quia vero in articulo (10) invenimus formulam

$$\frac{\partial s}{A} = \sin P . \partial \psi,$$

et quia insuper est $\partial \varphi = \frac{\cos g}{\cos^2 G} \cdot \frac{\partial s}{A}$, componis $\partial \varphi = \sin P . \frac{\cos g}{\cos^2 G} . \partial \psi$, sive

$$\partial \varphi = \sin P . \partial F,$$

sive

$$(5.) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial F} = \frac{\partial s}{A \partial \psi} = \sin P.$$

Quia e formula $\cot P = \operatorname{tang} e . \cos L$ patet, esse $P < \frac{1}{2}\pi$, quamdiu punctum M non sit ipse polus, est $\frac{\partial s}{A} < \psi$ et $\partial \varphi < \partial F$, ideoque

$$(6.) \qquad s < A . \operatorname{am} u \quad \text{et} \quad \varphi < F.$$

Quia vero P est inter fines $\frac{1}{2}\pi - e$ et $\frac{1}{2}\pi$, $\sin P$ est inter fines $\cos e$ et 1, unde sequitur, $1 - \sin P$ esse differentiam minorem functione $2 \sin^2 \frac{1}{2} e$ sive complanatione polorum minorem.

Hinc sequitur $A . \operatorname{am} u$ et F revera esse valores approximatos quantitatum s et φ, et quia crescente latitudine L differentia $1 - \sin P$ decrescit, differentiae positivae exiguae

$$A . \operatorname{am} u - s \quad \text{et} \quad F - \varphi$$

pariter crescente altitudine puncti M diminuentur.

14.

De triangulo spaeroïdico *APD* et de ipsius proiectione sphaerica.

Si lineam geodaeticam AM prolongas usque ad aequatorem, qui ipsa secetur in D, oritur triangulum sphaeroïdicum APD; quare punctum M nunc collocandum est in D, sive, quod eodem redit, latitudo

$$L = 0$$

sumenda est, quo fit $u = K$, si K est quadrans modularis, qui pertineat ad modulum $k = \sin \vartheta$. Simul fit $\Theta = 0$, et quia angulus azimuthalis $M = D = \frac{1}{2}\pi - g$ fit, est

$$'\Theta = \operatorname{arc\,tang} (\operatorname{tang} e \sin g) = \vartheta.$$

Quare si punctum M transit inde ab initio A usque ad D, amplitudo

Θ decrescit inde ab $\Theta = \vartheta$ usque ad $\Theta = 0$,

et amplitudo

$'\Theta$ crescit inde ab $'\Theta = 0$ usque ad $'\Theta = \vartheta$.

Formula $s = A \sin p \,.\, \mathrm{el}\, u = \frac{B}{\cos \vartheta} \,.\, \mathrm{el}\, u$, quae arcum AM exprimit, nunc fit, ponendo $L = 0$,

$$(1.) \qquad AD = A \sin p \,.\, E = \frac{B}{\cos \vartheta} \,.\, E \,.$$

si E designat quadrantem ellipticum pertinentem ad modulum $k = \sin \vartheta$, et cuius semiaxis maior est unitas.

Longitudinem geographicam puncti D si insignis litera Φ, erit angulus $APD = ECD = \Phi$, et formula generalis $\varphi = D(u, a)$ nunc praebet

$$(2.) \quad \Phi = D(K, a) = K \,.\, \mathrm{el}' a - (K - E)\, a,$$

si in usum vocas formulam in (§. 118) theoriae functionum modularium demonstratam. Longitudo arcus aequatoris ED igitur est $A \,.\, \Phi$.

Punctum vero M, curvam geodaeticam describens, inde ab ipsius puncto supremo et simul initiali A descendit ad aequatorem in D, et viam continuans, a sphaeroïdis superficie septentrionali in australem transit, et simul aequatoris radius CF gyratur circa centrum C; angulus $ACF = \varphi$ fit $= 2 \,.\, \Phi$, si punctum M latitudinem australem maximam $L = -l$ assecutus est. Punctum M viam praescriptam ulterius persequitur quo latitudo negativa decrescit, et si $L = 0$ fit, angulus $\varphi = 3\,\Phi$ erit; latitudo L nunc fit positiva, et punctum M in superficie septentrionali usque ad latitudinem maximam positivam $L = l$ ascendit, quo angulus $\varphi = 4\,\Phi$ fit; punctum M viam alterius persequitur, unde patet angulum φ crescere in infinitum, et lineam geodaeticam esse infinitam, si ratio $2\pi : \Phi$ non sit ea numerorum integrorum, sive quod eodem redit, si 2π et Φ sint incommensurabiles. Si vero ratio $2\pi : \Phi$ est ea numerorum integrorum, linea geodaetica in se ipsam redibit, nec amplius est linea infinita.

Arcus AM fit distantia polaris PM sphaeroïdica ipsa, si angulum azimuthalem $M = 0$ sumis, quo fit

$$'\Theta = \text{arc tang}\,(\text{tang}\, e \,.\, \cos L) = \tfrac{1}{2}\pi - P, \text{ et}$$

$$\Theta = \text{arc sin}\,(\sin e \,.\, \sin L) = \text{arc cos}\left(\frac{\cos e}{\sin P}\right) = \text{arc tang}\,(\text{tang}\, e \,.\, \sin G)$$

Quare nunc est $\cos \Theta \cdot \cos' \Theta = \cos e$, unde perspicis, nunc fieri $\vartheta = e$; quo fit $= g = \frac{1}{2}\pi$ et $p = \frac{1}{2}\pi$. Quare formula generalis $s = A \sin p \,.\, \mathrm{el}\, u$ nunc fit

$$PM = A \,.\, \mathrm{el}\, u \text{ pro modulo } k = \sin e.$$

Quia nunc vero est $\mathrm{tn}\, u = \frac{\cot P}{\sin \Theta} = \cot G$, est $\mathrm{am}\, u = \frac{1}{2}\pi - G$, et quia $\mathrm{tn}\, c = \frac{\tan \Theta}{\cos P} = \tan L$, est $\mathrm{amc}\, u = L$.

Pariter est $PA = A.\mathrm{el}u$ pro modulo $k = \sin e$ et pro amplitudinibus $\mathrm{am}\,u = \frac{1}{2}\pi - g$, et $\mathrm{amc}\,u = l$.

Quadrans denique $PD = A.E$ est, si E est quadrans ellipticus pertinens ad modulum $k = \sin e$.

Formula denique $\mathrm{tn}\,u = \cos g \cdot \mathrm{tang}\,F$ edocet, si punctum M transit in D, quo $\mathrm{am}\,u = \frac{1}{2}\pi$ fit, fieri et $F = \frac{1}{2}\pi$; quare angulum reductum sphaericum, qui ad angulum sphaeroïdicum APD pertineat, esse rectum. Trigonum igitur in articulo (13) consideratum sphaericum duos nunc continet angulos rectos, quo fit ut tertius angulus M catheto opposito constanti $\frac{1}{2}\pi - g$ aequalis sit.

15.

De triangulo sphaeroïdico *MPD* et de ipsius proiectione sphaerica.

Quia latera PM et PD trianguli MPD iam in articulo praecedenti sunt determinata, superest, ut eruamus formulas, quibus exprimantur longitudo lineae geodaeticae MD, quae est latus tertium, et angulus MPD.

Quia vero sumto modulo $k = \sin\vartheta$ est $AD = \sin p.E$ et $AM = A\sin p.\mathrm{el}u$, est

$$(1.) \qquad MD = A\sin p.(E - \mathrm{el}u),$$

quae vero differentia adhibita formula 4 in (§. 64) theoriae functionum modularium reducitur ad

$$MD = A\sin p.(\mathrm{elc}u - k^2\,\mathrm{sn}u.\mathrm{snc}u).$$

Quia vero $\mathrm{sn}u = \frac{\sin'\Theta}{\sin\vartheta}$ et $\mathrm{snc}u = \frac{\sin\Theta}{\sin\vartheta}$, est $k^2\,\mathrm{sn}u.\mathrm{snc}u = \sin\Theta.\sin'\Theta$, ideoque

$$(2.) \qquad MD = A\sin p\,(\mathrm{elc}u - \sin\Theta\sin'\Theta).$$

Quia denique $\sin p = \frac{\cos e}{\cos\vartheta}$, et $\cos\vartheta = \cos\Theta.\cos'\Theta$, invenis

$$(3.) \qquad MD = \frac{B}{\cos\vartheta}.\mathrm{elc}u - B\,\mathrm{tang}\,\Theta.\mathrm{tang}'\Theta.$$

Quia angulus $APD = \Phi$ et angulus $APM = \varphi$, erit angulus $MPD = \Phi - \varphi$. Quia vero $\Phi = D(K, a)$ et $\varphi = D(u, a)$, adiumento formularum 7 in (§. 120) theoriae functionum modularium erutarum invenis, arcum anguli MPD esse

$$(4.) \qquad \Phi - \varphi = {}'C(K - u,\ K' - a),$$

dummodo quadrans modularis K' eodem modo referatur ad modulum $k' = \cos\vartheta$, quo quadrans modularis K ad modulum $k = \sin\vartheta$.

Ope huius formulae angulum MPD prius computare potes, quam angulos $APM = \varphi$ et $APD = \Phi$.

Quia formulae (3 et 4) referuntur ad argumentum $K - u$, sive amplitudinem amc u, in geometrice construendis functionibus modularibus aliud adhibendum est trigonum sphaericum. Si sumis amplitudinem $\frac{1}{2}\pi - \text{amc}\, u = \psi'$, formulae $\text{snc}\, u = \frac{\sin\Theta}{\sin\vartheta} = \frac{\sin e \cdot \sin L}{\sin\vartheta} = \frac{\sin L}{\sin l}$, sive $\cos\psi = \frac{\sin L}{\sin l}$ sic exhibita $\cos(\frac{1}{2}\pi - L) = \cos(\frac{1}{2}\pi - l) \cdot \cos\psi'$ edocet, $\frac{1}{2}\pi - L$ esse hypotenusam trianguli rectangularis sphaerici, cuius catheti sint $\frac{1}{2}\pi - l$ et $\psi' = \frac{1}{2}\pi - \text{amc}\, u$.

Inventa insuper in articulo (13) formula $\cos F = \frac{\text{tang}\, L}{\text{tang}\, l}$ sic exhibita $\text{tg}(\frac{1}{2}\pi - l) = \text{tang}(\frac{1}{2}\pi - L) \cdot \cos F$ indicat hypotenusam $\frac{1}{2}\pi - L$ cum catheto $\frac{1}{2}\pi - l$ facere angulum F, qui sit longitudinis geographicae valor reductus sphaericus, et eiusdem magnitudinis sit, cuius ille, quem in triangulo articuli (13) alio hypotenusa $(\frac{1}{2}\pi - G)$ faciat cum catheto $\frac{1}{2}\pi - g$. At triangulum novum loco anguli M, qui lineae geodaeticae est azimuth in puncto M, continet angulum quendam N ab illo angulo M parum diversum talem, ut ipsum pro valore approximato sphaerico anguli M sphaeroïdici habere queas, quia demonstrabitur, fieri $N = M$, si excentricitas sphaeroïdica angularis $e = 0$ fiat.

Si cathetum $\frac{1}{2}\pi - \text{amc}\, u$ eo prolongas, ut fiat quadrans, et ipsius finem cum vertice anguli F quadrante sphaerico coniungis, triangulus novus FND oritur, cuius latus FD est quadrans et cum latere amc u facit angulum $\frac{1}{2}\pi - l$, cum latere vero FN facit angulum $\frac{1}{2}\pi - F$; latus $FN = \frac{1}{2}\pi - L$ cum latere ND facit angulum $FND = \pi - N$; unde perspicis, triangulum FND, hoc sphaericum, eodem modo pertinere ad triangulum sphaeroïdicum MPD, quo triangulus sphaericus articuli (13) pertineat ad triangulum sphaeroïdicum APM. Triangulum nempe sphaericum FND habendum est pro trianguli sphaeroïdici MPD proiectione sphaerica.

Nexum multifarium inter quantitates has omnimodis exprimunt formulae sequentes decem:

$$(5.)\quad \begin{cases} \sin L = \sin l \,.\, \text{snc}\, u\,, & \cot l = \cot L \,.\, \cos F\,, \\ \sin L = \cot F \,.\, \cot N\,, & \cot l = \text{tang}\, N \,.\, \text{cnc}\, u\,, \\ \cos l = \cos L \,.\, \sin N\,, & \text{et} \quad \cot F = \text{tnc}\, u \,.\, \cos l\,, \\ \text{cnc}\, u = \cos L \,.\, \sin F\,, & \cos N = \sin l \,.\, \sin F\,, \\ \text{tang}\, L = \text{tnc}\, u \,.\, \cos N\,, & \cos F = \text{snc}\, u \,.\, \sin N\,, \end{cases}$$

suppeditatae trigonometriae sphaericae principiis, inter quas et eas invenis, quibus argumenti $K - u$ functiones modulares exprimuntur.

Formulae hae sunt sequentes hoc modo exhibitae:

$$\operatorname{snc} u = \frac{\sin L}{\sin l} = \frac{\cos F}{\sin N},$$
$$\operatorname{cnc} u = \cos L \sin F = \cot l . \cot N,$$
$$\operatorname{tnc} u = \frac{\operatorname{tang} L}{\cos N} = \frac{\cot F}{\cos l}.$$

Superest, ut angulus azimuthalis M comparetur cum ipsius valore approximato sive reducto sphaerico.

Formulae $\cos F = \operatorname{snc} u . \sin N$ et $\cos F = \operatorname{cn} u . \sin M$ praebent relationem $\sin N = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{snc} u} . \sin M = \operatorname{dn} u . \sin M$, sive

$$\text{(6.)} \qquad \sin N = \cos' \Theta . \sin M.$$

Formulae $\operatorname{cnc} u = \cot l . \cot N$ et $\operatorname{sn} u = \cot g . \cot M$, quia $\operatorname{cnc} u = \frac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} = \operatorname{dnc} u . \operatorname{sn} u$ praebent $\operatorname{dnc} u = \frac{\operatorname{tang} g}{\operatorname{tang} l} . \frac{\operatorname{tang} M}{\operatorname{tang} N}$, et quia $\operatorname{tang} g = \operatorname{tang} l . \cos e$, est

$$\text{(7.)} \qquad \operatorname{tang} N = \frac{\cos e}{\cos \Theta} . \operatorname{tang} M.$$

Quia vero $\cos \Theta . \cos' \Theta = \cos \vartheta$, et $\frac{\cos \vartheta}{\cos e} = \frac{1}{\sin p}$, dividendo obtines relationem memorabiliorem

$$\text{(8.)} \qquad \cos N = \frac{1}{\sin p} . \cos M,$$

e qua perspicis rationem cosinuum anguli azimuthalis ipsius et reducti sphaerici pro quovis curvae puncto M esse eandem, et esse $N < M$.

Aequationem conditionalem a puncto M, ut in linea geodaetica sit, ad implendam, nunc ope anguli azimuthalis reducti N alio modo exprimere in potestate est; aequatio illa est $\cos g = \cos G . \sin M$, quae multiplicata factore $\cos' \Theta$ fit, ob aequationem (6), $\cos g \cos' \Theta = \cos G \cos' \Theta . \sin M = \cos G . \sin N$, et quia $\cos' \Theta = \frac{\cos \vartheta}{\cos \Theta}$, oritur $\cos g \cos \vartheta = \cos G \cos \Theta . \sin N$, sive

$$\cos l = \cos L . \sin N;$$

quae formula iam invenitur inter formulas praecedentes (5), cuius vero vim eandem esse ac formulae similis $\cos g = \cos G . \sin M$, nunc demonstratum est. Adhibito angulo azimuthali reducto N, aequationes quibus functiones Θ et $'\Theta$ exprimuntur fundamentales

$$\operatorname{tang}' \Theta = \operatorname{tang} e \cos L \cos M,$$
$$\sin \Theta = \sin e \sin L$$

transformabis in ipsis similes has non minus memorabiles:

$$(9.)\qquad \begin{cases} \sin'\Theta = \sin e \cos G \cos N \\ \operatorname{tang}\Theta = \operatorname{tang} e \sin G, \end{cases}$$

dummodo memineris, esse $\cos\Theta . \cos'\Theta = \cos\vartheta$, et in usum vocas formulam praecedentem (8).

16.

Quadrantes sphaeroïdici exprimuntur seriebus rapide convergentibus.

Quadrantes meridianorum aequales $PE = PF = PD$ sunt quadrantes ellipsium congruarum, quarum excentricitas communis est $\sin e$. Si igitur sumis signa

$$(1.)\quad \begin{cases} \varepsilon_0 = 1 \;;\; \varepsilon_1 = \frac{1}{2^2} \;;\; \varepsilon_2 = \frac{1^2.3}{2^2.4^2} \;;\; \varepsilon_3 = \frac{1^2.3^2.5}{2^2.4^2.6^2} \;;\; \varepsilon_4 = \frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}; \text{ etc.} \\ \text{sive} \\ \varepsilon_0 = 1 \;;\; \varepsilon_1 = \frac{1}{4} \;;\; \varepsilon_2 = \frac{3}{64} \;;\; \varepsilon_3 = \frac{5}{256} \;;\; \varepsilon_4 = \frac{175}{16384}; \text{ etc.} \end{cases}$$

quae et in sequentibus retinebimus, adhibita formula (2) in (§. 102) theoriae functionum modularium, est

$$(2.)\quad PE = PF = PD = \tfrac{1}{2}\pi A(1 - \varepsilon_1 \sin^2 e - \varepsilon_2 \sin^4 e - \varepsilon_3 \sin^6 e - \varepsilon_4 \sin^8 e - - \ldots\ldots)$$

Formula haec, quia $e = 0{,}0806044 = 4^0\ 37'\ 5''838$, ideoque $\sin e < 0{,}0\ 806044$ est, satis rapide convergit.

Si longitudinem lineae geodaeticae, inde ab initio A usque ad intersectionem D cum aequatore, litera G significas, est $AD = G = A \sin p . E = \frac{B}{\cos\vartheta} . E$ pro modulo $k = \sin\vartheta$. Quare est

$$(3.)\quad \begin{cases} G = \tfrac{1}{2}\pi A \sin p (1 - \varepsilon_1 \sin^2\vartheta - \varepsilon_2 \sin^4\vartheta - \varepsilon_3 \sin^6\vartheta - \varepsilon_4 \sin^8\vartheta - - \ldots\ldots) \\ \text{sive} \\ G = \tfrac{1}{2}\pi . \frac{B}{\cos\vartheta} . (1 - \varepsilon_1 \sin^2\vartheta - \varepsilon_2 \sin^4\vartheta - \varepsilon_3 \sin^6\vartheta - \varepsilon_4 \sin^8\vartheta - - \ldots\ldots) \end{cases}$$

et quia ab formulas $\operatorname{tang}\vartheta = \sin g . \operatorname{tang} e$ et $\sin\vartheta = \sin l . \sin e$ est $\sin\vartheta < \sin e$, series haec et rapidius convergit quam series (2).

Quadrans modularis ad modulum $k = \sin\vartheta$ pertinens litera K indicatus, adhibitis signis

$$(4.)\quad \begin{cases} \delta_0 = 1 \;;\; \delta_1 = \frac{1^2}{2^2} \;;\; \delta_2 = \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} \;;\; \delta_3 = \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} \;;\; \delta_4 = \frac{1^2.3^2.5^2.7^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}; \ldots\ldots \\ \delta_0 = 1 \;;\; \delta_1 = \frac{1}{4} \;:\; \delta_2 = \frac{9}{64} \;;\; \delta_3 = \frac{25}{256} \;;\; \delta_4 = \frac{1225}{14384}; \ldots\ldots \end{cases}$$

exprimitur serie

(5.) $K = \frac{1}{2}\pi.(1 + \delta_1 \sin^2\vartheta + \delta_2.\sin^4\vartheta + \delta_3.\sin^6\vartheta + \delta_4.\sin^8\vartheta + \ldots\ldots)$

Numeri absoluti (1 et 4) sequuntur leges, quae exprimuntur formulis $\varepsilon_r = \frac{(2r-3)(2r-1)}{2r\cdot 2r}.\varepsilon_{r-1}$ et $\delta_r = \frac{(2r-1)(2r-1)}{2r\cdot 2r}.\delta_{r-1}$, quarum prima vero non valet pro $r = 1$.

Vim signorum δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 ..... et in sequentibus retinebimus.

Inter quadrantes sphaeroïdicos referimus et arcum anguli $APD = \Phi = D(K,a)$, qui est differentia longitudinum geographicarum, quae pertinent ad puncta A et D extrema lineae geodaeticae AD sive quadrantis geodaetici G. Ut igitur quadrantem hunc Φ serie exprimamus in formulis (§. 261) theoriae functionum modularium, ponatur $\mathrm{am}\, u = \frac{1}{2}\pi$, quo fit

$$D(K,a) = \tfrac{1}{2}\pi(1 - \overset{0}{A} - \overset{1}{A} - \overset{2}{A} - \overset{3}{A} \ldots\ldots).$$

Quia vero in fine articuli (12) vidimus, esse $\frac{1}{\mathrm{sn}'a} = \frac{1}{\sin p}$; $\frac{1}{\mathrm{tnc}'a} = \tan g$; $\frac{1}{\mathrm{tn}'a} = \cot p$, ideoque $\frac{1}{\mathrm{tn}'a\,\mathrm{tnc}'a} = k$, sive $\sin\vartheta = \tan g.\cot p$, nec non $\frac{\mathrm{sn}'a}{\mathrm{snc}'a} = \mathrm{tn}'a\,\mathrm{dn}'\alpha = \frac{\sin p}{\cos g} = \sin e \tan p$, invenis

$$\overset{0}{A} = \left(\frac{1}{\sin p} - 1\right)\sin e \tan p$$

$$\overset{1}{A} = -\frac{1}{2}\tan^2 g\left(\frac{1}{\sin p} - 1 - \frac{1}{2}\cot^2 p\right).\sin e \tan p$$

$$\overset{2}{A} = +\frac{1.3}{2.4}\tan^4 g\left(\frac{1}{\sin p} - 1 - \frac{1}{2}\cot^2 p + \frac{1}{2.4}\cot^4 p\right).\sin e \tan p$$

$$\overset{3}{A} = -\frac{1.3.5}{2.4.6}\tan^6 g\left(\frac{1}{\sin p} - 1 - \frac{1}{2}\cot^2 p + \frac{1}{2.4}\cot^4 p - \frac{1.3}{2.4.6}\cot^6 p\right).\sin e \tan p$$

etc. etc.

Quia vero $\frac{1}{\sin p} = (1+\cot^2 p)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\cot^2 p - \frac{1}{2.4}\cot^4 p + \frac{1.3}{2.4.6}.\cot^6 p - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cot^8 p + \ldots$ vides, functionem $\overset{r}{A}$ esse positivam, quia $\cot p < 1$, et praeter factorem $\sin e.\tan p$ continere factorem $\varepsilon_r.\sin^{2r}.\vartheta$.

Si itaque $\varepsilon_r.\sin e.\tan p.\sin^{2r}\vartheta.\overset{r}{A}$ ponis loco $\overset{r}{A}$, invenis seriem

(6.) $\Phi = \frac{1}{2}\pi - \sin e \tan p.(\overset{0}{A} + \varepsilon_1 \overset{1}{A}\sin^2\vartheta + \varepsilon_2 \overset{2}{A}.\sin^4\vartheta + \varepsilon_3.\overset{3}{A}.\sin^6\vartheta + \varepsilon_4 \overset{4}{A}.\sin^8\vartheta + \ldots\ldots)$

(7.) in qua erit $\overset{0}{A} = \frac{1}{\sin p} - 1 = \frac{\cos\vartheta}{\cos e} - 1 = \frac{2\sin^2(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}p)}{\sin p} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(e-\vartheta)\sin\frac{1}{2}(e+\vartheta)}{\cos e}$.

Inter quantitates reliquas $\overset{r}{A}$ invenis relationem

$$\varepsilon_r . \overset{r}{A} . \sin^{2r}\vartheta = -\frac{2r-1}{2r} \operatorname{tang}^2 g . \varepsilon_{r-1} . \overset{r-1}{A} . \sin^{2r-2}\vartheta + \varepsilon_r . \sin^{2r}\vartheta ,$$

quam reducis ad $\overset{r}{A} = -\frac{2r-1}{2r} \cdot \frac{\operatorname{tang}^2 g}{\sin^2\vartheta} \cdot \frac{\varepsilon_{r-1}}{\varepsilon_r} \cdot \overset{r-1}{A} + 1$; quia vero $\frac{\operatorname{tang} g}{\sin\vartheta} = \operatorname{tang} p$ recurrentis calculi regulam exprimit formula:

$$(8.) \qquad \overset{r}{A} = 1 - \frac{2r}{2r-3} \cdot \operatorname{tang}^2 p . \overset{r-1}{A} \text{ pro } r > 1.$$

Si index $r = 1$ est, valet relatio

$\overset{1}{A} = 1 - \operatorname{tang}^2 p . \overset{0}{A}$, et inde invenis valores sequentes:

$$\overset{2}{A} = 1 - 4\operatorname{tang}^2 p + 8\operatorname{tang}^4 p . \overset{0}{A}$$

$$\overset{3}{A} = 1 - 2\operatorname{tang}^2 p + 8\operatorname{tang}^4 p - 16\operatorname{tang}^6 p . \overset{0}{A}$$

$$\overset{4}{A} = 1 - \frac{8}{5}\operatorname{tang}^2 p + \frac{16}{5}\operatorname{tang}^4 p - \frac{64}{5}\operatorname{tang}^6 p - \frac{128}{5}\operatorname{tang}^8 p . \overset{0}{A}$$

$$\overset{5}{A} = 1 - \frac{10}{7}\operatorname{tang}^2 p + \frac{16}{7}\operatorname{tang}^4 p - \frac{32}{7}\operatorname{tang}^6 p + \frac{128}{7}\operatorname{tang}^8 p - \frac{256}{7}\operatorname{tang}^{10} p . \overset{0}{A}$$

et reliquos. Vides autem computum facillimum quantitatum $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$, $\overset{4}{A}$, etc. optime in numeris definitis institui recurrendo duce formula simplice (8), sive e formulis specialibus

$$(9.) \qquad \begin{cases} \overset{1}{A} = 1 - 2 . \operatorname{tang}^2 p . \overset{0}{A} \\ \overset{2}{A} = 1 - 4 . \operatorname{tang}^2 p . \overset{1}{A} \\ \overset{3}{A} = 1 - 2 . \operatorname{tang}^2 p . \overset{2}{A} \\ \overset{4}{A} = 1 - \frac{8}{5} . \operatorname{tang}^2 p . \overset{3}{A} \\ \overset{5}{A} = 1 - \frac{10}{7} . \operatorname{tang}^2 . \overset{4}{A} \quad \text{etc. etc.} \end{cases}$$

Loco factoris $\sin e . \operatorname{tang} p$, quia $\sin p = \frac{\cos e}{\cos\vartheta}$, sumi potest aequalis $\sin e . \operatorname{tang} p = \frac{\sin e \cos e}{\sqrt{[\sin(e-\vartheta)\sin(e+\vartheta)]}}$, quia $\operatorname{tang} p = \frac{\cos e}{\sqrt{[\sin(e-\vartheta)\sin(e+\vartheta)]}}$ invenis.

Quum $\frac{1}{\sin p} = 1 + \frac{1}{2}\cot^2 p - \frac{1}{2.4}\cot^4 p + \frac{1.3}{2.4.6}\cot^6 p - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cot^8 p + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\cot^{10} p - +..$, est

$\overset{0}{A} = \frac{1}{2}\cot^2 p - \frac{1}{2.4}\cot^4 p + \frac{1.3}{2.4.6}\cot^6 p - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}\cot^8 p + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}\cot^{10} p - + \ldots\ldots$, quae formulae (9) praebent

$$\overset{1}{A} = \frac{1}{4}\cot^2 p - \frac{1.3}{4.6}\cot^4 p + \frac{3.5}{4.6.8}\cot^6 p - \frac{3.5.7}{4.6.8.10}\cot^8 p + \frac{3.5.7.9}{4.6.8.10.12}\cot^{10} p - + \ldots\ldots$$

$$\overset{2}{A} = \frac{3}{6}\cot^2 p - \frac{3.5}{6.8}\cot^4 p + \frac{3.5.7}{6.8.10}\cot^6 p - \frac{3.5.7.9}{6.8.10.12}\cot^8 p + \frac{3.5.7.9.11}{6.8.10.14}\cot^{10} p - + \ldots\ldots$$

$$\overset{3}{A} = \frac{5}{8}\cot^2 p - \frac{5.7}{8.10}\cot^4 p + \frac{5.7.9}{8.10.12}\cot^6 p - \frac{5.7.9.11}{8.10.12.14}\cot^8 p + \frac{5.7.9.11.13}{8.10.12.14.16}\cot^{10} p - + \ldots$$

$$\overset{4}{A} = \frac{7}{10}\cot^2 p - \frac{7.9}{10.12}\cot^4 p + \frac{7.9.11}{10.12.14}\cot^6 p - \frac{7.9.11.13}{10.12.14.16}\cot^8 p + \frac{7.9.11.13.15}{10.12.14.16.18}\cot^{10} p -$$

$$- + \ldots\ldots \text{ etc.}$$

E formulis his perspicis, esse generaliter

$$\overset{r}{A} = \frac{2r-1}{2r+2}\cot^2 p - \frac{[2r-1, -2^2]}{[2r+2, -2^2]}\cot^4 p + \frac{[2r-1, -2^3]}{[2r+2, -2^3]}\cot^6 p - \frac{[2r-1, -2^4]}{[1r+2, -2^4]}\cot^8 p + - \ldots$$

et functionis $\overset{r}{A}$ limitem, crescente r in infinitum, esse

$$\overset{\infty}{A} = \cot^2 p - \cot^4 p + \cot^6 p - \cot^8 p + - \ldots\ldots = \frac{\cot^2 p}{1 + \cot^2 p} = \cos^2 p .$$

Quia vero $\overset{0}{A} = (1 - \sin p).\frac{1}{\sin p}$ et $\overset{r}{A}$ pro r infinito est $(1 - \sin p).(1 + \sin p)$, vides, rationem inter valorem functionis $\overset{r}{A}$ illum, qui est limes, et valorem primitivum $\overset{0}{A}$ esse $= \sin p(1 + \sin p)$, ideoque functionem $\overset{r}{A}$ esse talem, ut crescente indice r ipsius valores lentissime decrescant, si $\sin p < \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, et crescant, si $\sin p > \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ est.

Triplex ergo est seriei erutae (6) convergentia; prima est ea factorum 1, ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 ....., qui sunt numeri absoluti; secunda est ea potentiarum 1, $\sin^2\vartheta$, $\sin^4\vartheta$, $\sin^6\vartheta$, ...; tertia denique est ea functioum $\overset{0}{A}$, $\overset{1}{A}$, $\overset{2}{A}$, $\overset{3}{A}$, ..., quamvis exigua si $\sin p < \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$, quare ob accedentem hanc seriem tertiam convergentia seriei (3) aut superatur ea seriei (6), si $\sin p < \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, aut eam superat, si $\sin p > \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, sive $\sin p(1 + \sin p) > 1$ est.

17.

Idem quadrans Φ exprimitur serie convergente altera.

Quia in (§. 120) theoriae functionum modularium demonstratum est, esse $'C(K, K' - a) = D(K, a)$, est $\Phi = 'C(K, K - a)$, ideoque formula in (§. 263) theoriae illius adhibenda est. Quem in finem loco citato sumatur argumentum $u = K$, et $K' - a$ loco a. Quia vero in fine articuli (12) invenimus $\frac{1}{k'\mathrm{sn}'a} = \frac{1}{\cos e'}$, $\mathrm{dnc}'a = \sin l$, $\mathrm{dn}'a = \sin e$, et $k'^2\mathrm{sn}'a\,\mathrm{snc}'a = \cos e \cos l$, sumtis quantitatibus

$$\Delta_0 = \left(\frac{1}{\cos e} - 1\right).\cos e \cos l$$

$$\Delta_1 = \frac{1}{2}\sin^2 l\left(\frac{1}{\cos e} - 1 - \frac{1}{2}\sin^2 e\right)\cos e \cos l$$

$$\Delta_2 = \frac{1.3}{2.4}\sin^4 l\left(\frac{1}{\cos e} - 1 - \frac{1}{2}\sin^2 e - \frac{1.3}{2.4}\sin^4 e\right).\cos e\cos l$$

$$\Delta_3 = \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^6 l\left(\frac{1}{\cos e} - 1 - \frac{1}{2}\sin^2 e - \frac{1.3}{2.4}\sin^4 e - \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^6 e\right).\cos e\cos l$$

et reliquis, invenis seriem hanc:

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\pi(1 - \Delta_0 - \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3 .....).$$

Quia vero est $\frac{1}{\cos e} = (1-\sin^2 e)^{-\frac{1}{2}} = +\frac{1}{2}\sin^2 e + \frac{1.3}{2.4}\cdot\sin^4 e + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^6 e + ...$ et quia $\mathrm{dnc}'a\,.\,\mathrm{dn}'a = k = \sin\vartheta =$ sive $\sin l$, mox perspicis, functioni Δ_r praeter factorem constantem $\cos e\cos l$ inesse et factores δ_r et $\sin^{2r}\vartheta$. Si itaque sumis $\Delta_r = \delta_r\,.\cos e\,.\cos l\,.\sin^{2r}\vartheta\,.\overset{r}{\Delta}$, series antecedens fit

$$(1.)\quad \Phi = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\pi\cos e\cos l(\overset{0}{\Delta} + \delta_1\,.\overset{1}{\Delta}\,.\sin^2\vartheta + \delta_2\,.\overset{2}{\Delta}\,.\sin^4\vartheta + \delta_3\,.\overset{3}{\Delta}\,.\sin^6\vartheta + \delta_4\,.\overset{4}{\Delta}\,.\sin^8\vartheta + ...).$$

Quum vero nunc est

$$(2.)\qquad \overset{0}{\Delta} = \frac{1}{\cos e} - 1 = \frac{1-\cos e}{\cos e} = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}e}{\cos e},$$

functiones reliquas $\overset{1}{\Delta}, \overset{2}{\Delta}, \overset{3}{\Delta}, \overset{4}{\Delta}, ...$ eruamus, quas facillime invenimus calculo recurrente.

Quia vero $\delta_r\,.\sin^{2r}\vartheta\,.\overset{r}{\Delta} = \frac{2r-1}{2r}\sin^2 l\,.(\delta_{r-1}\,.\overset{r-1}{\Delta}\,.\sin^{2r-2}\vartheta) - \delta_r\,.\sin^{2r}\vartheta$ esse ex intuitu ipso patet, est

$$\overset{r}{\Delta} = \frac{2r-1}{2r}\cdot\frac{\delta_r - 1}{\delta_r}\cdot\frac{\sin^2 l}{\sin^2\vartheta}\cdot\overset{r-1}{\Delta} - 1$$

et quia $\frac{\sin l}{\sin\vartheta} = \frac{1}{\sin e}$ et $\frac{\delta_{r-1}}{\delta_r} = \frac{2r.2r}{(2r-1)(2r-1)}$, calculi recurrentis regula exprimitur formula simplice

$$(3.)\qquad \overset{r}{\Delta} = \frac{2r}{2r-1}\cdot\frac{1}{\sin^2 e}\cdot\overset{r-1}{\Delta} - 1.$$

Patent igitur formulae

$$(4.)\qquad \begin{cases} \overset{1}{\Delta} = \frac{2}{1}\cdot\left(\frac{1}{\sin e}\right)^2\cdot\overset{0}{\Delta} - 1, \\ \overset{2}{\Delta} = \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sin e}\right)^2\cdot\overset{1}{\Delta} - 1, \\ \overset{3}{\Delta} = \frac{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{\sin e}\right)^2\cdot\overset{2}{\Delta} - 1, \\ \overset{4}{\Delta} = \frac{8}{7}\cdot\left(\frac{1}{\sin e}\right)^2\cdot\overset{3}{\Delta} - 1, \\ \overset{5}{\Delta} = \frac{10}{9}\cdot\left(\frac{1}{\sin e}\right)^2\cdot\overset{4}{\Delta} - 1, \end{cases}$$

et reliquae,

quarum ope calculus recurrens est facillimus. Quia $\overset{1}{\Delta}, \overset{2}{\Delta}, \overset{3}{\Delta}, \overset{4}{\Delta}, \ldots$ sunt functiones excentricitatis sphaeroïdicae $(\sin e)$, ipsius valores non a situ lineae geodaeticae, sed a solo corporis sphaeroïdici forma pendent; ipsarum calculus est facillimus e formulis modo propositis. Insuper patet, has functiones esse semper positivas, dummodo memor es seriei supra prolatae, qua $\frac{1}{\cos e}$ exprimitur; quam si adhibes, invenis

$$\overset{0}{\Delta} = \frac{1}{2}\sin^2 e + \frac{1.3}{2.4}\sin^4 e + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^6 e + \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^8 e + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\sin^{10} e + \ldots$$

quare ob formulas (4) erit

$$\overset{1}{\Delta} = \frac{3}{4}\sin^2 e + \frac{3.5}{4.6}\sin^4 e + \frac{3.5.7}{4.6.8}\sin^6 e + \frac{3.5.7.9}{4.6.8.10}\sin^8 e + \frac{3.5.7.9.11}{4.6.8.10.12}\sin^{10} e + \ldots$$

$$\overset{2}{\Delta} = \frac{5}{6}\sin^2 e + \frac{5.7}{6.8}\sin^4 e + \frac{5.7.9}{6.8.10}\sin^6 e + \frac{5.7.9.11}{6.8.10.12}\sin^8 e + \frac{5.7.9.11.13}{6.8.10.12.14}\sin^{10} e + \ldots$$

$$\overset{3}{\Delta} = \frac{7}{8}\sin^2 e + \frac{7.9}{8.10}\sin^4 e + \frac{7.9.11}{8.10.12}\sin^6 e + \frac{7.9.11.13}{8.10.12.14}\sin^8 e + \frac{7.9.11.13.15}{8.10.12.14.16}\sin^{10} e + \ldots$$

etc. etc.

E formulis his iam perspicis, esse generalem expressionem

$$\overset{r}{\Delta} = \frac{2r+1}{2r+2}\sin^2 e + \frac{[2r+1, -2^2]}{[2r+2, -2^2]}\sin^4 e + \frac{[2r+1, -2^3]}{[2r+2, -2^3]}\sin^6 e + \frac{[2r+1, -2^4]}{[2r+2, -2^4]}\sin^6 e + \ldots$$

Quare crescente indice r in infinitum obtines functionis $\overset{r}{\Delta}$ limitem esse

$$\sin^2 e + \sin^4 e + \sin^6 + \sin^8 e + \ldots = \frac{\sin^2 e}{1-\sin^2 e} = \tang^2 e = \frac{(1-\cos e)(1+\cos e)}{\cos e . \cos e},$$

et quum functio initialis $\overset{0}{\Delta} = \frac{1-\cos e}{\cos e}$ est, crescente r in infinitum fit tandem $\overset{r}{\Delta} = \overset{0}{\Delta} \cdot \frac{1+\cos e}{\cos e}$. Unde perspicis, functionum $\overset{0}{\Delta}, \overset{1}{\Delta}, \overset{2}{\Delta}, \overset{3}{\Delta}$, etc. seriem divergere quidem, at divergentiam hanc esse tardissimam, ita ut series eruta (1) tum ob factores $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ etc., tum ob factores $1, \sin^2\vartheta, \sin^4\vartheta, \sin^6\vartheta$, etc. satis rapide convergat.

Quia $\sin l = \frac{\sin\vartheta}{\sin e}$, ideoque $\cos l = \frac{\sqrt{[\sin(e-\vartheta).\sin(e+\vartheta)]}}{\sin e}$, factoris $\cos e \cos l$ loco factor aequalis $\frac{\sqrt{[\sin(e-\vartheta).\sin(e+\vartheta)]}}{\tang e}$ poni potest, ita ut formula (1) quadrantis Φ valorem exprimens alias non contineat quantitates, quam e et ϑ.

Si formulas (4) componis, oriuntur

$$\overset{1}{\Delta} = \frac{2}{1}\cdot\left(\frac{1}{\sin e}\right)^2 \cdot \overset{0}{\Delta} - 1$$

$$\overset{2}{\Delta} = \frac{2.4}{1.3}\cdot\left(\frac{1}{\sin e}\right)^4 \cdot \overset{0}{\Delta} - \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{\sin^2 e}\right)^2 - 1$$

$$\overset{3}{A} = \frac{2.4.6}{1.3.5}\cdot\left(\frac{1}{\sin e}\right)^6\cdot\overset{0}{A} - \frac{4.6}{3.5}\cdot\left(\frac{1}{\sin e}\right)^4 - \frac{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{\sin e}\right)^2 - 1$$

$$\overset{4}{A} = \frac{2.4.6.8}{1.3.5.7}\cdot\left(\frac{1}{\sin e}\right)^8\cdot\overset{0}{A} - \frac{4.6.8}{3.5.7}\cdot\left(\frac{1}{\sin e}\right)^6 - \frac{6.8}{5.7}\cdot\left(\frac{1}{\sin e}\right)^4 - \frac{8}{7}\cdot\left(\frac{1}{\sin e}\right)^2 - 1,$$

et reliquae,

quae vero formulae parum proficiunt, quia calculus recurrens e formulis (4) commodius in numeris definitis ipsis instituatur.

18.

Argumentum u et ipsius complementum $K-u$, arcus lineae geodaeticae indefinitus s et ipsius complementum $G-s$, longitudinum geographicarum differentia φ et ipsius complementum $\Phi-\varphi$ seriebus exprimuntur rapide convergentibus.

Argumentum u coniunctum cum curvae geodaeticae puncto M, e data amplitudine $\mathrm{am}\,u$ optime computatur ope seriei (1) in (§. 105) theoriae functionum modularium derivatae, quae quidem series est

$$(1.)\quad u = \mathrm{am}\,u + \delta_1.\sin^2\vartheta.\lambda^1(\mathrm{am}\,u) + \delta_2.\sin^4\vartheta.\lambda^2(\mathrm{am}\,u) + \delta_3.\sin^6\vartheta.\lambda^3(\mathrm{am}\,u) + \delta_4.\sin^8\vartheta.\lambda^4(\mathrm{am}\,u) + \delta_5.\sin^{10}\vartheta.\lambda^5(\mathrm{am}\,u) + \cdots\cdots$$

Si in hac serie sumis $\mathrm{amc}\,u$ loco u, argumenti u complementum $K-u$ exprimitur serie

$$(2.)\quad K-u = \mathrm{amc}\,u + \delta_1\sin^2\vartheta.\lambda^1(\mathrm{amc}\,u) + \delta_2.\sin^4\vartheta.\lambda^2(\mathrm{amc}\,u) + \delta_3.\sin^6\vartheta.\lambda^3(\mathrm{amc}\,u) + \delta_4\sin^8\vartheta.\lambda^4(\mathrm{amc}\,u) + \delta_5.\sin^{10}\vartheta.\lambda^5\,\mathrm{amc}\,u) + \cdots\cdots$$

Quia arcus $AM = s$ lineae godaeticae est $s = \frac{B}{\cos\vartheta}.\mathrm{el}\,u$, formula (2), in (§. 105) theor. funct. mod. eruta, praebet seriem

$$(3.)\quad s = \frac{B}{\cos\vartheta}(\mathrm{am}\,u - \varepsilon_1\sin^2\vartheta.\lambda^1(\mathrm{am}\,u) - \varepsilon_2.\sin^4\vartheta.\lambda^2(\mathrm{am}\,u) - \varepsilon_3\sin^6\vartheta.\lambda^3(\mathrm{am}\,u) - \varepsilon_4\sin^8.\lambda^4(\mathrm{am}\,u) - \varepsilon_5.\sin^{10}\vartheta.\lambda^5(\mathrm{am}\,u) - -$$

et quia arcus $DM = \frac{B}{\cos\vartheta}(\mathrm{elc}\,u - k^2\,\mathrm{sn}\,u.\,\mathrm{snc}\,u) = G - s$, invenis seriem

$$(4.)\quad G - s = \frac{B}{\cos\vartheta}(\mathrm{amc}\,u - \sin^2\vartheta.\,\mathrm{sn}\,u.\,\mathrm{snc}\,u - \varepsilon_1\sin^2\vartheta\lambda^1(\mathrm{amc}\,u) - \varepsilon_2\sin^4\vartheta.\lambda^2(\mathrm{amc}\,u) - \varepsilon_3\sin^6\vartheta.\lambda^3(\mathrm{amc}\,u) - \varepsilon_4.\sin^8\vartheta.\lambda^4(\mathrm{amc}\,u) - - \cdots\cdots$$

Quia longitudinum geographicarum differentiam punctorum A et M sive arcum anguli APM invenimus $\varphi = D(u, a)$, formula (4) in (§. 261) theoriae functionum modularium inventa, quia est $F = \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{snc}'a}\right)$, adhibita functione

$\overset{r}{\Delta}$ in articulo **(15)** eruta, praebet seriem quadruplicis convergentiae, vel saltem triplicis:

$$\textbf{(5.)}\quad \varphi = F - \sin e \,.\, \mathrm{tang} p \,.\, [\overset{0}{A} \,.\, \mathrm{am}\, u + \varepsilon_1 \,.\, \overset{1}{A} \,.\, \sin^2\vartheta \,.\, \lambda'(\mathrm{am}\, u) + \varepsilon_2 \,.\, \overset{2}{A} \,.\, \sin^4\vartheta \,.\, \lambda^2(\mathrm{am}\, u)$$
$$+ \varepsilon_3 \,.\, \overset{3}{A} \,.\, \sin^6\vartheta \,.\, \lambda^3(\mathrm{am}\, u) + \varepsilon_4 \,.\, \overset{4}{A} \,.\, \sin^8\vartheta \,.\, \lambda^4(\mathrm{am}\, u) + \ldots\ldots]$$

et quia longitudinum differentiam earum, quae ad lineae geodaeticae puncta M et D pertinent, invenimus $\Phi - \varphi = {}'C(K-u, K'-a)$, formula (4) in (§. 265) theoriae functionum modularium eruta, adhibita functione $\overset{r}{\Delta}$ articuli praecedentis, praebet seriem hanc

$$\textbf{(6.)}\quad \Phi - \varphi = \tfrac{1}{2}\pi - F - \cos e \cos l \,.\, [\overset{0}{A} \,.\, \mathrm{amc}\, u + \delta_1 \,.\, \overset{1}{A} \,.\, \sin^2\vartheta \,.\, \lambda'(\mathrm{amc}\, u) + \delta_2 \,.\, \overset{2}{A} \,.\, \sin^4 A \,.\, \lambda^2(\mathrm{amc}\, u)$$
$$+ \delta_3 \,.\, \overset{3}{A} \,.\, \sin^6\vartheta \,.\, \lambda^3(\mathrm{amc}\, u) + \delta_4 \,.\, \overset{4}{A} \,.\, \sin^8\vartheta \,.\, \lambda^4(\mathrm{amc}\, u) + \ldots\ldots]$$

quae pariter rapide convergit.

Si tabulae paratae essent, et quidem tabulae unius argumenti sive anguli cuiusdam variabilis φ tales, ut contineant valores functionum $\lambda^1(\varphi)$, $\lambda^2(\varphi)$, $\lambda^3(\varphi)$, $\lambda^4(\varphi)$, ... $\lambda^r(\varphi)$, eiusmodi tabulae mirum in modum proficerent; ipsarum adiumento calculus formulis modo erutis praescriptus foret facillimus. Si formularum vero praecedentium formas elegantes spectas, mecum dolebis, tabulas satis accommodatas nondum esse paratas. Ideam tabularum talium iam animo concepit Ill. *Legendre*, in cuius operibus invenies quod nuperrime vidi tabulam, quae continet valores integralium formae $\int_0 \sin^{2r}\varphi \,.\, \partial\varphi$; at tabula haec est non satis extensa, et parum prodest, quia in usu ipso non desiderantur valores integralis illius, sed functionis valores, cuius alter factor est functio illa integralis, cuius vero alter factor est numerus absolutus, scilicet functionis

$$\lambda^r(\varphi) = \frac{2.4.6\ldots\ldots(2r)}{1.3.5\ldots\ldots(2r-1)} \cdot \int_0 \sin^{2r}\varphi \,.\, \partial\varphi,$$

quippe cuius vis analytica est multo praestantior. In initio sectionis decimae theoriae functionum modularium demonstratas invenis formulas finitas, quibus functionis $\lambda^r(\varphi)$ exprimitur valor:

$$\lambda^r(\varphi) = \varphi - \frac{r}{r+1} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{1} + \frac{r(r-1)}{(r+1)(r+2)} \cdot \frac{\sin 4\varphi}{2} - \frac{r(r-1)(r-2)}{(r+1)(r+2)(r+3)} \cdot \frac{\sin 6\varphi}{3}$$
$$\pm \ldots\ldots (-1)^r \cdot \frac{r(r-1)(r-2)\ldots\ldots 2.1}{(r+1)(r+2)(r+3)\ldots\ldots(2r)} \cdot \frac{\sin 2r\varphi}{r},$$

et ad usum magis aptam hanc:

$$\lambda^r(\varphi) = \varphi - \sin\varphi\cos\varphi - \frac{2}{3}\sin^3\varphi\cos\varphi - \frac{2.4}{3.5}\sin^5\varphi\cos\varphi - \frac{2.4.6}{3.5.7}\sin^7\varphi\cos\varphi - \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots - \frac{2.4.6\ldots\ldots(2r-2)}{3.5.7\ldots\ldots(2r-1)}\cdot\sin^{2r-1}\varphi.\cos\varphi.$$

quae facit recursionis regulam

$$\lambda^{r+1}(\varphi) = \lambda^r(\varphi) - \frac{2.4.6\ldots\ldots(2r)}{3.5.7\ldots\ldots(2r+1)}\cdot\sin^{2r+1}\varphi\cdot\cos\varphi.$$

Functio $\lambda^r(\varphi)$ insuper est eius generis, ut ipsius limes, crescente indice r in infinitum, sit $= 0$, dummodo amplitudo φ sit inter limites $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$; ita ut formulae illae, crescente r in infinitum, evadant

$$\varphi = \frac{\sin 2\varphi}{1} - \frac{\sin 4\varphi}{2} + \frac{\sin 6\varphi}{3} - \frac{\sin 8\varphi}{4} + - \ldots\ldots$$

$$\varphi = \sin\varphi\cos\varphi + \frac{2}{3}\sin^3\varphi\cos\varphi + \frac{2.4}{3.5}\sin^5\varphi\cos\varphi + \frac{2.4.6}{3.5.7}\sin^7\varphi\cos\varphi + \ldots\ldots$$

Functiones itaque in seriebus praecedentibus substituendae sunt

$$\lambda^1(\mathrm{am}\,u) = \mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u,$$

$$\lambda^2(\mathrm{am}\,u) = \mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{2}{3}\mathrm{sn}^3\,u\,\mathrm{cn}\,u,$$

$$\lambda^3(\mathrm{am}\,u) = \mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{2}{3}\mathrm{sn}^3\,u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{2.4}{3.5}\mathrm{sn}^5\,u\,\mathrm{cn}\,u,$$

$$\lambda^4(\mathrm{am}\,u) = \mathrm{am}\,u - \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{2}{3}\mathrm{sn}^3\,u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{2.4}{3.5}\mathrm{sn}^5\,u\,\mathrm{cn}\,u - \frac{2.4.6}{3.5.7}\mathrm{sn}^7\,u\,\mathrm{cn}\,n,$$

et reliquae, et pariter

$$\lambda^1(\mathrm{amc}\,u) = \mathrm{amc}\,u - \mathrm{snc}\,u\,\mathrm{cnc}\,u,$$

$$\lambda^2(\mathrm{amc}\,u) = \mathrm{amc}\,u - \mathrm{snc}\,u\,\mathrm{cnc}\,u - \frac{2}{3}\mathrm{snc}^3\,u\,\mathrm{cnc}\,u,$$

$$\lambda^3(\mathrm{amc}\,u) = \mathrm{amc}\,u - \mathrm{snc}\,u\,\mathrm{cnc}\,u - \frac{2}{3}\mathrm{snc}^3\,u\,\mathrm{cnc}\,u - \frac{2.4}{3.5}\mathrm{snc}^5\,u\,\mathrm{cnc}\,u.$$

etc., etc.

19.

Recurrendo computantur termini serierum, quibus u et $K-u$, exprimuntur.

Quia tabulae, quibus exprimantur valores functionis $\lambda^r(\varphi)$, hodie nondum paratae sunt, aliam excogitavi singulos terminos serierum articuli praecedentis computandi rationem, quae non tibi displicebit.

Si seriem $u = \mathrm{am}\,u + \delta_1\sin^2\vartheta.\lambda^1(\mathrm{am}\,u) + \delta_2.\sin^4\vartheta.\lambda^2(\mathrm{am}\,u) + \ldots\ldots$, quae est articuli praecedentis prima, hoc modo insignimus

(1.) $$u = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \ldots\ldots$$

certo est $A_0 = \operatorname{am} u$; $A_1 = \delta_1 . \sin^2\vartheta . \lambda^1(\operatorname{am} u)$; $A_2 = \delta_2 . \sin^4\vartheta . \lambda^2(\operatorname{am} u)$; etc. et generaliter

$$A_r = \delta_r . \sin^{2r}\vartheta . \lambda^r(\operatorname{am} u),$$

quare $\frac{A_r}{\delta_r \sin^{2r}\vartheta} = \lambda^r(\operatorname{am} u)$ et pariter $\frac{A_{r+1}}{\delta^{r+1} . \sin^{2r+1}\vartheta} = \lambda^{r+1}(\operatorname{am} u)$.

Quia vero, si sumis signum $\mu_r = \frac{2.4.6 \ldots (2r)}{3.5.7 \ldots (2r+1)}$, est $\lambda^{r+1}(\operatorname{am} u) = \lambda^r(\operatorname{am} u)$ $- \mu_r . \operatorname{sn}^{2r+1} . u . \operatorname{cn} u$, valet relatio $\frac{A_{r+1}}{\delta^{r+1} . \sin^{2r+2}\vartheta} = \frac{A}{\delta_r . \sin^{2r}\vartheta} - \mu_r . \operatorname{sn}^{2r+1} u . \operatorname{cn} u$, sive

$$A_{r+1} = \left(\frac{2r+1}{2r+2}\right)^2 . \sin^2\vartheta . A_r - \mu_r . \delta_{r+1} (\sin\vartheta)^{2r+2} . \operatorname{sn}^{2r+1} u . \operatorname{cn} u,$$

quare, substitutis valoribus signorum μ_r et δ_{r+1}, obtines

$$A_{r+1} = \left(\frac{2r+1}{2r+2} . \sin\vartheta\right)^2 . A - \frac{3.5.7 \ldots (2r+1)}{2.4.6 \ldots (2r) . (2r+2)^2} . (\sin\vartheta . \operatorname{sn} u)^{2r+1} . \sin\vartheta . \operatorname{cn} u.$$

Si itaque adhibes angulos auxiliares Θ et $'\Theta$ in articulo (14) determinatos formulis

$$(2) \quad \begin{cases} \Theta = \operatorname{arc\,sin}(\sin e . \sin L) & = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tang} e . \sin G) \\ {}'\Theta = \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tang} e . \cos M) & = \operatorname{arc\,sin}(\sin e . \cos G . \cos N), \end{cases}$$

formulae in articulo (10) inventae (7) praebent

$$\sin\vartheta . \operatorname{sn} u = \sin{}'\Theta \text{ et } \sin\vartheta . \operatorname{cn} u = \cos{}'\Theta \sin\Theta;$$

quia vero $\frac{\cos\vartheta}{\cos\Theta \cos{}'\Theta} = 1$, est $\sin\vartheta . \operatorname{cn} u = \cos\vartheta . \operatorname{tang}\Theta$, ideoque formula prior fit

$$A_{r+1} = \left(\frac{2r+1}{2r+2} . \sin\vartheta\right)^2 . A_r - \frac{3.5.7 \ldots (2r+1)}{2.4.6 \ldots 2r} . \frac{\cos\vartheta . \operatorname{tang}\Theta}{(2r+2)^2} . \sin^{2r+1}{}'\Theta.$$

Formulae speciales sunt igitur sequentes

$$A_0 = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tang}{}'\Theta}{\sin\Theta}\right),$$

$$(3.) \quad \begin{cases} A_1 = \left(\frac{1}{2}\sin\vartheta\right)^2 . A_0 - \frac{\cos\vartheta . \operatorname{tang}\Theta}{2^2} . \sin{}'\Theta, \\ A_2 = \left(\frac{3}{4}\sin\vartheta\right)^2 . A_1 - \frac{3}{2} . \frac{\cos\vartheta . \operatorname{tang}\Theta}{4^2} . \sin^3{}'\Theta, \\ A_3 = \left(\frac{5}{6}\sin\vartheta\right)^2 . A_2 - \frac{3.5}{2.4} . \frac{\cos\vartheta . \operatorname{tang}\Theta}{6^2} . \sin^5{}'\Theta, \\ A_4 = \left(\frac{7}{8}\sin\vartheta\right)^2 . A_3 - \frac{3.5.7}{2.4.6} . \frac{\cos\vartheta . \operatorname{tang}\Theta}{8^2} . \sin^7{}'\Theta, \end{cases}$$

etc. etc.

Ope harum formularum singuli termini seriei (1) satis facile computantur e datis L et M ipsis, et e termino initiali $A_0 = \operatorname{am} u = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tang}'\Theta}{\sin\Theta}\right)$.

Si argumenti u complementum $K-u$ computare vis, computandi ratio eadem est, dummodo permutas amplitudines Θ et $'\Theta$. Modulum $\sin\vartheta$ ipsum computabis ope formulae

$$(4) \qquad \vartheta = \operatorname{arc\,cos}(\cos\Theta \,.\, \cos'\Theta).$$

Si loco quantitatum L et M datae sunt G et N, calculus fere idem est.

20.

Termini serierum, quibus s et $G-s$ exprimuntur, recurrendo computantur.

Si in serie (3) articuli (17) semiaxem terrae, hucusque litera B insignitam, nunc litera minore b insignis, est

$$s = \frac{b}{\cos\vartheta}\,[\operatorname{am} u - \varepsilon_1 \sin^2\vartheta \,.\, \lambda^1(\operatorname{am} u) - \varepsilon_2 \sin^4\vartheta \,.\, \lambda^2(\operatorname{am} u) - \varepsilon_3 \sin^6\vartheta \,.\, \lambda^3(\operatorname{am} u) - \varepsilon_4 \sin^8\vartheta \cdot \lambda^4(\operatorname{am} u) - \ldots\ldots]$$

quam seriem repraesentemus hoc modo:

$$(1.) \qquad s = B_0 - B_1 - B_2 - B_3 - B_4 - B_5 - \ldots\ldots$$

ponendo $B_0 = \frac{b \,.\, \operatorname{am} u}{\cos\vartheta}$; $B_1 = \frac{b \,.\, \varepsilon_1 \sin^2\vartheta}{\cos\vartheta} \cdot \lambda^1(\operatorname{am} u)$, $B_2 = \frac{b \,.\, \varepsilon_2 \sin^4\vartheta}{\cos\vartheta} \cdot \lambda^2(\operatorname{am} u)$ et sic deinceps, ita ut generalis valeat formula:

$$B_r = \frac{b \,.\, \varepsilon_r \,.\, \sin^{2r}\vartheta}{\cos\vartheta} \cdot \lambda^r(\operatorname{am} u), \qquad \text{sive } \frac{B_r \,.\, \cos\vartheta}{b \,.\, \varepsilon_r \,.\, \sin^{2r}\vartheta} = \lambda^r(\operatorname{am} u),$$

$$\text{et pariter} \qquad \frac{B_{r+1} \,.\, \cos\vartheta}{b \,.\, \varepsilon_{r+1} \,.\, \sin^{2r+2}\vartheta} = \lambda^{r+1}(\operatorname{am} u).$$

Quia vero $\lambda^{r+1}(\operatorname{am} u) = \lambda^r(\operatorname{am} u) - \mu_r \,.\, \operatorname{sn}^{2r+1} u \,.\, \operatorname{cn} u$, oritur relatio

$$\frac{B_{r+1} \,.\, \cos\vartheta}{b \,.\, \varepsilon_{r+1} \,.\, \sin^{2r+2}\vartheta} = \frac{B_r \,.\, \cos\vartheta}{b \,.\, \varepsilon_r \,.\, \sin^{2r}\vartheta} - \mu_r \,.\, \operatorname{sn}^{2r+1} u \,.\, \operatorname{cn} u, \quad \text{sive}$$

$$B_{r+1} = \frac{(2r-1)(2r+1)}{(2r+2)^2} \sin^2\vartheta \,.\, B_r - \varepsilon_{r+1} \,.\, \mu \,.\, \frac{b}{\cos\vartheta} \,.\, (\sin\vartheta \,.\, \operatorname{sn} u)^{2r+1} \,.\, \sin\vartheta \,.\, \operatorname{cn} u$$

Si valores $\varepsilon_{r+1} = \frac{1^2 \,.\, 3^2 \,.\, 5^2 \ldots \,.\, (2r-1)^2 \,.\, (2r+1)}{2^2 \,.\, 4^2 \,.\, 6^2 \ldots\ldots\, (2r)^2 \,.\, (2r+2)^2}$ et $\mu_r = \frac{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots\ldots (2r)}{3 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots\ldots (2r-1)(2r+1)}$ substituis, fit

$$\varepsilon_{r+1} \,.\, \mu_r = \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots\ldots (2r-3)\,2r-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots\ldots (2r-2)\,(2r)} \,.\, \frac{1}{(2r+2)^2}.$$

Si itaque iterum angulos Θ et $'\Theta$ sumis tales ut sit

$$(2.)\quad \begin{cases} \Theta = \arcsin(\sin e \sin L) = \arctan(\tan e \,.\, \sin G), \\ {}'\Theta = \arctan(\tan e \cos L \cos M) = \arcsin(\sin e \,.\, \cos G \,.\, \cos N), \end{cases}$$

quo fit $\sin\vartheta \,.\, \mathrm{sn}\, u = \sin'\Theta$ et $\dfrac{\sin\vartheta \,.\, \mathrm{cn}\, u}{\cos\vartheta} = \tan\Theta$, recurrentis calculi regulam iam exprimit formula generalis

$$B_{r+1} = \frac{(2r-1)\,(2r+1).\sin^2\vartheta}{(2r+2)^2} \,.\, B_r - \frac{1.3.5\,.....\,(2r-1)}{2.4.6\,.....\,(2r)} \cdot \frac{b\,.\tan\Theta}{(2r+2)^2} \cdot \sin^{2r+1\prime}\Theta$$

quae valet pro $r > 0$. Est vero

$$(3.)\quad \begin{cases} B_0 = \dfrac{b}{\cos\Theta\cos'\Theta} \cdot \operatorname{arc\,tang}\left(\dfrac{\tan g'\Theta}{\sin\Theta}\right), \\ B_1 = \dfrac{\sin^2\vartheta}{2^2} \,.\, B_0 - \dfrac{b\tan\Theta}{2^2} \cdot \sin'\Theta, \\ B_2 = \dfrac{1.3\,.\sin^2\vartheta}{4^2} \,.\, B_1 - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{b\tan\Theta}{4^2} \cdot \sin^{3\prime}\Theta, \\ B_3 = \dfrac{3.5\,.\sin^2\vartheta}{6^2} \,.\, B_2 - \dfrac{1.3}{2.4} \cdot \dfrac{b\tan\Theta}{6^2} \cdot \sin^{5\prime}\Theta, \\ B_4 = \dfrac{5.7\,.\sin^2\vartheta}{8^2} \,.\, B_3 - \dfrac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \dfrac{b\tan\Theta}{8^2} \cdot \sin^{7\prime}\Theta, \\ B_5 = \dfrac{7.9\,.\sin^2\vartheta}{10^2} \,.\, B_4 - \dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \cdot \dfrac{b\tan\Theta}{10^2} \cdot \sin^{9\prime}\Theta, \end{cases}$$

et cetera.

Modulum ϑ ipsum invenis ope formulae

$$(4.)\qquad \vartheta = \arccos(\cos\Theta \,.\, \cos'\Theta) \,.....$$

Si vero e permutatis amplitudinibus Θ et ${}'\Theta$ computas quantitates

$$(5.)\quad \begin{cases} B'_0 = \dfrac{b}{\cos\Theta\cos\Theta} \cdot \operatorname{arc\,tang}\left(\dfrac{\tan g\Theta}{\sin'\Theta}\right), \\ B'_1 = \dfrac{\sin^2\vartheta}{2^2} \,.\, B'_0 - \dfrac{b\tan g'\Theta}{2^2} \cdot \sin^3\Theta, \\ B'_2 = \dfrac{1.3\,.\sin^2\vartheta}{4^2} \,.\, B'_1 - \dfrac{b\tan g'\Theta}{4^2} \cdot \sin^5\Theta, \\ B'_3 = \dfrac{3.5\,.\sin^2\vartheta}{6^2} \,.\, B'^2 - \dfrac{b\tan g'\Theta}{6^2} \cdot \sin^7\Theta, \\ B'_4 = \dfrac{5.7\,.\sin^2\vartheta}{8^2} \,.\, B'_3 - \dfrac{b\tan g'\Theta}{8^2} \cdot \sin^9\Theta, \\ \text{etc. etc.} \end{cases}$$

pariter erit $\dfrac{b}{\cos\vartheta} \,.\, \mathrm{elc}\, u = B_0' - B_1' - B_2' - B_3' - .....$, quare cum arcus $MD = G - s$ exprimitur formula $G - s = \dfrac{b}{\cos\vartheta} \,.\, \mathrm{elc}\, u - b \,.\, \tan\Theta \,.\, \tan'\Theta$ (confer. art. 14), est

$$(6.)\quad G - s = B_0' - b\tan\Theta \,.\, \tan'\Theta - B_1' - B_2' - B_3' - B_4' - B_5' - .....$$

21.

Termini serierum, quae longitudinum geographicarum differentias φ et $\Phi-\varphi$ exprimunt, recurrendo computantur.

Si brevitatis causa utimur signo $\frac{m}{\cos\vartheta}\sin e.\tang p = \frac{\sin e\cos e}{\sqrt{[\sin(e-\vartheta).\sin(e+\vartheta)]}}$, formulam (5) in articulo (17) inventam sive seriem

$$\varphi = F - \frac{m}{\cos\vartheta}[A_0 \mathrm{am}u + \varepsilon_1 A_1.\sin^2\vartheta.\lambda^1(\mathrm{am}u) + \varepsilon_2 A_2\sin^4\vartheta.\lambda^2(\mathrm{am}u) + \varepsilon_3 A_3\sin^6\vartheta.\lambda^3(\mathrm{am}u) + \ldots]$$

simplicius repraesentemus signis his

$$(1.)\qquad \varphi = F - C_0 - C_1 - C_2 - C_3 - C_4 - C_5 - - \ldots\ldots,$$

sumendo

$$C_0 = \frac{m}{\cos\vartheta}.A_0.\mathrm{am}\,u;\ C_1 = \frac{m}{\cos\vartheta}\varepsilon_1 A_1\sin^2\vartheta.\lambda^1(\mathrm{am}u);\ C_2 = \frac{m}{\cos\vartheta}\varepsilon_2.A_2.\sin^4\vartheta.\lambda^2(\mathrm{am}u);$$

etc. ita ut generaliter sit pro $r > 0$:

$$\frac{C_r\cos\vartheta}{m\varepsilon_r.A_r.\sin^{2r}\vartheta} = \lambda^r(\mathrm{am}\,u) \text{ et } \frac{C_{r+1}.\cos\vartheta}{m\varepsilon_{r+1}A_{r+1}.\sin^{2r+2}\vartheta} = \lambda_{r+1}(\mathrm{am}\,u),$$

quo facto erit

$$C_{r+1} = \frac{(2r-1)(2r+1)}{(2r+2)^2}.\frac{A_{r+1}}{A_r}.\sin^2\vartheta.C_r - \frac{1.3.5.....(2r-1)}{2.4.6.....(2r)}.\frac{mA_{r+1}\tang\Theta}{(2r+2)^2}.\sin^{2r+1'}\Theta,$$

ita ut valeant formulae speciales

$$(2.)\quad \begin{cases} C_0 = \dfrac{mA_0}{\cos\Theta\cos\Theta}.\arctang\left(\dfrac{\tang'\Theta}{\sin\Theta}\right), \\ C_1 = \dfrac{\sin^2\vartheta}{2^2}.\dfrac{A_1}{A_0}.C_0 - \dfrac{mA_1.\tang\Theta}{2^2}.\sin'\Theta, \\ C_2 = \dfrac{1.3.\sin^2\vartheta}{4^2}.\dfrac{A_2}{A_1}.C_1 - \dfrac{1}{2}.\dfrac{mA_2.\tang\Theta}{4^2}.\sin^{3'}\Theta, \\ C_3 = \dfrac{3.5.\sin^2\vartheta}{6^2}.\dfrac{A_3}{A_2}.C_2 - \dfrac{1.3}{2.4}.\dfrac{mA_3.\tang\Theta}{6_2}.\sin^{5'}\Theta, \\ C_4 = \dfrac{5.7.\sin^2\vartheta}{8^2}.\dfrac{A_4}{A_3}.C_3 - \dfrac{1.3.5}{2.4.6}.\dfrac{mA_4.\tang\Theta}{8_2}.\sin^{7'}\Theta, \\ C_5 = \dfrac{7.9.\sin^2\vartheta}{10^2}.\dfrac{A_5}{A_4}.C_4 - \dfrac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\dfrac{mA_5\tang\Theta}{10^2}.\sin^{9'}\Theta, \\ \text{etc. etc.} \end{cases}$$

quarum ope singuli termini seriei (1) post initialem F computantur e datis aut L et M aut G et N ope angulorum

$$(3.)\quad \begin{cases} \Theta = \arcsin(\sin e.\sin L) = \arctang(\tang e.\sin G), \\ {}'\Theta = \arctang(\tang e.\cos L.\cos M) = \arcsin(\sin e.\cos G.\cos N), \end{cases}$$

e quibus et computas

(4.) $\vartheta = \arccos(\cos\Theta\cos'\Theta)$, et $m = \dfrac{\sin e\cos e\cos\vartheta}{\sqrt{[\sin(e-\vartheta).\sin(e+\vartheta)]}} = \sin e\cos\vartheta.\operatorname{tang} p = \dfrac{\sin e\cos e}{\cos p}$

nec non $\operatorname{tang} p = \dfrac{\cos e}{\sqrt{[\sin(e-\vartheta).\sin(e+\vartheta)]}}$ sive adiumento formulae

$$(5.)\qquad p = \arcsin\left(\frac{\cos e}{\cos\vartheta}\right) = \arcsin\left(\frac{\cos e}{\cos\Theta\cos'\Theta}\right)$$

Priusquam vero calculum recurrentem e formulis (2) incipias, ex angulo modo invento p computabis quantitates A_0, A_1, A_2, A_3, etc. vel potius ipsarum logarithmos e formulis

$$(6.)\quad \begin{cases} A_0 = \dfrac{2\sin^2(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}p)}{\sin p} = \dfrac{2\sin\frac{1}{2}(e-\vartheta).\sin\frac{1}{2}(e+\vartheta)}{\cos e}, \\ A_1 = 1 - 2.\operatorname{tang}^2 p.\overset{0}{A}_0, \\ A_2 = 1 - 4.\operatorname{tang}^2 p.\overset{1}{A}_1, \\ A_3 = 1 - 2.\operatorname{tang}^2 p.\overset{2}{A}_2, \\ A_4 = 1 - \dfrac{8}{5}.\operatorname{tang}^2 p.\overset{3}{A}_3, \\ A_5 = 1 - \dfrac{10}{7}.\operatorname{tang}^2 p.\overset{4}{A}_4, \\ \vdots \\ A_r = 1 - \dfrac{2r}{2r-3}.\operatorname{tang}^2 p.A_{r-1} \end{cases}$$

in usum commodiorem hoc loco repetitis. Formulae (2) ad maximam partem congruunt cum formulis (3) articuli praecedentis, ita ut factorum logarithmis plerisque etiam nunc uti queas, quae est sublevatio calculi non spernenda.

Si vero singulos terminos seriei (6) in articulo (17) invenfae

$$\Phi - \varphi = \tfrac{1}{2}\pi - F - \cos e.\cos l.[A_0\operatorname{amc} u + \delta_1 A_1\sin^2\vartheta.\lambda^1(\operatorname{amc} u) + \delta_2 A_2\sin^4\vartheta.\lambda^2(\operatorname{amc} u) + \delta_3 A_3\sin^6\vartheta.\lambda^3(\operatorname{amc} u) + \ldots\ldots]$$

hoc modo repraesentatae

$$(7.)\qquad \Phi - \varphi = \tfrac{1}{2}\pi - F - D_0 - D_1 - D_2 - D_3 - D_4 - \ldots\ldots$$

computare vis calculo recurrente, sumto signo $\dfrac{n}{\cos\vartheta}\cos e\cos l$, erit

$D_0 = \dfrac{n}{\cos\vartheta}.A_0.\operatorname{amc} u$; $D_1 = \dfrac{n}{\cos\vartheta}.\delta_1 A_1\sin^2\vartheta.\lambda^1(\operatorname{amc} u)$; $D_2 = \dfrac{n}{\cos\vartheta}.\delta_2 A_2\sin^4\vartheta\lambda^2(\operatorname{amc} u)$

et generaliter $D_r = \dfrac{n}{\cos\vartheta}.\delta_r.A_r.\sin^{2r}.\lambda^r(\operatorname{amc} u)$. E corporis sphaeroïdici excentricitate e computabis primo quantitates lente crescentes A_0, A_1, A_2, A_3 ..... vel potius ipsarum logarithmos e formulis hoc loco repetitis:

$$(8.)\quad \begin{cases} \Delta_0 = \dfrac{2\sin^2\frac{1}{2}e}{\cos e}, \\ \Delta_1 = \dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{1}{\sin^2 e}\cdot\Delta_0 - 1, \\ \Delta_2 = \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{\sin^2 e}\cdot\Delta_1 - 1, \\ \Delta_3 = \dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{1}{\sin^2 e}\cdot\Delta_2 - 1, \\ \Delta_4 = \dfrac{8}{7}\cdot\dfrac{1}{\sin^2 e}\cdot\Delta_3 - 1, \\ \vdots\quad\vdots \\ \Delta_r = \dfrac{2r}{2r-1}\cdot\dfrac{1}{\sin^2 e}\cdot\Delta_{r-1} - 1, \end{cases}$$

quo facto erit

$$(9.)\quad \begin{cases} D_0 = \dfrac{n\Delta_0}{\cos\vartheta}\operatorname{arc\,tang}\left(\dfrac{\operatorname{tang}\Theta}{\sin'\Theta}\right), \\ D_1 = (\frac{1}{2}\sin\vartheta)^2\cdot\dfrac{\Delta_1}{\Delta_0}\cdot D_0 - \dfrac{n\Delta_1\operatorname{tang}'\Theta}{2^2}\cdot\sin\Theta, \\ D_2 = (\frac{3}{4}\sin\vartheta)^2\cdot\dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}\cdot D_1 - \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{n\Delta_2\operatorname{tang}'\Theta}{4^2}\cdot\sin^3\Theta, \\ D_3 = (\frac{5}{6}\sin\vartheta)^2\cdot\dfrac{\Delta_3}{\Delta_2}\cdot D_2 - \dfrac{3.5}{2.4}\cdot\dfrac{n\Delta_3\operatorname{tang}'\Theta}{6^2}\cdot\sin^5\Theta, \\ D_4 = (\frac{7}{8}\sin\vartheta)^2\cdot\dfrac{\Delta_4}{\Delta_3}\cdot D_3 - \dfrac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\dfrac{n\Delta_4\operatorname{tang}'\Theta}{8^2}\cdot\sin^7\Theta, \\ D_5 = (\frac{9}{10}\sin\vartheta)^2\cdot\dfrac{\Delta_5}{\Delta_4}\cdot D_4 - \dfrac{3.5.7.9}{2.4.6.8}\cdot\dfrac{n\Delta_5\operatorname{tang}'\Theta}{10^2}\cdot\sin^9\Theta, \end{cases}$$

etc. etc.

Factorem constantem novum $n = \cos e.\cos\vartheta.\cos l = \dfrac{\cos\vartheta.\sqrt{[\sin(e-\vartheta).\sin(e+\vartheta)]}}{\operatorname{tang} e}$ e formula

$$\vartheta = \operatorname{arc\,cos}(\cos\Theta\cos'\Theta)$$

invenis, aut ipsum computabis e formula $l = \operatorname{arc\,sin}\left(\dfrac{\sin\vartheta}{\sin e}\right)$, quo simul latitudo vera puncti initialis A innotescit.

Si vim formularum (2 et 9) animo perpendis, formulas has eam ob causam iuste vituperabis, quod duplice calculo recurrente opus est, quarum secundus est multo molestior quam primus. Ut taediosum hoc negotium evites, ad formulas articuli (17) ipsas redibis, et functionum $\lambda^1(\operatorname{am} u)$, $\lambda^2(\operatorname{am} u)$, $\lambda^3(\operatorname{am} u)$ ..... valores (vel eas functionum $\lambda^1(\operatorname{amc} u)$, $\lambda^2(\operatorname{amc} u)$, $\lambda^3(\operatorname{amc} u)$, ...) e formulis

$$\operatorname{am} u = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tang}'\Theta}{\sin\Theta}\right) \text{ et } \operatorname{amc} u = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tang}\Theta}{\sin'\Theta}\right)$$

computabis adiumento formularum in fine articuli (17) propositarum, qui quidem calculus non est adeo taediosus. Speramus vero fore, qui commoti studio, ut difficultates vel si mavis, taediosas has molestias analyticas relevent, opus desideratum suscipiant parandarum tabularum functionis $\lambda^r(\varphi)$, praesertim cum integralia modularia et permulta alia in series tales evolvi queant, quae in singulis terminis successivis contineant functiones $\lambda^1(\varphi)$, $\lambda^2(\varphi)$, $\lambda^3(\varphi)$, $\lambda^4(\varphi)$, etc.

Functiones hisce similes sunt eae, quarum forma sive definitio est

$$\mu^r(\varphi) = \frac{3.5.7 \ldots\ldots (2r+1)}{2.4.6 \ldots\ldots (2r)} \cdot \int_0^{\varphi} \sin^{2r+1}\varphi \,.\, \partial\varphi \,.$$

Integrando et reducendo invenis formulas

$$\mu^0(\varphi) = 1 - \cos\varphi$$

$$\mu^1(\varphi) = 1 - \cos\varphi - \tfrac{1}{2}\sin^2\varphi\cos\varphi$$

$$\mu^2(\varphi) = 1 - \cos\varphi - \tfrac{1}{2}\sin^2\varphi\cos\varphi - \frac{1.3}{2.4}\sin^4\varphi\cos\varphi$$

$$\mu^3(\varphi) = 1 - \cos\varphi - \tfrac{1}{2}\sin^2\varphi\cos\varphi - \frac{1.3}{2.4}\sin^4\varphi\cos\varphi - \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^6\varphi\cos\varphi$$

$$\vdots$$

$$\mu^r(\varphi) = 1 - \cos\varphi - \tfrac{1}{2}\sin^2\varphi\cos\varphi - \frac{1.3}{2.4}\sin^4\varphi\cos\varphi - \frac{1.3.5}{2.4.6}\sin^6\varphi\cos\varphi \ldots\ldots$$

$$- \frac{1.3.5 \ldots\ldots (2r-1)}{2.4.6 \ldots\ldots (2r)} \sin^{2r}\varphi\cos\varphi,$$

quae formulae perelegantes similes sunt iis, quibus $\lambda^1(\varphi)$; $\lambda^2(\varphi)$; $\lambda^3(\varphi)$ etc. exprimuntur, at minoris momenti, quippe cum non sint transcendentes. Si $\varphi < \frac{1}{2}\pi$, functionis $\mu^r(\varphi)$ limes, crescente indice r in infinitum, est $1 - \cos\varphi \,.\, (1 - \sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - 1 = 0$.

22.

De lineae geodaeticae quadratura.

De lineae geodaeticae quadratura pauca addamus. Inventa in articulo (6) formula

$$Z = \frac{\pi A^2 \cos^2 e}{\sin e} \cdot \left(\frac{\sin\Theta}{\cos^2\Theta} + \mathfrak{L}(\Theta) \right), \text{ sive}$$

$$Z = \frac{\pi A^2}{\sin e} \cdot \sin\Theta \,.\, \cos^{2\prime}\Theta + \frac{\pi A^2 \cos^2 e}{\sin e} \,.\, \mathfrak{L}(\Theta)$$

exprimit zonam, cuius initium est aequator, et cuius latitudo vero L determinatur formula

$$\sin L = \frac{\sin\Theta}{\sin e} \,.$$

Si eam huius zonae partem quaeris, quae continetur inter meridianum primum PAE et meridianum PMF, qui cum illo facit angulum, cuius arcus $= \varphi$, huius quadrigoni area erit

$$\frac{\varphi}{2\pi}.\mathbf{Z}, \quad \text{sive}$$

$$\frac{A^2}{2\sin e}\cdot\sin\Theta\,.\,\cos^{2\prime}\Theta.\varphi + \frac{A^2\cos^2 e}{\sin e}\cdot\varphi.\mathfrak{L}(\Theta)$$

et ipsius differentiale, habita ratione ad variabilem φ, itaque est

$$\frac{A^2}{2\sin e}\cdot\sin\Theta\,.\,\cos^{2\prime}\Theta.\,\partial\varphi + \frac{A^2\cos^2 e}{2\sin e}.\mathfrak{L}(\Theta).\partial\varphi.$$

Si vero S designat aream quadrigoni $EAMF$ sphaeroïdici, cuius latus AM est arcus lineae geodaeticae, pariter erit

$$\partial S = \frac{A^2}{2\sin e}\cdot\sin\Theta\,.\cos^{2\prime}\Theta\,.\,\partial\varphi + \frac{A^2\cos^2 e^2}{2\sin e}.\mathfrak{L}(\Theta).\partial\varphi,$$

dummodo φ habetur pro functione arcus sive amplitudinis Θ, sive vice versa Θ habetur pro functione arcus φ, qui est differentia longitudinum geographicarum, quae ad lineae geodaeticae puncta A et M pertinent. Quare est

$$S = \frac{A^2\cos^2\vartheta}{2\sin e}\cdot\int_0^{\bullet}\frac{\sin\Theta}{\cos^2\Theta}\,\partial\varphi + \frac{A^2\cos^2 e}{2\sin e}\cdot\int_0^{\bullet}\mathfrak{L}(\Phi).\partial\varphi.$$

Quia vero $\sin\Theta = \sin\vartheta\,.\,\mathrm{snc}\,u$, $\cos^2\Theta = \mathrm{dnc}^2 u$, et $\partial\varphi = \frac{\sin p}{\cos g}\cdot\frac{\mathrm{dn}^2 u\,.\,\partial u}{1+\tan g^2 g\,.\,\mathrm{sn}^2 u}$

est $\frac{\sin\Theta}{\cos^2\Theta}\partial\varphi = \frac{\sin\vartheta}{\sin^2\vartheta}\cdot\frac{\sin p}{\cos g}\cdot\frac{\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}^3 u.\partial u}{(1+\tan g^2 g.\mathrm{sn}^2 u)} = \frac{\sin p\sin\vartheta}{\cos g\cos^2\vartheta}\cdot\frac{\mathrm{dn}^2 u\,.\,\partial\,\mathrm{sn}\,u}{1+\tan g^2 g.\mathrm{sn}^2 u}$, ideoque

$$S = \frac{A^2\sin p\sin\vartheta}{2\cos g\sin e}\cdot\int_0^{\bullet}\frac{\mathrm{dn}^2 u\,.\,\partial\,\mathrm{sn}\,u}{1+\tan g^2 g\,.\,\mathrm{sn}^2 u} + \frac{A^2\cos^2 e}{2\sin e}\int_0^{\bullet}\mathfrak{L}(\Theta)\,.\,\partial\varphi, \quad \text{sive}$$

$$S = \tfrac{1}{2}A^2\,.\tan g\,g\cdot\int_0^{\bullet}\frac{\mathrm{dn}^2 u\,.\,\partial\,\mathrm{sn}\,u}{1+\tan g^2 g\,.\,\mathrm{sn}^2 u} + \frac{A^2\cos^2 e}{2\sin e}\cdot\int_0^{\bullet}\mathfrak{L}(\Theta)\,.\,\partial\varphi.$$

Quia $\mathfrak{L}(\theta) = \log\sqrt{\frac{1+\sin\Theta}{1-\sin\Theta}} = \log\sqrt{\frac{1+k\,\mathrm{snc}\,u}{1-k\,\mathrm{snc}\,u}}$, est

$$S = \tfrac{1}{2}A^2\tan g\,g\cdot\int_0^{\bullet}\frac{\mathrm{dn}^2 u\,.\,\partial\,\mathrm{sn}\,u}{1+\tan g^2 g\,.\,\mathrm{sn}^2 u} + \frac{A^2\cos e\sin p}{2\sin e\,.\,\cos g}\cdot\int_0^{\bullet}\frac{\partial u.\mathrm{dn}^2 u.\log\sqrt{\frac{1+k\,\mathrm{snc}\,u}{1-k\,\mathrm{snc}\,u}}}{1+\tan g^2 g\,.\,\mathrm{sn}^2 u}$$

sive

$$S = \tfrac{1}{2}A^2\tan g\,g\cdot\int_0^{\bullet}\frac{\mathrm{dn}^2 u\,.\,\partial\,\mathrm{sn}\,u}{1+\tan g^2 g\,.\,\mathrm{sn}\,u} + \tfrac{1}{2}A^2\cos e\tan g\,p\cdot\int_0^{\bullet}\frac{\partial u\,.\,\mathrm{dn}^2 u\log\sqrt{\frac{1+k\,\mathrm{snc}\,u}{1-k\,\mathrm{snc}\,u}}}{1+\tan g^2 g\,.\,\mathrm{sn}^2 u}$$

Integrale in huius formulae parte prima facillime eruitur, at integrale in

parte altera contentum, quomodocunque ipsium transformabis, in forma finita exhibere frustra conaberis.

Adhibito parametro a articuli (11) invenies

$$S = \tfrac{1}{2}A^2 \operatorname{tang} g \cdot \int_0 \frac{\operatorname{dn}^2 u \,.\, \partial \operatorname{sn} u}{1 + \operatorname{tang}^2 g \operatorname{sn}^2 u} + \tfrac{1}{2} A \cos^2 e \cos^2 g \operatorname{tang} p \cdot \int_0 \frac{\partial u \log \sqrt{\frac{1 + k \operatorname{snc} u}{1 - k \operatorname{snc} u}}}{1 - \operatorname{dnc}'^2 a \,.\, \operatorname{snc}^2 u}.$$

Quia vero $1 - \operatorname{dnc}'^2 a \operatorname{snc}^2 u = 1 - \frac{\sin^2 \Theta}{\sin^2 e}$ et formula $\Theta = \operatorname{am}(k(K-u) \,.\, \frac{1}{k}$ differentiando fit $\partial \Theta = -k \operatorname{cnc} u \,.\, \partial u = -\sqrt{(\operatorname{dnc}^2 u - k'^2)} \,.\, \partial u$, vice versa est $\partial u = \frac{-\partial \Theta}{\sqrt{(\cos^2 \Theta - \cos^2 \vartheta)}}$, quare invenis

$$S = \tfrac{1}{2}A^2 \operatorname{tang} g \cdot \int_0 \frac{\operatorname{dn}^2 u \,.\, \partial \operatorname{sn} u}{1 + \operatorname{tang}^2 \operatorname{sn}^2 u} + \tfrac{1}{2} A \cos^2 e \cos^2 g \operatorname{tang} p \int_\vartheta \frac{-\mathfrak{L}(\Theta) \,.\, \partial \Theta}{\left(1 - \frac{\sin^2 \Theta}{\sin^2 e}\right) \cdot \sqrt{(\sin^2 \vartheta - \sin^2 \Theta)}}.$$

Si $\mathfrak{L}\Theta = \psi$ sumis, fit $\Theta = l(\psi)$, $\partial \Theta = \frac{\partial \psi}{\mathfrak{Cos}\, \psi}$, $\sin \Theta = \mathfrak{Tang}\, \psi$,

ita ut differentiale partis secundae obtineat formam

$$\frac{-\psi \,.\, \partial \psi \,.\, \sqrt{(1 - \mathfrak{Tang}^2 \psi)}}{\left(1 - \frac{\mathfrak{Tang}^2 \psi}{\sin^2 e}\right) \cdot \sqrt{(\sin^2 \vartheta - \mathfrak{Tang}^2 \psi)}}.$$

Script. d. 2. Martii 1847.

14.

Ueber Torsionswiderstand und Torsionsfestigkeit.

(Von Herrn Dr. *E. Segnitz* zu Eldena.)

Die Lehre von der Torsion elastischer Körper ist für den Techniker und Physiker wichtig, aber bis jetzt in den Handbüchern der Mechanik meist nur erst ziemlich kurz und unvollständig abgehandelt; es kommen dabei sogar noch Unrichtigkeiten vor. *Poisson* verweiset in seinem Traité de Mécanique (tome I, 2e edition p. 599) auf eine Abhandlung in den Memoiren der Pariser Akademie, wo er den Gegenstand ausführlich behandelt habe. Diese Abhandlung habe ich leider noch nicht zu Gesicht bekommen können, da die ältern Jahrgänge der gedachten Memoiren auf der Greifswalder Universitäts-Bibliothek fehlen; ich kenne daher nur Dasjenige, was davon in die Jahrbücher der Physik, namentlich in den Supplementband zu *Baumgaertner*'s Naturlehre, übergegangen ist. In dem Traité etc. führt *Poisson* lediglich an, er habe gefunden, dass der Torsionswiderstand einer elastischen Ruthe von kreisförmigem Querschnitt der vierten Potenz ihres Durchmessers proportional sei; was auch durch die Erfahrung bestätigt werde. Man möchte daraus fast schliessen, dass er selbst auf die von ihm gefundene Constante wenig Werth legt. *Ohm* (Lehrbuch d. Mechanik, Bd. II, S. 429) beschränkt sich ebenfalls darauf, obiges von *Poisson* herrührende Resultat in einer Anmerkung als ein solches zu erwähnen, welches mit der Erfahrung übereinstimmen *solle;* ohne auf den Gegenstand weiter einzugehen. In den mehr practischen Lehrbüchern der Mechanik und Maschinenlehre z. B. in *Buchanan*'s Mühlen- und Maschinenbaukunst (aus d. Engl. von *Jacobi*, Berlin 1825, S. 197 u. f.) ist nur von der Torsions*festigkeit* die Rede, obgleich sich der Verfasser (Uebersetzer?) durchgängig des Ausdrucks *Torsionswiderstand* dafür bedient. *Gerstner* leitet (Handb. d. Mechanik, Bd. I, S. 374 u. f.) aus theoretischen Beobachtungen eine Formel für den Torsionswiderstand her, begnügt sich aber, auf dem Wege des Experiments

das directe Verhältniss zwischen dem Moment der wirkenden Kraft und dem Torsionswinkel nachzuweisen; rechnet man nach, so findet sich, dass die *Gerstner*'sche Formel den Torsionswiderstand bei weitem zu gross angiebt. Eben so sieht sich *Weisbach* veranlasst, im I. Bande seines Lehrbuchs der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik (S. 239), die vorher auf theoretischem Wege von ihm gefundenen Formeln durch Einführung andrer Constanten der Erfahrung entsprechend zu modificiren. Unter diesen Umständen dürfte es nicht überflüssig sein, den Gegenstand hier von Neuem zur Sprache zu bringen. Gewöhnlich geht man bei Begründung der Formel für den Torsionswiderstand etwa von folgenden Betrachtungen aus.

Man stelle sich den gewundenen Körper, welcher zunächst von cylindrischer Gestalt (mit kreisförmigem Querschnitt) angenommen worden war, aus lauter elastischen *Fasern* bestehend vor, welche im natürlichen Zustande mit der Axe des Cylinders parallel laufen und mit ihr von gleicher Länge sind; die beiden andern Dimensionen der Fasern können unendlich klein angenommen werden. Das eine Ende des Cylinders sei fest; an dem andern wirke ein sogenanntes Gegenpaar von Kräften, welche das freie Ende um die Axe zu drehen streben. Das Moment dieses Gegenpaares ist die unbekannte Grösse, welche wir hier als eine Function des Torsionswinkels auszudrücken suchen und Torsionswiderstand nennen wollen. Die gewundene Faser AD (Fig. 1), deren Abstand von der Axe gleich ϱ sei, wird eine Curve von doppelter Krümmung in der Oberfläche eines Cylinders von dem Radius ϱ, und zwar die möglich kürzeste Linie zwischen ihren beiden Endpuncten, also eine *Schraubenlinie* bilden. Ferner wird in jedem beliebigen, auf die Axe senkrechten Querschnitt, der Torsionswinkel dem Abstande des Querschnitts von dem festen Ende des Cylinders proportional sein. Stellen wir uns nun jene Cylinderfläche in einer Ebene ausgebreitet vor, so wird, unter der Voraussetzung, dass der gewundene Cylinder seine Gestalt im Ganzen nicht verändert hat, ein rechtwinkliges Dreieck ABD (Fig. 2) entstehen, dessen Hypothenuse AD die durch die Torsion verlängerte Faser darstellt, während ihre ursprüngliche Länge $AB = l$ war. Bezeichnet man den Torsionswinkel BCD (Fig. 1), am freien Ende (durch die dem Radius 1 entsprechende Bogenlänge ausgedrückt) durch φ, so ist die zweite Kathete $BD = \varrho\varphi$ und $AD = \sqrt{(l^2+\varrho^2\varphi^2)}$. Ferner ist das Verhältniss der Verlängerung, welche die Faser durch die Torsion erfahren hat, zu ihrer ursprünglichen Länge oder:

$$\frac{ED}{AB} = \frac{\sqrt{(l^2+\varrho^2\varphi^2)}-l}{l} = \sqrt{\left(1+\frac{\varrho^2\varphi^2}{l^2}\right)}-1 .$$

Es sei nun ε der sogenannte *Elasticitäts-Modul* oder diejenige Kraft, welche erforderlich sein würde, um ein Prisma von dem Querschnitt 1 und aus demselben Stoff wie der vorliegende Cylinder, auf das Doppelte seiner ursprünglichen Länge auszudehnen, insofern eine solche Ausdehnung noch innerhalb der Grenzen der vollkommnen Elasticität läge. Setzen wir noch den Querschnitt der Faser gleich μ, so ist die der Verlängerung ED (Fig. 2) proportionale Kraft, welche in der Richtung DA der gewundenen Faser ihrer weiteren Ausdehnung entgegenwirkt:

$$p' = \varepsilon\mu\left(\sqrt{\left(1+\frac{\varrho^2\varphi^2}{l^2}\right)}-1\right).$$

Dieselbe kann offenbar nicht ohne das Hinzukommen einer dritten Kraft mit einer in der Richtung der Tangente DF wirkenden Kraft im Gleichgewicht sein. Die Grösse der beiden letzteren Kräfte, die durch p'' und p bezeichnet werden mögen, ist unbekannt; die Kenntniss der Richtung von p'' würde aber, in Verbindung mit dem Umstande, dass zwischen den drei Kräften Gleichgewicht Statt finden soll, hinreichen, die beiden Unbekannten ihrer Grösse nach zu bestimmen. Nimmt man jene dritte Kraft p'' als parallel mit der Axe wirkend an, so erhält man (abgesehen von dem Einwurf, dass es an einer physicalischen Begründung dieser Voraussetzung gänzlich fehle) einen Werth für den Torsionswiderstand, welcher sich selbst durch den rohesten Versuch als bei weitem *zu klein* erweiset. Dagegen lässt sich aus dem Seitendruck der Fasern, den sie auf einander ausüben, eine in der Richtung DG, perpendiculär auf die gewundene Faser wirkende Kraft p'' herleiten.

Soll dieselbe mit p' eine DF genau entgegengesetzte Resultirende hervorbringen, so muss

$$p'' = \frac{l}{\varrho\varphi}\cdot p' = \varepsilon\mu\left(\sqrt{\left(\frac{l^2}{\varrho^2\varphi^2}+1\right)}-\frac{l}{\varrho\varphi}\right)$$

sein; für die Resultirende selbst ergiebt sich:

$$(1.)\qquad p = \varepsilon\mu\left(\frac{l}{\varrho\varphi}+\frac{\varrho\varphi}{l}-\sqrt{\left(\frac{l^2}{\varrho^2\varphi^2}+1\right)}\right).$$

Diese Resultirende wirkt an dem Hebelsarm ϱ, mithin ist das entsprechende Moment:

$$\varrho p = \varepsilon\mu\left(\frac{l}{\varphi}+\frac{\varphi}{l}\varrho^2-\sqrt{\left(\frac{l^2}{\varphi^2}+\varrho^2\right)}\right).$$

Fasset man sämmtliche Fasern von demselben Abstand ϱ zusammen, so ist die Summe ihrer Querschnitte $2\pi\varrho\partial\varrho$ und das Torsionsmoment eines Ringes, dessen

innerer und äusserer Halbmesser ϱ und $\varrho + \partial\varrho$ sind, oder das Differential von dem gesuchten Torsionswiderstand des ganzen Cylinders ist

$$\partial T = 2\pi\varepsilon\left(\frac{l}{\varphi}\varrho + \frac{\varphi}{l}\varrho^3 - \varrho\sqrt{\left(\frac{l^2}{\varphi^2} + \varrho^2\right)}\right)\partial\varrho\,.$$

Hieraus findet man den Torsionswiderstand eines Cylinders von dem Halbmesser r und der Länge l für den Elasticitäts-Modul ε und einen Torsionswinkel φ, indem man zwischen den Grenzen $\varrho = 0$ und $\varrho = r$ integrirt, nämlich:

$$(2.)\quad T = \pi\varepsilon\left[\frac{l}{\varphi}\,r^2 + \tfrac{1}{2}\,\frac{\varphi}{l}\,r^4 + \tfrac{2}{3}\,\frac{l^3}{\varphi^3} - \tfrac{2}{3}\left(\frac{l^2}{\varphi^2} + r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

In dieser Gestalt ist die Formel zur wirklichen Berechnung kaum tauglich, indem, wenn man mit siebenstelligen Logarithmen rechnet, diejenigen Ziffern, welche noch sicher sind, sich gegenseitig aufheben. Es ergiebt sich aber durch Auflösung des letzten Gliedes in eine unendliche Reihe:

$$(3.)\quad T = \pi\varepsilon r^3\left(\tfrac{1}{4}\frac{r\varphi}{l} + \tfrac{1}{24}\frac{r^3\varphi^3}{l^3} - \tfrac{1}{64}\frac{r^5\varphi^5}{l^5} + \ldots\ldots\right).$$

In der Ausübung pflegt $\frac{r\varphi}{l}$ eine sehr kleine Grösse zu sein. *Gerstner* führt in seinem Handbuch der Mechanik (Bd. I, S. 382) ein Beispiel an, welches er auch seinen weitern Berechnungen über die erforderliche Stärke der Wellen zum Grunde legt, wo $r = 10''$ und $l = 240''$ war; den Torsionswinkel giebt er zu $0{,}117^0$ an; hiernach wäre

$$\frac{r\varphi}{l} = 0{,}000085 < \frac{1}{10^4}\,.$$

Gerstner hat nun zwar den Torsionswinkel nicht gemessen, sondern nur nach seiner unrichtigen Formel berechnet, jedenfalls war aber doch

$$\frac{r\varphi}{l} < \frac{1}{10^3}\,;\qquad \frac{r^3\varphi^3}{l^3} < \frac{1}{10^9}\,;\qquad \frac{r^5\varphi^5}{l^5} < \frac{1}{10^{15}}\,;$$

u. s. f. Bei physicalischen Beobachtungen kommen freilich Torsionswinkel vor, welche mehre ganze Umdrehungen betragen; indessen sind dabei die Drähte oder Fäden so dünn, dass die höhern Potenzen von $\frac{r\varphi}{l}$ auch hier unbedenklich weggelassen werden können. Man pflegt sich aus diesem Grunde mit dem ersten Gliede des obigen Ausdrucks zu begnügen und

$$(4.)\qquad T = \frac{\pi\varepsilon r^4\varphi}{4l}$$

zu setzen. Will man den Torsionswinkel lieber in Graden haben, so sei α die Anzahl dieser Grade, und es findet sich:

$$(5.) \qquad T = \frac{\pi^2 \varepsilon r^4 \alpha}{720 l} .$$

Um auf analoge Weise den Torsionswiderstand eines *Prisma's* von quadratischem Querschnitt zu finden, mögen, der leichtern Integration wegen, statt des Abstandes ϱ rechtwinklige Coordinaten x, y eingeführt werden, welche parallel mit den Seiten des Quadrats an dem freien gewundenen Ende sind und in dessen Mittelpunct ihren Anfang haben. Es wird dann in der Gleichung 1) statt ϱ der gleichgeltende Werth $\sqrt{(x^2+y^2)}$ und $\partial x\, \partial y$ statt μ zu setzen sein. Vorher wird es jedoch gut sein, die Wurzelgrösse in eine Reihe aufzulösen. Dann ergiebt sich für den Torsionswiderstand eines *quadratischen* Schaftes der Ausdruck

$$(6.)\ T' = \int\int \varepsilon \left[\frac{\varphi}{2l} (x^2+y^2) + \frac{\varphi^3}{8l^3}(x^2+y^2)^2 - \frac{\varphi^5}{16 l^5} (x^2+y^2)^3 + \ldots \right] \partial x\, \partial y .$$

Bezeichnet man die halbe Seite des Quadrats durch s, so sind die beiden Integrationen, die eine nach x, die andre nach y, zwischen den Grenzen $-s$ und $+s$ auszuführen; sie geben

$$(7.) \qquad T' - \varepsilon s^3 \left(\tfrac{4}{3} \frac{s\varphi}{l} + \tfrac{14}{45} \frac{s^3 \varphi^3}{l^3} - \tfrac{6}{35} \frac{s^5 \varphi^5}{l^5} + \ldots\ldots \right),$$

oder, wenn man bei dem ersten Gliede stehen bleibt, annähernd:

$$(8.) \qquad T' = \frac{4 \varepsilon s^4 \varphi}{3l}$$

und für einen in Graden ausgedrückten Torsionswinkel:

$$(9.) \qquad T' = \frac{\pi \varepsilon s^4 \alpha}{135 l} .$$

Um an vorstehende Formeln den Maassstab der Erfahrung legen zu können, ist zuvörderst die Kenntniss des *Elasticitäts-Moduls* ε nöthig. Derselbe kann auf verschiedne Weise durch Versuche gefunden werden.

Erstens durch Ausdehnung. Wird ein elastischer Körper (Draht oder Prisma), von dem Querschnitt q und der Länge l, durch die Kraft p, welche jedoch keine bleibende Gestaltveränderung hervorbringen darf, um Δl verlängert, so ist

$$\varepsilon = \frac{p \cdot l}{q \cdot \Delta l} .$$

Zweitens durch Biegung. Wird ein elastischer Stab von rechteckigem Querschnitt und hinreichender Stärke, um nicht schon durch sein eignes Gewicht eine merkliche Biegung zu erleiden, in horizontaler Lage an seinen beiden End-

puncten unterstützt, aber *nicht* fest geklemmt, und in der Mitte ein Gewicht p angehängt, welches eine nur sehr kleine Senkung a hervorbringt, so wird der Elasticitätsmodul durch die Formel

$$\varepsilon = \tfrac{1}{4}\frac{p\,l^3}{a\,b\,c^3}$$

gefunden, wo b die Breite, c die Dicke (in der Richtung der Schwere) und l die Länge des Stabes bedeutet.

Wird, *drittens*, ein solcher Stab an einem Ende *eingeklemmt*, während das andre *frei* bleibt, in der Richtung der Dimension c in Querschwingungen versetzt, und ist ferner die Beschleunigung der Schwere, d. h. die in der ersten Secunde erlangte Endgeschwindigkeit eines freifallenden Körpers g und das der Raum-Einheit des Stoffs, aus welchem der Stab besteht, zukommende Gewicht γ, so findet zwischen der Anzahl n der in einer Secunde beobachteten Schwingungen und dem Elasticitätsmodul folgende Beziehung Statt:

$$n = \frac{3{,}51566..\,c}{4\pi l^2}\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon g}{3\gamma}}.$$

Wird die Anzahl n aus dem gehörten *Klangton* geschlossen, so ist zu beachten, dass in obiger Formel der tiefste Ton (ohne Knoten) vorausgesetzt wird; für die höheren Töne ist der Coefficient $3{,}51566\ldots = (1{,}87501\ldots)^2$ nicht mehr gültig, sondern es entsprechen diesen höheren Tönen die Quadrate der übrigen Wurzeln, welche sich aus der Gleichung:

$$\cos z = -\frac{2}{e^z + e^{-z}}$$

ergeben, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen ist.

Endlich, *viertens*, ist die Anzahl der in einer Secunde erfolgenden Längsschwingungen eines elastischen Stabes:

$$n' = \frac{(\sqrt{\varepsilon g})}{2l\sqrt{\gamma}};$$

woraus der Elasticitätsmodul ebenfalls leicht berechnet werden kann.

Die analytische Begründung vorstehender Formeln findet man unter Andern in der Abhandlung „Ueber Schwingungen, mit besonderer Anwendung auf die Untersuchung der Elasticität fester Körper," welche der für die Wissenschaft und für Alle, die ihn näher kannten, viel zu früh verstorbene *Seebeck* (der Jüngere) dem Programm für die im Jahre 1846 an der technischen Bildungsanstalt und Baugewerkschule zu *Dresden* anzustellenden Prüfungen vorausgeschickt hat. Die neusten und umfassendsten experimentalen

Untersuchungen über diesen Gegenstand sind meines Wissens diejenigen, welche *Wertheim*, zum Theil in Verbindung mit *Chevandier*, im Laufe des verflossenen Jahrzehents angestellt und in den „Annales de Chimie et de Physique" beschrieben hat. Es existirt auch ein besonderer Abdruck dieser Abhandlungen unter dem Titel: „Mémoires de Physique mécanique, par *G. Wertheim*; Paris 1848."

Wertheim brachte, um die Schwingungen eines Stabes aus dem zu prüfenden Stoffe zu zählen, an demselben ein kleines Häkchen an; dieses zeichnete während der Schwingungen des Stabes eine Wellenlinie auf eine in Umdrehung versetzte und mit Russ überzogene Glasscheibe. Da es sich jedoch zeigte, dass die Umdrehungsgeschwindigkeit der Glasscheibe nicht hinreichend genau regulirt werden konnte, liess er eine Stimmgabel von bekannter Tonhöhe gleichzeitig ihre Schwingungen auf derselben Scheibe abzeichnen. Indem er nun auf letzterer, von ihrer Umdrehungsaxe aus, nach der Peripherie Radien zog, und wusste, dass die in demselben Radius liegenden Wellen beider Curven nothwendig genau gleichzeitigen Schwingungen des Stabes und der Stimmgabel entsprachen, war die Unsicherheit entfernt. Die genauere Beschreibung der bei diesen Versuchen angewendeten Apparate findet man a. a. O. (Ann. de Chimie etc. 3e serie, t. XII.)

Der Durchschnitt der Resultate, welche *Wertheim* durch Anwendung verschiedener Methoden in Bezug auf den Elasticitätsmodul des Schmied-Eisens fand, beträgt nahezu **20000** Kilogramme auf den Quadrat-Millimeter. Um Dies auf Preussisches Maass und Gewicht (Quadratzolle und Pfunde) zu reduciren, ist mit **1462,56** zu multipliciren; was

$$\varepsilon = 29\,251\,200$$

giebt. Hiermit stimmt die Angabe von *Weisbach* ziemlich überein, welcher den Elasticitätsmodul des Stab-Eisens (a. a. O. I, 197) auf **29** Millionen Pfund angiebt. Führt man letzteren Werth in die auch von *Weisbach* angenommenen Formeln (5 und 9) ein, welche den Torsionswinkel in Graden ausgedrückt enthalten, so ergiebt sich für den Torsionswiderstand einer cylindrischen Welle aus Schmied-Eisen:

$$T = 397\,526\,\frac{r^4\,\alpha}{l}.$$

und für den eines quadratischen Schaftes aus demselben Stoffe

$$T' = 674\,861\,\frac{s^4\,\alpha}{l}.$$

Weisbach findet jedoch nöthig, diese Formeln, da sie der Erfahrung nicht entsprechen, zu modificiren und setzt (a. a. O. Seite 239):

$$(10.) \qquad T = 280\,000\,\frac{r^4\,\alpha}{l} \text{ und}$$

$$(11.) \qquad T' = 470\,000\,\frac{s^4\,\alpha}{l};$$

was er dadurch zu rechtfertigen sucht, dass, wie er sagt, bei der Torsion die Fasern nicht bloss *ausgedehnt*, sondern auch *zusammengedrückt* werden. Dieser Umstand sei bei der vorausgegangenen Entwicklung, die mit der obigen im Wesentlichen übereinstimmt, nicht berücksichtigt worden.

Alle bisherigen Beobachtungen bestätigen, dass sich der Torsionswiderstand in der That wie die *vierte Potenz* des Halbmessers, wie der *Torsionswinkel* und *umgekehrt wie die Länge* der Welle verhält. In Bezug auf den constanten Factor aber zeigen sich, namentlich bei *Gerstner*, noch bei weitem grössere Unterschiede zwischen der theoretischen Formel und der Erfahrung, als die obigen. Derselbe findet nämlich (Handb. d. Mech. I, 374 u. f.), obgleich ursprünglich ebenfalls von den obigen Betrachtungen ausgehend, den Torsionswiderstand für cylindrische Wellen *gerade viermal so gross*, als ihn die Formel (4) angiebt. Der Irrthum ist nicht schwer zu entdecken. Einmal glaubt *Gerstner* den Unterschied zweier Grössen, welche sich wie $\sec\eta - 1$ zu $\sec\eta - \cos\eta$ verhalten, für einen sehr kleinen Winkel η vernachlässigen zu dürfen. Es ist aber:

$$\frac{\partial(\sec\eta - 1)}{\partial\eta} = \frac{\sin\eta}{\cos^2\eta} \quad \text{und} \quad \frac{\partial(\sec\eta - \cos\eta)}{\partial\eta} = \frac{\sin\eta}{\cos^2\eta} + \sin\eta:$$

also nähert sich obiges Verhältniss für unendlich abnehmende Winkel nicht der Einheit, sondern dem Bruch $\frac{1}{2}$ als Grenze. Sein Ergebniss verdoppelt *Gerstner* noch einmal aus einem nicht haltbaren Grunde, über den er sich selbst nur ziemlich unklar ausdrückt; „weil" sagt er „die Ausdehnung auch eine Zusam-„mendrückung der innern Theile der Welle veranlasst und so, wie wir bei der „Biegung der Balken gesehen haben, auf ein gleiches Rückwirkungsmoment sich „stützt ....." Beiläufig ist noch zu bemerken, dass die *Gerstner*'sche Formel in ihrer ursprünglichen Gestalt nur die *dritte* Potenz des Halbmessers enthält; da jedoch der Verfasser den Torsionswinkel durch den Bogen misst, welchen ein Punct an der Oberfläche der Welle beschreibt, so entspricht dieser Bogen dem obigen $r\varphi$, enthält also den Halbmesser als Factor. Nach der obigen Bezeichnungsweise ist die von *Gerstner* für cylindrische Wellen aufgestellte Formel:

$$(12.) \qquad T = \frac{\pi\varepsilon r^4\varphi}{l} = \frac{\pi^2\varepsilon r^4\beta}{180.l}.$$

Dieselben Abweichungen sind auch in die Berechnung des Torsionswiderstandes für *quadratische* Querschnitte übergegangen. Der von *Gerstner* für diesen Fall gefundene Ausdruck erhält durch die obige Bezeichnungen folgende Gestalt:

$$(13.) \qquad T' = 5{,}1612\,\frac{\varepsilon s^5 \varphi}{l} = 5{,}1612\,\frac{\pi \varepsilon s^4 \alpha}{180.l}\,.$$

Bei einer 1831 an dem technischen Institute zu *Prag* angestellten Reihe von Versuchen wurde unter andern ein 18 Zoll langer geschmiedeter Eisenstab von quadratischem Querschnitt, dessen Seite $\frac{4}{13}$ Zoll betrug, durch ein an einem Hebelsarm von $6\frac{1}{8}$ Zoll wirkendes Gewicht von 2 Österreichischen Pfunden um 1,15 Grad gedreht. Das *beobachtete,* auf einen Hebelsarm von 1 Zoll reducirte Torsionsmoment war also:

$$T' = 2.6\tfrac{1}{8} = 12\tfrac{1}{4}\ \text{Pfd.}$$

Reducirt man den für Preussische Quadratzolle und Pfunde gültigen Modul von 29 000 000 auf Österreichisches Maass und Gewicht, so ergiebt sich $\varepsilon = 24\,570\,000$ und hieraus das nach der *Gerstner*'schen Formel (13) berechnete Torsionsmoment:

$$T' = 79{,}214\ \text{Pfd.}$$

Selbst wenn man mit Rücksicht auf mögliche Verschiedenheiten der Beschaffenheit des Eisens $\varepsilon = 20\,000\,000$ setzt, verhält man immer nach $T' = 64{,}48$, statt 12,25 Pfd. *Gerstner* scheint also gar nicht nachgerechnet zu haben.

Aber auch die Formel (9) giebt noch einen zu grossen Werth; nämlich für den ersten Elasticitätsmodul $T' = 20{,}464$ und für den zweiten $T = 16{,}658$ Pfd. Österreichisches Maass.

Eine bei weitem bessere Uebereinstimmung mit der Erfahrung giebt die von *Poisson* für den Torsionswiderstand cylindrischer Körper aufgestellte Formel. Sie ist, unter Beibehaltung unserer Bezeichnungen:

$$(14.) \qquad T = \frac{\pi \varepsilon r^4 \varphi}{5l} = \frac{\pi^2 \varepsilon r^4 \alpha}{900 l}\,.$$

Dabei ist zu bemerken, dass *Poisson* statt des Elasticitätsmoduls eine Grösse in die Rechnung eingeführt hat, welche $\frac{2}{5}$ des Moduls beträgt. Setzt man zur Vergleichung mit der empirischen Formel (10) von *Weisbach* und in Uebereinstimmung mit den Beobachtungen von *Wertheim*, $\varepsilon = 29'{,}251\,000$, so verwandelt sich die Formel (14) in:

$$T = 320\,770\,\frac{r^4 \alpha}{l}\,.$$

Für $\varepsilon = 29'\,000\,000$ in runder Summe dagegen ergiebt sich nach derselben:

$$T = 318\,020\,\frac{r^4\,\alpha}{l}\,;$$

mithin immer noch etwas mehr, als man in der Wirklichkeit gefunden haben will. *Weisbach* sagt freilich nicht, auf welche Versuche oder Beobachtungen er seine Angaben stützt; doch setze ich voraus, dass sie den beim Maschinenwesen gemachten Erfahrungen entlehnt sind und insofern Vertrauen verdienen. Jedenfalls steht fest, dass die Abweichungen zwischen den Formeln (5 und 10), so wie zwischen (9 und 11), zu gross sind, als dass sie aus *Beobachtungsfehlern* hergeleitet werden könnten. Die oben entwickelte Theorie selbst muss daher noch an einem Mangel leiden; welcher auch nicht schwer nachzuweisen ist.

Wir haben nemlich ziemlich willkürlich angenommen, dass der Cylinder bei der Torsion genau seine ursprüngliche Gestalt beibehalte. Eine sehr kleine, für die gewöhnliche Beobachtung ganz unmerkliche Gestaltveränderung muss aber schon einen beträchtlichen Einfluss auf die Grösse des Torsionswiderstandes haben. Namentlich liegt es auf der Hand, dass jede Verkürzung des Cylinders seinen Torsionswiderstand vermindern muss, indem dann eine geringere Ausdehnung der einzelnen Fasern Statt findet, als in der vorhergehenden Entwicklung vorausgesetzt wurde. Dazu kommt noch ein anderer, sogleich nachher zu erwähnender Umstand, welcher macht, *dass nicht einmal die ganze Ausdehnung der Faser als bei dem Torsionswiderstand wirksam angesehen werden kann.*

Wir wollen hier nicht, wie *Poisson* in dem mehrgedachten Memoire, auf die Gleichungen zurückgehen, welche die gegenseitigen Wirkungen der Moleculen darstellen, noch überhaupt den Gegenstand in so allgemeiner Weise behandeln, wie es von dem berühmten Geometer geschehen ist, sondern nur sofort von gewissen, durchgängig als richtig anerkannten *physicalischen* Gesetzen ausgehen, auf welche die mathematische Analyse zuerst sich beziehen muss, während Versuche nur die nachträgliche Bestätigung gegeben zu haben scheinen.

Wenn ein elastischer Körper durch zwei an entgegengesetzten Enden angreifende und in entgegengesetzten Richtungen wirkende Kräfte in der einen Dimension ausgedehnt wird, so vermindert sich der auf diese Dimension senkrechte Querschnitt nicht ganz in demselben Verhältniss wie erstere zunimmt, so dass im Ganzen das Volumen des Körpers sich vergrössert. Es sei δ die relative Vergrösserung der einen Dimension, und dieses δ ein so kleiner Bruch, dass schon die zweite Potenz weggelassen werden kann: so findet bei einem homogenen elastischen Körper gleichzeitig eine relative Verminderung der beiden andern

Dimensionen Statt, welche $\frac{1}{m}.\delta$ beträgt. Hierbei ist, dem Vorausgeschickten zufolge, jedenfalls $m>2$; denn wäre $m=2$, so würde, in dem sich die ursprüngliche Länge l in $(1+\delta)\ l$ verwandelt, der eine der beiden darauf senkrechten Durchmesser d_1 in $(1-\frac{1}{2}\delta)d_1$ übergehen; eben so der zweite d_2 in $(1-\frac{1}{2}\delta)d_2$, mithin der Querschnitt q in $(1-\frac{1}{2}\delta)^2 q$, oder näherungsweise in $(1-\delta)q$; das Volumen k aber würde gar keine Veränderung von der Ordnung des Bruches δ erleiden. Ist dagegen $m>2$, so hat man auch:

$$\left(1+\delta-\frac{2}{m}\delta\right)k>k,$$

wodurch, in Uebereinstimmung mit der *Beobachtung*, eine *Vergrösserung* des Volumens angedeutet wird. Das Umgekehrte findet bei der *Zusammendrückung* elastischer Körper durch äussere Kräfte Statt. Hier ändert δ sein Vorzeichen und es ist daher

$$\left(1-\delta+\frac{2}{m}\delta\right)k<k;$$

d. h. es findet eine *Verminderung* des ursprünglichen *Volumens* Statt. *Poisson* setzt $m=4$; woraus sich für das veränderte Volumen $(1\pm\frac{1}{2}\delta)k$ ergiebt. Die Richtigkeit dieses Zahlenwerths ist neuerlich von *Wertheim* bezweifelt worden. Derselbe glaubt in Folge seiner Versuche, mit grösserer Wahrscheinlichkeit $m=3$ setzen zu müssen, und gelangt, indem er diese Zahlen mit den allgemeinen Bedingungen für das Gleichgewicht der Molecularkräfte in Verbindung bringt, zu dem hier nur beiläufig zu erwähnenden Resultat, dass sich die gegenseitigen Wirkungen der Moleculen umgekehrt, wie die *vierzehnte* Potenz ihrer Abstände verhalten. (Man sehe: Memoire sur l'équilibre des corps solides homogènes, présenté à l'Académie des Sciences le 10 Fevrier 1848 par *M. G. Wertheim*; Ann. de Chimie etc. 3me serie t. XXIII.)

Wir wollen jetzt das Vorstehende auf den Torsionswiderstand eines Cylinders von der Länge l und dem Halbmesser r anwenden, den wir auch hier wieder als aus einzelnen, ursprünglich mit der Axe parallelen, elastischen Fasern zusammengesetzt ansehen. Nach der Torsion um einen Winkel, dessen auf den Radius 1 reducirte Bogenlänge φ sein mag, gehe die Länge l in $l+\Delta l$ über, und der Abstand ϱ einer beliebigen Faser von der Axe in $\varrho+\Delta\varrho$. Durch die in die Längenrichtung der gewundenen Faser fallende Componente der wirkenden Kraft wird die Faser eine Ausdehnung erfahren, deren Verhältniss zur ursprünglichen Länge wir mit u bezeichnen wollen. Ferner werden sämmtliche Fasern von gleichem Abstand ϱ einen Seitendruck auf einander aus-

üben, ohne welchen, wie wir oben gesehen haben, überhaupt kein Gleichgewicht Statt finden könnte. Die Richtung dieses Drucks auf eine einzelne Faser bildet eine Tangente an den innern Cylinder, von dem Halbmesser ϱ, oder genauer, $\varrho + \Delta\varrho$. Die dadurch hervorgebrachte relative Verkürzung der entsprechenden Dimension sei v. Nimmt man den Querschnitt der Faser von der Gestalt $abcd$ (Fig. 3) an, so, dass derselbe von zwei concentrischen Kreisbogen ab, cd, und den Geraden ad, bc, welche verlängert in der Axe des Cylinders sich schneiden, eingeschlossen ist, so sind die Drucke op, oq, welche die Faser von beiden Seiten erleidet, nicht genau entgegengesetzt, sondern schliessen einen sehr kleinen Winkel ω ein. Sie haben daher eine Resultirende or, welche die der Axe näher liegenden Fasern in der Richtung des Radius auszudehnen strebt. Die entsprechende Vergrösserung des Durchmessers einer einzelnen Faser, ebenfalls wieder als Bruchtheil der ursprünglichen Dimension ausgedrückt, sei w.

Dem Vorausgeschickten zufolge bringt nun jede der drei so eben betrachteten Kräfte nicht nur eine Veränderung derjenigen Dimension der Faser hervor, welche mit der Richtung der Kraft übereinstimmt, sondern auch eine Veränderung in den zwei darauf senkrechten Dimensionen. Die letzteren beiden Variationen haben aber immer das entgegengesetzte Vorzeichen und betragen nur $\frac{1}{m}$ der ersteren. Die ursprüngliche Länge einer Faser ist der der Axe gleich, also l; nach der Torsion geht sie in

$$\left(1 + u + \frac{1}{m} v - \frac{1}{m} w\right) l$$

über. In dem Dreieck ABD (Fig. 2) sei AB die Länge $l + \Delta l$ des gewundenen Cylinders und AD die Länge der gewundenen Faser, so ist

$$BD = (\varrho + \Delta\varrho)\varphi.$$

Setzt man noch der Kürze wegen den Winkel $BAD = \eta$, so ergiebt sich

$$\left(1 + u + \frac{1}{m} v - \frac{1}{m} w\right) l = (l + \Delta l) \sec\eta,$$

oder, wenn man von $\sec\eta$ den Werth

$$\sec\eta = 1 + \frac{(\varrho + \Delta\varrho)^2 \varphi^2}{2(l + \Delta l)^2} + \ldots\ldots$$

einführt und einige leichte Reductionen macht, bei welchen die höhern Potenzen und Producte der sehr kleinen Grössen $\frac{\varrho^2\varphi^2}{l^2}$, $\frac{\Delta l}{l}$, $\frac{\Delta\varrho}{\varrho}$, wie in der Folge überall, weggelassen werden, als erste Bedingungsgleichung:

$$\text{(I.)} \qquad u + \frac{1}{m}\,v - \frac{1}{m}\,w = \frac{\varrho^2\varphi^2}{2l^2} + \frac{\Delta l}{l}\,.$$

Fasset man ferner sogleich sämmtliche Fasern von demselben Abstande ϱ zusammen, so ist die Summe ihrer Durchmesser nach der Richtung der Tangente, im natürlichen Zustande, $2\pi\varrho$. Durch Betrachtungen, welche den in Bezug auf die Längendimension der Faser angestellten analog sind, findet sich, dass diese Summe der Durchmesser für den gewundenen Zustand in

$$\Big(1 - \frac{1}{m}\,u - v - \frac{1}{m}\,w\Big)2\pi\varrho$$

übergeht. Stellt man sich die von diesen Fasern gebildete Cylinderfläche in einer Ebene ausgebreitet vor, so wird sie ein Parallelogramm $ADIL$ (Fig. 2) sein, dessen Grundlinie

$$DI = 2\pi(\varrho + \Delta\varrho)$$

und in welchem der Winkel

$$DIL = \tfrac{1}{2}\pi - \eta$$

ist. Hieraus ergiebt sich ein zweiter Ausdruck für die Summe DK jener Durchmesser im gewundenen Zustande, und wenn man denselben dem vorhin gefundenen gleich setzt, die weitere Beziehung

$$2\pi\varrho\Big(1 - \frac{1}{m}\,u - v - \frac{1}{m}\,w\Big) = 2\pi(\varrho + \Delta\varrho)\cos\eta$$

zur Bestimmung der unbekannten Grössen u, v, w, Δl, $\Delta\varrho$. In Erwägung, dass

$$\cos\eta = 1 - \frac{(\varrho + \Delta\varrho)^2\varphi^2}{2(l + \Delta l)^2} + \ldots..$$

ist, lässt sich die vorige Gleichung auch in folgende verwandeln:

$$\text{(II.)} \qquad \frac{1}{m}\,u + v + \frac{1}{m}\,w = \frac{\varrho^2\varphi^2}{2l^2} - \frac{\Delta\varrho}{\varrho}\,.$$

Bezeichnet man Drittens, den Durchmesser der Faser in der Richtung des Halbmessers, und zwar zuvörderst im natürlichen Zustande, durch das Differential $\partial\varrho$ des Abstandes von der Axe, so wird derselbe nach der Torsion in $\partial(\varrho + \Delta\varrho)$ übergehen. Dies giebt:

$$\Big(1 - \frac{1}{m}\,u + \frac{1}{m}\,v + w\Big)\partial\varrho = \partial(\varrho + \Delta\varrho)$$

oder

$$\text{(III.)} \qquad -\frac{1}{m}\,u + \frac{1}{m}\,v + w = \frac{\partial\,\Delta\delta}{\partial\varrho}\,.$$

Der Seitendruck, in Folge dessen sich der Durchmesser der Faser (in der Richtung der Tangente) um v vermindert, beträgt auf die Längen-Einheit der

Faser $\varepsilon v \partial \varrho$; mithin ist die Resultirende or (Fig. 3) gleich $2\varepsilon v \partial \varrho \sin \frac{1}{2}\omega$, oder, wenn man sich unter ω einen unendlich kleinen Winkel (den Contingenzwinkel der die Richtung der gewundenen Fasern rechtwinklig durchschneidenden Schraubenlinie) vorstellt, gleich $\varepsilon v \partial \varrho \omega$. Der Durchmesser einer Faser, in dem Abstande ϱ' von der Axe, und zwar ihr Durchmesser nach der Richtung des Radius, wird nun durch alle jene Resultirenden (or') ausgedehnt, welche den in demselben Radius, aber entfernter von der Axe liegenden Fasern entsprechen. Die Summe derselben wird durch ein zwischen den Grenzen ϱ' und r genommenes Integral ausgedrückt, und muss gleich sein dem Product aus der relativen Ausdehnung des Durchmessers, dem auf die Richtung der ausdehnenden Kräfte senkrechten Querschnitt und aus dem Elasticitätsmodul ε. Sie ist also

$$\varepsilon \varpi \varrho' \omega = \int_{\varrho'}^{r} \varepsilon v \partial \varrho \omega ,$$

oder, wenn man die auf beiden Seiten gleichen constanten Factoren, so wie den Index von ϱ, der jetzt nicht weiter nöthig ist, weglässt:

$$\varpi \varrho = C - \int v \partial \varrho ;$$

wobei C eine von dem Abstande ϱ unabhängige Constante bezeichnet. Differentiirt man endlich diese Gleichung, so findet sich:

$$\text{(IV.)} \qquad \varpi \partial \varrho + \varrho \partial \varpi = - v \partial \varrho .$$

Die vier Gleichungen, welche aus dem obigen Gesetz für die Gestaltveränderungen einer homogenen elastischen Faser und aus der Bedingung abgeleitet wurden, dass der Cylinder auch im gewundenen Zustande ein Continuum bilden soll, der besseren Uebersicht wegen noch einmal zusammengestellt, sind folgende:

$$\text{(I.)} \qquad u + \frac{1}{m} v - \frac{1}{m} \varpi = \frac{\varrho^2 \varphi^2}{2l^2} + \frac{\Delta l}{l} ,$$

$$\text{(II.)} \qquad \frac{1}{m} u + v + \frac{1}{m} \varpi = \frac{\varrho^2 \varphi^2}{2l^2} - \frac{\Delta \varrho}{\varrho} ,$$

$$\text{(III.)} \qquad - \frac{1}{m} u + \frac{1}{m} v + \varpi = \frac{\partial \Delta \varrho}{\partial \varrho} ,$$

$$\text{(IV.)} \qquad \varrho \frac{\partial w}{\partial \varrho} + v + \varpi = 0 .$$

Aus (I, II u. III) ergiebt sich:

$$\frac{(m-2)(m+1)}{m} v = - \frac{\Delta l}{l} - \frac{\partial \Delta \varrho}{\partial \varrho} - (m-1) \cdot \frac{\Delta \varrho}{\varrho} + (m-2) \cdot \frac{\varrho^2 \varphi^2}{2l^2}$$

$$\frac{(m-2)(m+1)}{m} \varpi = + \frac{\Delta l}{l} + (m-1) \cdot \frac{\partial \Delta \varrho}{\partial \varrho} + \frac{\Delta \varrho}{\varrho} .$$

Geht man, wie bisher, von der Voraussetzung aus, dass die Endfläche des Cylinders auch nach der Torsion eine Ebene bleibt, so ist Δl von ϱ unabhängig, also

$$\frac{(m-2)(m+1)}{m}\varrho\frac{\partial w}{\partial\varrho}=(m-1)\varrho\frac{\partial^2\Delta\varrho}{\partial\varrho^2}+\frac{\partial\Delta\varrho}{\partial\varrho}-\frac{\Delta\varrho}{\varrho}.$$

Führt man diese Ausdrücke in die vorher mit $\frac{(m-2)(m+1)}{m}$ multiplicirte Gleichung (IV) ein, so erhält man:

$$\varrho\frac{\partial^2\Delta\varrho}{\partial\varrho^2}+\frac{\partial\Delta\varrho}{\partial\varrho}-\frac{\Delta\varrho}{\varrho}+\frac{m-2}{m-1}\cdot\frac{\varrho^2\varphi^2}{2l^2}=0.$$

Ein Punct, welcher sich ursprünglich *in der Axe* des Cylinders befand, wird auch nach der Torsion in derselben bleiben; denn während des Ueberganges in den letztern Zustand sind die auf einen solchen Punct wirkenden Kräfte stets ganz symmetrisch um denselben vertheilt, so dass kein Grund ist, warum der Punct aus der Axe heraustreten sollte; mit andern Worten: $\Delta\varrho$ und ϱ müssen gleichzeitig verschwinden. Setzt man demnach

$$\Delta\varrho=a\varrho+b\varrho^2+c\varrho^3+d\varrho^4+\ldots..$$

so wird:

$$\frac{\Delta\varrho}{\varrho}=a+b\varrho+c\varrho^2+d\varrho^3+\ldots..$$

$$\frac{\partial\Delta\varrho}{\varrho}=a+2b\varrho+3c\varrho^2+4d\varrho^3+\ldots..$$

$$\varrho\frac{\partial^2\Delta\varrho}{\partial\varrho^2}=2b\varrho+6c\varrho^2+12d\varrho^3+\ldots..$$

Dadurch verwandelt sich die obige Differentialgleichung in:

$$3b\varrho+8c\varrho^2+15d\varrho^3+\ldots..=-\frac{m-2}{m-1}\cdot\frac{\varrho^2\varphi^2}{2l^2}$$

und es ergiebt sich

$$c=-\frac{m-2}{m-1}\cdot\frac{\varphi^2}{16l^2}.$$

b, d und alle Coefficienten der höhern Potenzen von ϱ in dem Ausdruck von $\Delta\varrho$ aber sind Null.

Um den Werth der eliminirten, also unbestimmt gebliebenen Constante a zu finden, dient die Betrachtung, dass die Ausdehnung w an der *Oberfläche* des Cylinders verschwinden muss. Es ist aber, mit Berücksichtigung der bis jetzt gefundenen Ausdrücke:

$$\frac{(m-2)(m+1)}{m}w=ma-\frac{(3m-2)(m-2)}{8(m-1)}\cdot\frac{\varrho^2\varphi^2}{2l^2}+\frac{\Delta l}{l}.$$

Setzt man nun gleichzeitig $\varrho = r$ und $\omega = 0$, so findet sich:

$$a = \frac{(3m-3)(m-2)}{m(m-1)} \cdot \frac{r^2\varphi^2}{16l^2} - \frac{1}{m} \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

$$\omega = \frac{m(3m-2)}{(m-1)(m+1)} \cdot \frac{(r^2-\varrho^2)\varphi^2}{16l^2}$$

$$u = \frac{m(3m-2)}{(m-1)(m+1)} \cdot \frac{(3\varrho^2-r^2)\varphi^2}{16l^2}.$$

Führt man die letzteren beiden Werthe in die Gleichung (1) ein, so erhält man

$$u = \frac{(3m-2)r^2 + (4m^2-6m)\varrho^2}{8(m-1)(m+1)} \cdot \frac{\varphi^2}{l^2} + \frac{\Delta l}{l}.$$

Unter der Voraussetzung nun, dass die Richtungen der wirkenden Kräfte in einer auf die Axe des Cylinders senkrechten Ebene liegen, ist keine äussere Kraft vorhanden, welche die in der Axe selbst liegende Faser ausdehnen könnte; es müssen also u und ϱ gleichzeitig Null sein. Hieraus ergiebt sich

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{3m-2}{8(m^2-1)} \cdot \frac{r^2\varphi^2}{l^2};$$

wobei das negative Vorzeichen andeutet, dass der Cylinder bei der Torsion eine *Verkürzung* erleidet. Schliesslich erhalten wir auf diese Weise für die bei dem Torsionswiderstande wirksame Längen-Ausdehnung einer beliebigen Faser in dem Abstande ϱ von der Axe:

$$u = \frac{2m^2-3m}{4(m^2-1)} \cdot \frac{\varrho^2\varphi^2}{l^2}.$$

Nun ist, wie sich schon früher ergab, für den Torsionswiderstand eines *Ringes*, dessen innerer und äusserer Halbmesser ϱ und $\varrho + \partial\varrho$ sind:

$$\frac{\partial T}{\partial \varrho} \cdot \partial\varrho = 2\pi\varepsilon\varrho^2\partial\varrho \frac{u}{\sin\eta};$$

also, wenn man statt u vorstehenden Ausdruck und statt $\sin\eta$ den genäherten Werth $\frac{\varrho\varphi}{l}$ setzt:

$$T = \int_0^r \pi\varepsilon \cdot \frac{2m^2-3m}{2m^2-2} \cdot \frac{\varphi}{l} \cdot \varrho^3\partial\varrho.$$

Führt man endlich die angedeutete Integration aus, so erhält man für den gesuchten Torsionswiderstand eines Cylinders von dem Halbmesser r und der Länge l:

$$(15.) \qquad T = \pi\varepsilon \cdot \frac{2m^2-3m}{8m^2-8} \cdot \frac{r^4\varphi}{l},$$

d. h. für $m = 4$:

$$(16.) \qquad T = \frac{\pi \varepsilon \varrho^4 \varphi}{6l} = \frac{\pi^2 \varepsilon r^4 \alpha}{1080 l}.$$

Für die benutzten Hülfsgrössen ergiebt sich unter derselben Voraussetzung $(m = 4)$:

$$u = \frac{\varrho^2 \varphi^2}{3l^2} \quad ; \qquad \frac{\Delta l}{l} = -\frac{r^2 \varphi^2}{12 l^2}$$

$$v = \frac{(3\varrho^2 - r^2)\varphi^2}{6l^2} \quad ; \qquad \frac{\Delta l}{\varrho} = \frac{(3r^2 - \varrho^2)\varphi^2}{24 l^2}$$

$$\alpha = \frac{(r^2 - \varrho^2)\varphi}{6l^2} \quad ; \qquad \frac{\Delta r}{r} = \frac{r^2 \varphi^2}{12 l^2}.$$

Die vorstehende Betrachtungsweise passt allerdings nicht ganz auf *quadratische* Schäfte, jedenfalls aber scheint es eine für practische Zwecke ganz genügende Annäherung gewähren zu müssen, wenn man annimmt, dass Fasern von demselben Querschnitt und in gleichem Abstande von der Axe denselben Torsionswiderstand leisten, der Querschnitt des gewundenen Körpers mag ein *Kreis,* oder ein *Quadrat* sein. Unter dieser Voraussetzung würden sich nur die Grenzen der Integration ändern. Zur leichtern Ausführung dieser Integration verwandele man wieder, wie früher in dem ähnlichen Falle, die Polarcoordinaten in rechtwinklige. Der Torsionswiderstand einer einzelnen Faser von dem Querschnitt μ kann durch

$$\varepsilon \mu . \frac{\varrho u}{\sin \eta}$$

ausgedrückt werden; es ist aber für einen quadratischen Querschnitt:

$$\mu = \partial x \partial y$$

$$\varrho = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

$$u = \frac{2m^2 - 3m}{4m^2 - 4}(x^2 + y^2)\frac{\varphi^2}{l^2}$$

$$\sin \eta = \sqrt{(x^2 + y^2)} \cdot \frac{\varphi}{l},$$

mithin ist der gesammte Torsionswiderstand eines *quadratischen* Schaftes:

$$T' = \varepsilon \cdot \frac{2m^2 - 3m}{4m^2 - 4} \cdot \frac{\varphi}{l} \int\int (x^2 + y^2) \partial x \partial y ;$$

wo die eine Integration zwischen den Grenzen $x = -s$ bis $x = +s$ und die zweite zwischen den Grenzen $y = -s$ bis $y = +s$ auszuführen ist, wenn man nämlich, wie oben, die halbe Seite des Quadrates durch s bezeichnet. Dies giebt:

$$(17.) \qquad T' = \varepsilon \cdot \frac{4m^2 - 6m}{3m^2 - 3} \cdot \frac{\varrho^4 \varphi}{l}$$

und für $m = 4$:

$$(18.) \qquad T' = \frac{8\varepsilon s^4 \varphi}{9l} = \frac{2\pi\varepsilon s^4 \alpha}{405 l}.$$

Setzt man dagegen mit *Wertheim* $m = 3$, so ergiebt sich für einen *kreisförmigen* Querschnitt:

$$(19.) \qquad T = \frac{9}{64} \cdot \frac{\pi\varepsilon r^4 \varphi}{l} = \frac{\pi^2 \varepsilon r^4 \alpha}{1280 . l}$$

und für einen *quadratischen* Querschnitt:

$$(20.) \qquad T = \frac{3}{4} \cdot \frac{\varepsilon s^4 \varphi}{l} = \frac{\pi\varepsilon s^4 \alpha}{240 l}.$$

Setzt man in den Formeln (5, 14, 16 und 19) den Elasticitätsmodul $\varepsilon = 29',251\,000$, so erhält man folgende Resultate und Differenzen gegen die empirische Formel (10):

Formel	Numerischer Factor des Bruchs $\frac{r^4 \alpha}{l}$.	Differenz dieses Factors gegen den in (10)
(5.)	400 966	+ 120 966
(14.)	320 773	+ 40 773
(16.)	267 311	— 12 689
(19.)	225 543	— 54 457

Hieraus zeigt sich, dass die Formel (16), d. h. der von mir gefundene Ausdruck, wenn man in demselben $m = 4$ setzt, mit der Erfahrung am besten übereinstimmt. Die noch Statt findende Differenz kann sehr wohl aus Beobachtungsfehlern hergeleitet werden; aber wenn nicht, kann, wenigstens in practischer Hinsicht, der Umstand, dass der Fehler negativ ist, oder mit andern Worten, dass die Formel den Torsionswiderstand etwas zu klein, nicht zu gross angiebt, der Formel nur zur Empfehlung gereichen. Die Formel (14) rührt von *Poisson* her; die unzweifelhaft unrichtige *Gerstner*'sche Formel ist nicht mit aufgeführt worden.

Eben so kommt, wie aus der folgenden Zusammenstellung zu ersehen, unter den Formeln für quadratische Querschnitte die Formel (18), welcher die Voraussetzung $m=4$ zum Grunde liegt, der empirischen Formel (11) am nächsten.

Formel	Numerischer Factor des Bruchs $\frac{s^4 \alpha}{l}$	Differenz dieses Factors gegen den in (11)
(9.)	680 702	+ 210 702
(18.)	453 801	— 16 199
(20.)	382 895	— 87 105

Die experimentale Prüfung dieser Formeln anlangend, hat *Gerstner* bei seinen Versuchen über die Torsion das eine Ende des Cylinders oder Prisma's auf einer Drehbank fest eingespannt, während an dem entgegengesetzten Ende, ausser dem wirkenden Gewicht, ein Zeiger angebracht war, welcher den dem Torsionswinkel zugehörigen Bogen bedeutend vergrössert zeigte. (Man vergl. dessen Handb. d. Mech. I, 377 u. f., so wie Tab. XVI, Fig. 12 u. 13 der dazu gehörigen Kupfertafeln.) Dieselbe Voraussetzung ist in der vorstehenden Entwicklung gemacht; in der Praxis pflegt aber keines der beiden Enden fest zu sein, sondern es wirken, nachdem eine constante Umdrehungsgeschwindigkeit eingetreten ist, an den Wellen und Schäften der Räder in der Regel zwei gleich grosse Kräfte, welche erstere in entgegengesetzten Richtungen zu drehen streben. Es lässt sich jedoch leicht zeigen, dass in diesem Falle immer noch die früher gefundenen Beziehungen zwischen jeder einzelnen der beiden wirkenden Kräfte, zwischen den Dimensionen der Welle oder des Schaftes und dem Winkel Statt finden, welchen zwei ursprünglich parallele Radien an den entgegengesetzten Enden nach der Windung einschliessen; vorausgesetzt, dass die Angriffspuncte der wirkenden Kräfte in diesen Endflächen liegen. Denn wenn man sich den die Axe halbirenden, auf letztere senkrechten Querschnitt *fest* vorstellt, so hat man zwei Wellen von der halben Länge, deren Torsion aber auch nur halb so gross ist, so dass das Verhältniss $\varphi : l$ unverändert bleibt. Die in der Praxis gewöhnliche Anordnung ist gewiss auch für den Zweck eines Versuches vorzuziehen, indem die vollkommene Befestigung des einen Endes schwierig, wenn nicht unausführbar ist.

Eine Messung der *Gestaltveränderungen,* welche der gewundene Körper erleidet, könnte zur Bestätigung oder Widerlegung unserer Theorie dienen, dürfte aber ebenfalls grosse Schwierigkeiten haben, und nur mit Hülfe der feinsten Instrumente bei einem Stoffe gelingen, für welchen die Grenze der Elasticität einen hinreichenden Spielraum hat, weil die Gestaltveränderungen von einer höhern Ordnung der Kleinheit sind, als der Torsionswinkel.

Zur Prüfung des *Torsionswiderstandes* dünner Drähte ist ein anderes Verfahren nöthig, bei welchem dann die Befestigung des einen Endes nicht wohl vermieden werden kann. Es besteht darin, dass man an einem solchen Drahte einen schweren Körper hängt, und denselben in Schwingungen um die von der Verlängerung des Drahts gebildete lothrechte Axe versetzt. Aus der Anzahl der in einer gegebenen Zeit beobachteten Oscillationen lässt sich dann der constante Factor leicht berechnen, welcher, mit dem Torsionswinkel multiplicirt, den

Torsionswiderstand giebt. Die Begründung der Formel, nach welcher diese Rechnung ausgeführt wird, mag noch, obgleich hinreichend bekannt, der Vollständigkeit wegen hier Platz finden.

Es sei AB (Fig. 4) die von oben gesehene Gleichgewichtslage der Mittellinie eines Stabes, welcher an dem zu prüfenden Drahte so aufgehängt ist, dass die Mittellinie horizontal ist. Bringt man den Stab in die derselben horizontalen Ebene angehörige Lage $A'B'$, indem man ihn um seinen Schwerpunct C dreht, und lässt ihn hier los, so wird er in die frühere Lage zurückkehren. Die Kraft, welche diese Bewegung hervorbringt, ist offenbar dieselbe, welche wir bisher unter dem Namen des Torsionswiderstandes betrachtet haben; in dem gegenwärtigen Falle ist aber der Torsionswinkel fortwährenden Veränderungen unterworfen. Die übrigen, während der Dauer des Versuchs constanten Grössen sollen diesmal unter der Bezeichnung k zusammengefasst werden. Nennt man ferner α den dem Winkel $A'CA$ für den Radius 1 entsprechenden Bogen, und ω den Bogen, welchen ein Punct der Mittellinie, in der Entfernung 1 von C, bei der Rückkehr des Stabes in seine Gleichgewichtslage schon beschrieben hat, so ist der augenblickliche Torsionswinkel

$$\varphi = \alpha - \omega$$

und der entsprechende Torsionswiderstand

$$T = k(\alpha - \omega).$$

Nun ist, wenn man noch die Beschleunigung der Schwere gleich g und das sogenannte Trägheitsmoment des Stabes gleich i setzt, nach einem bekannten Satze der Mechanik, der Zuwachs an Winkelgeschwindigkeit in dem Zeittheilchen ∂t:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t} = \frac{kg}{i}(\alpha - \omega)\,\partial t.$$

Hieraus folgt $2\frac{\partial w}{\partial t}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial t} = \frac{2kg}{i}(\alpha - \omega)\,\partial\omega$, und durch Integration:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 = \frac{kg}{i}(2\alpha\omega - \omega^2);$$

wobei die sonst hinzuzufügende Constante offenbar Null ist, weil für den Anfang der Oscillationsbewegung, oder für $\omega = 0$, auch die Winkelgeschwindigkeit $\frac{\partial w}{\partial t}$ verschwinden muss. Aus obiger Gleichung ergiebt sich für die Zeit, in welcher der Stab in die Lage ab gelangt:

$$t = \sqrt{\left(\frac{i}{kg}\right)}\cdot\int\frac{\partial w}{\sqrt{(2\alpha w - w^2)}}$$

Es ist aber, abgesehen von der hinzukommenden Constante:

$$\int \frac{\partial w}{\sqrt{(2\alpha w - w^2)}} = 2 \operatorname{arc\,tang} \sqrt{\left(\frac{w}{2\alpha - w}\right)} = 2 \operatorname{arc\,sin} \sqrt{\left(\frac{w}{2\alpha}\right)}.$$

Um nun die Zeit t' zu finden, in welcher der Bogen α beschrieben wird, ist vorstehendes Integral zwischen den Grenzen $w = 0$ bis $w = \alpha$ zu nehmen. Diess giebt

$$t' = \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\frac{i}{kg}}.$$

Eben so ist die Zeit, binnen welcher der Bogen 2α beschrieben wird,

$$t'' = \sqrt{\frac{i}{kg}} \cdot \int_0^{2\alpha} \frac{\partial w}{\sqrt{(2\alpha w - w^2)}} = \pi \sqrt{\frac{i}{kg}}.$$

Gleichzeitig ist für den Bogen $w = 2\alpha$ die Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \sqrt{\left(\frac{kg}{i}(2\alpha w - w^2)\right)} = 0,$$

also t'' die Dauer einer ganzen Oscillation. Wenn man nun n-Oscillationen in der Zeit z beobachtet hat, so findet sich, mit Hilfe der Relation

$$\frac{z}{n} = \pi \sqrt{\frac{i}{kg}},$$

sofort der gesuchte Factor k, oder

$$\frac{\pi \varepsilon r^4}{6l} = \frac{i}{g} \cdot \left(\frac{n\pi}{z}\right)^2.$$

Hierbei ist noch keine Rücksicht auf zwei Umstände genommen, welche zwar den Isochronismus der Schwingungen nicht stören, aber doch ihre Dauer ein wenig vergrössern; weshalb vorstehende Formel einen etwas zu kleinen Werth für k giebt. Die beiden Umstände sind der *Widerstand der Luft* und die *Luftschicht*, welche dem schwingenden Körper anhängt, also dessen Trägheitsmoment vergrössert. Nach den Erfahrungen, welche man bei den analogen magnetischen Beobachtungen gemacht hat, ist jener Widerstand der *ersten* Potenz der Geschwindigkeit proportional anzunehmen, dürfte aber hier, wo es sich nur darum handelt, zu entscheiden, ob der numerische, von den Dimensionen und dem Elasticitätsmodul des Drahtes unabhängige Coefficient $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ oder $\frac{9}{64}$ d. i. nahezu $\frac{1}{7}$ beträgt, unbedenklich vernachlässigt werden können. (Man vergleiche: Dr. *J. Lamont*, Handbuch des Erdmagnetismus; Berlin 1849; Seite 56 u. 61. An der ersteren Stelle findet sich eine Bemerkung über die Grösse des durch die Weglassung entstehenden Fehlers.) Dasselbe gilt von der

durch den zweiten Umstand bedingten Correction. Hinsichtlich dieser nimmt man nach *Lamont* (a. a. d. Seite **62**) bei kleinen Magneten gewöhnlich an, dass die Vermehrung des Trägheitsmoments so gross sei, als wenn eine Luftschicht von 4 Millimetern Dicke an dem Magnet festhinge. Die Rechnungen, welche bei dergleichen Schwingungsversuchen zur Ermittlung des Torsionswiderstandes von Drähten vorkommen, sind überhaupt dieselben, wie bei den entsprechenden magnetischen Beobachtungen; und bedarf es in unserem Falle nicht, wie dort, wo die wirkende Kraft eigentlich dem Sinus des Ablenkungswinkels proportional ist, der Reduction auf unendlich kleine Bogen.

Es wurde weiter oben von den *Grenzen der vollkommenen Elasticität* gesprochen. Man versteht darunter die grösste, den dehnenden Kräften proportionale Ausdehnung, welcher ein elastischer Körper fähig ist, ohne eine *bleibende* Gestaltveränderung zu erleiden. Bei näherer Betrachtung scheint es jedoch, als wenn eine scharfe Grenze dieser Art gar nicht vorhanden wäre, sondern vielmehr Das, was wir dafür halten, lediglich durch die Schärfe der zu Gebote stehenden Beobachtungsmittel bedingt würde. *Wertheim* nimmt als Grenze der Elasticität eine bleibende Ausdehnung von **0,00005** der ursprünglichen Dimension an. Wie es sich auch mit dieser theoretischen Frage verhalten möge, so ist es doch jedenfalls unseren practischen Zwecken angemessen, für jeden Stoff eine grösste zulässliche Ausdehnung anzunehmen, welche auf dem Wege der Erfahrung, und zwar durch längere Zeit fortgesetzte Beobachtungen im Grossen, nicht wohl durch einen einzelnen Versuch, ermittelt werden muss.

Man betrachte jetzt noch einmal die Veränderungen, welche die die Welle eines Rades bildenden, ursprünglich zur Axe der Welle parallelen Fasern durch die Torsion in ihren Dimensionen erleiden; und zwar *erstens* in ihrer Länge, *zweitens* in dem zur Tangente, und *drittens* in dem zum Radius parallelen Durchmesser. Die obigen Bedingungsgleichungen (I, II u. III) drücken diese Gestaltveränderungen aus. Es ist jedoch zu erinnern, dass bei der Gleichung (II) eine Umkehrung der Vorzeichen Statt gefunden hat. Wir stellen daher die ursprünglichen Zeichen wieder her; ausserdem sollen für

$$\frac{\Delta l}{l}, \quad \frac{\Delta \varrho}{\varrho}, \quad \frac{\partial \Delta \varrho}{\partial \varrho}$$

ihre unter der Voraussetzung $m = 4$ gefundenen Werthe eingeführt werden. Dadurch bekommen jene Gleichungen folgende Gestalt:

$$\text{(I.)} \qquad u + \frac{1}{m} v - \frac{1}{m} w = \left(\frac{\varrho^2}{2} - \frac{r^2}{12}\right) \cdot \frac{\varphi^2}{l^2}$$

$$\text{(II.)} \qquad -\frac{1}{m} u - v - \frac{1}{m} w = \left(\frac{r^2}{8} - \frac{13\varrho^2}{24}\right) \cdot \frac{\varphi^2}{l^2}$$

$$\text{(III.)} \qquad -\frac{1}{m} u + \frac{1}{m} v + w = \left(\frac{r^2}{8} - \frac{\varrho^2}{8}\right) \cdot \frac{\varphi^2}{l^2}.$$

Folgende Zusammenstellung zeigt die grössten positiven und negativen Werthe, welche die Ausdrücke innerhalb der gegebenen Grenzen erreichen.

№	erreicht für	den grössten positiven Werth	und erreicht für	den grössten negativen Werth
(I.)	$\varrho = r$	$\frac{5r^2\varphi^2}{12l^2}$	$\varrho = 0$	$-\frac{r^2\varphi^2}{12l^2}$
(II.)	$\varrho = 0$	$\frac{r^2\varphi^2}{8l^2}$	$\varrho = r$	$-\frac{5r^2\varphi^2}{12l^2}$
(III.)	$\varrho = 0$	$\frac{r^2\varphi^2}{8l^2}$	$\varrho = r$	0.

Die Gestaltveränderungen, welche die Fasern an der Oberfläche des Cylinders erleiden, sind, wie sich zeigt, die beträchtlichsten; es genügt daher bei Beurtheilung der *Torsionsfestigkeit*, auf sie allein Rücksicht zu nehmen.

Bezeichnet man die grösste zulässliche Ausdehnung durch U, so ergiebt sich nach (I), für $\varrho = r$:

$$U = \frac{5r^2\varphi^2}{12l^2}.$$

Hieraus findet sich für den grössten zulässlichen Torsionswinkel:

$$\varphi = \frac{l}{r} \cdot \sqrt{\left(\frac{12}{5} \cdot U\right)},$$

und wenn man diesen Werth in die Formel

$$T = \frac{\pi \varepsilon r^4 \varphi}{6l}$$

einführt, so erhält man, als *Maass* der Torsionsfestigkeit, den Torsionswiderstand

$$\text{(21.)} \qquad F = \pi \varepsilon r^3 . \sqrt{\left(\frac{1}{15} \cdot U\right)}.$$

Diese Formel gilt von *cylindrischen Wellen.* In einem *quadratischen Schaft* dagegen erleiden offenbar die in den *Kanten* liegenden Fasern die grösste Ausdehnung. Nennt man die halbe Seite des Querschnittes wieder s, so ist das Quadrat des Abstandes dieser Fasern von der Axe $2s^2$; also ist diesmal:

$$U = \frac{5s^2\varphi^2}{6l^2}, \qquad \varphi = \frac{l}{s} \cdot \sqrt{\left(\frac{6}{5} \cdot U\right)}$$

und mit Berücksichtigung der Formel $T' = \frac{8\varepsilon s^4 \varphi}{9l}$ die grösste Torsionsfestigkeit

$$(22.) \qquad F' = \varepsilon s^3 \cdot \frac{8}{9} \sqrt{\left(\frac{6}{5} U\right)}.$$

Die Torsionsfestigkeit ist mithin unabhängig von der Länge des gewundenen Körpers und proportional der *dritten* Potenz des Durchmessers.

Nach *Weisbach* (Lehrb. I, 197 und „Ingenieur" S. 415) beträgt die Ausdehnung des Schmied-Eisens an der Elasticitätsgrenze $\frac{1}{1520}$. Setzt man diesen Werth für U und $\varepsilon = 29'251000$, so ergiebt sich für die Torsionsfestigkeit *cylindrischer Wellen:*

$$F = 608\,590\, r^3$$

und für *quadratische Schäfte:*

$$F' = 730\,560\, s^3$$

Verlangt man, wie auch Weisbach, *fünffache Sicherheit,* so ergiebt sich für das nicht zu überschreitende Moment der wirkenden Kraft für *cylindrische Wellen:*

$$M = 121\,718\, r^3$$

und für *quadratische Schäfte:*

$$M' = 146\,112\, s^3$$

Es ist kaum zu erinnern nöthig, dass ein doppelter Grund vorhanden ist, weshalb man sich in der Praxis mit dem durch die Elasticitätsgrenze und durch das Moment der Triebkraft vorgeschriebenen Durchmesser nicht begnügen darf. Eine beträchtliche Vergrösserung dieser Dimension ist nämlich einmal wegen der Möglichkeit einer von aussen nicht zu erkennenden Unregelmässigkeit der Structur des Stoffs, und zweitens wegen der zufälligen Hindernisse nöthig, die sich zuweilen der Bewegung entgegensetzen. Die Würdigung des ersten Umstandes ist kein Gegenstand für den Calcul, wohl aber ist, wenigstens theoretisch, ein solcher hinsichtlich des zweiten Punctes möglich. Wenn nämlich durch ein zufälliges Hinderniss die Umdrehungsgeschwindigkeit ϑ der Welle in dem Differential ∂t der Zeit die Veränderung $\partial \vartheta$ erleidet, so hat man, mit Berücksichtigung des Umstandes, dass $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$ eine negative Grösse ist, für eine zwischen der Triebkraft mit dem Momente M und dem Hinderniss befindlichen Querschnitt der Welle, für die nöthige Torsionsfestigkeit:

$$F \geqq M - \frac{\Sigma i . \partial \vartheta}{g \partial t} ;$$

wo g wieder die Beschleunigung der Schwere und Σi die Summe der Trägheitsmomente bezeichnet, welche sämmtlichen, in Umdrehung befindlichen und auf der dem Hinderniss entgegengesetzten Seite des fraglichen Querschnittes liegenden Maschinentheilen zukommen.

Auf *hölzerne* Wellen sind die in dem Vorliegenden entwickelten Formeln für den Torsionswiderstand und die Torsionsfestigkeit *nicht* anwendbar, da sie *homogene* Körper voraussetzen und beim Holz (abgesehen von dessen sehr häufigen zufälligen Unregelmässigkeiten) die Elasticitätscoefficienten in verschiedenen Richtungen sehr bedeutend von einander abweichen. *Chevandier* und *Wertheim* geben in dem „Memoire sur les propriétés mécaniques du bois, présenté à l'Academie des Sciences, dans sa séance du 5. Octobre 1846, für das durchschnittliche Verhältniss dieser Coefficienten in der Richtung der Axe des Halbmessers und der Tangente an den Stamm

1 : 0,165 : 0,091

und für das der entsprechenden Festigkeiten

1 : 0,163 : 0,159

an. Der Torsionswiderstand eines Körpers mit verschiedenen Elasticitäten erfordert offenbar eine noch allgemeinere Behandlung des Gegenstandes, als die obige.

Eldena im Februar 1851.

15.

Ueber das Gesetz der Symmetrie der Krystalle und die Anwendung dieses Gesetzes auf die Eintheilung der Krystalle in Systeme.

(Von dem Herrn Prof. Dr. *Möbius* zu Leipzig.)

(Aus den Berichten über die Verhandlungen der k. s. Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig von 1850.)

Zwei Grundgesetze sind es, nach denen jede Krystallbildung geregelt ist: *das Gesetz der rationalen Verhältnisse*, und *das Gesetz der Symmetrie*.

Das erstere besteht darin, dass, wenn A, B, C, D die Ecken einer Pyramide bezeichnen, deren Seitenflächen parallel mit vier Flächen eines Krystalls sind, und wenn die drei von einer der Ecken, etwa von D, ausgehenden Kanten DA, DB, DC, oder deren Verlängerungen, von einer mit einer fünften Fläche des Krystalls parallelen Ebene in A', B', C' geschnitten werden, die Exponenten der Verhältnisse

$$DA:DA',\ DB:DB',\ DC:DC'$$

sich wie ganze Zahlen zu einander verhalten *).

Werden daher mit drei Flächen eines Krystalls, welche nicht mit einer und derselben Geraden parallel sind, durch einen beliebigwo angenommenen Punct D drei Ebenen DBC, DCA, DAB parallel gelegt, werden diese Ebenen zu coordinirten Ebenen, mithin ihre gegenseitigen Durchschnitte DA, DB, DC zu coordinirten Axen genommen, und werden die Theile DA, DB, DC dieser Axen, welche sich von ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte D bis zu ihren Durchschnitten A, B, C mit irgend einer vierten Ebene ABC erstrecken, die *Parameter* dieser vierten genannt: so kann man das Gesetz der rationalen Verhältnisse auch dadurch ausdrücken, *dass die Verhältnisse zwischen den Verhältnissen, in denen die Parameter irgend einer vierten Fläche des Krystalls*

---

*) Nach *Miller*, in dessen Treatise on Crystallography, Cambridge 1839, artcl. 2.

zu den gleichnamigen Parametern irgend einer fünften Fläche desselben stehen, stets rational sind.

Die hiernach zwischen je fünf Flächen eines Krystalls Statt findende Beziehung ist schon in rein geometrischer Hinsicht sehr merkwürdig. Hat man vier Ebenen, von denen keine drei einer und derselben Geraden parallel sind, und werden die von einem der vier Durchschnittspuncte D je dreier der vier Ebenen ausgehenden drei Durchschnittslinien DA, DB, DC von der vierten Ebene in A, B, C und von einer fünften in A', B', C' geschnitten, so nenne man, wenn die zwei Verhältnisse zwischen den drei Verhältnissen $DA : DA'$, $DB : DB'$, $DC : DC'$ rational sind, die fünfte Ebene $A'B'C'$ aus den vier ersteren *arithmetisch ableitbar*. Werden ferner den vier ersten Ebenen mehrere andere nach und nach hinzugefügt, dergestalt, dass jede neue mit zweien der gegenseitigen Durchschnittslinien der bereits vorhandenen Ebenen parallel ist, so heisse jede dieser neuen Ebenen aus den vier ersteren *geometrisch ableitbar*. Es lässt sich alsdann zeigen, dass jede aus den vier ersteren arithmetisch ableitbare Ebene aus ihnen auch geometrisch ableitbar ist, und umgekehrt, dass jede geometrisch ableitbare Ebene es auch arithmetisch ist. Es lässt sich ferner darthun, dass, wenn bei einem Systeme von fünf oder mehreren Ebenen aus gewissen vier derselben die übrigen ableitbar sind, auch aus je vier andern Ebenen des Systems, von denen keine drei mit einer und derselben Geraden parallel gehen, die jedesmal übrigen abgeleitet werden können. Insbesondere kann daher bei jedem Krystalle, aus je vier Flächen desselben, von denen keine drei mit derselben Geraden parallel sind, eine mit irgend einer fünften Fläche des Krystalls parallele Ebene ohne Anwendung von Zirkel und Maasstab schon dadurch gefunden werden, dass man eine Anzahl neuer Ebenen, jede parallel mit zwei Durchschnittslinien der jedesmal schon vorhandenen, hinzusetzt, indem man diese Operation immer so anzuordnen im Stande ist, dass man zuletzt eine Ebene, parallel mit jener fünften Fläche, erhält.

Die Richtigkeit der vorstehenden Sätze ergiebt sich leicht aus den in meinem „barycentrischen Calcul" über „geometrische Netze" angestellten Untersuchungen: Untersuchungen, die ich damals für rein geometrische Speculationen hielt, ohne im Entferntesten den engen Zusammenhang zu ahnen, in welchem sie mit einer Haupt-Eigenschaft aller Krystalle stehen. Zuerst hat *Grassmann* hierauf aufmerksam gemacht, in seiner „Wissenschaft der extensiven Grösse u. s. w." (Leipzig, 1844.) Seite 262 f.

Nicht eben so bestimmt, wie das Gesetz der rationalen Verhältnisse, fin-

det sich das andere Grundgesetz aller Krystallbildung, das Gesetz der *Symmetrie*, in den Lehrbüchern der Krystallographie ausgesprochen. Indessen lässt sich auch dieses zweite Princip in einem auf alle Krystalle sich gleichmässig erstrekkenden Ausdrucke zusammenfassen. Um dieses thun zu können, muss ich jedoch Einiges über symmetrische Figuren überhaupt vorausschicken.

Eine Figur soll *symmetrisch* (in weiterem Sinne) heissen, wenn sie einer ihr gleichen und ähnlichen Figur auf mehr als eine Art gleich und ähnlich gesetzt werden kann.

Ebene Figuren, als welche allein wir zunächst in Betracht ziehen wollen, können mit andern ihnen gleichen und ähnlichen Figuren immer zur Deckung gebracht werden, und es wird daher eine ebene Figur *symmetrisch* zu nennen sein, wenn sie mit einer ihr gleichen und ähnlichen Figur auf mehr als eine Weise zur Deckung gebracht werden kann. Ist z. B. $AB = ab$, $BC = bc$, $CA = ca$, und sind daher ABC und abc zwei einander gleiche und ähnliche Dreiecke, so decken sie einander, wenn das eine, und folglich auch das andere, ungleichseitig ist, nur auf eine Weise, wobei A mit a, B mit b, C mit c zusammenfällt; ein ungleichseitiges Dreieck ist mithin eine unsymmetrische Figur. Ist dagegen $AB = AC$ und daher ABC, folglich auch abc, ein gleichschenkliges Dreieck, so kann abc sowohl auf ABC, als auf ACB deckend gelegt werden. Sind aber die Dreiecke gleichseitig, so giebt es sechs Deckungen, nämlich die von abc mit ABC, BCA, CAB und mit CBA, ACB, BAC.

Wenn eine Figur einer andern auf n (> 1) verschiedene Arten gleich und ähnlich gesetzt werden kann, so wollen wir sie *nach der Zahl n symmetrisch* nennen. Ein gleichschenkliges Dreieck ist daher nach der Zahl 2, ein gleichseitiges nach 6 symmetrisch, und es besitzt folglich das letztere einen dreimal höheren Grad von Symmetrie, als das erstere. Eben wie ein Dreieck, oder ein System von drei Puncten, hat auch jedes System von noch mehreren Puncten den höchsten ihm möglichen Grad von Symmetrie, wenn die Puncte die Ecken eines regulären Vielecks sind, und die Zahl, durch welche dieser Grad ausgedrückt wird, ist, wie beim Dreieck, der doppelten Zahl der Puncte gleich. Sind z. B. A, B, C, D und a, b, c, d die auf einander folgenden Ecken zweier gleich grossen Quadrate, so kann $abcd$ auf

$$ABCD,\ BCDA,\ CDAB,\ DABC,$$
$$DCBA,\ ADCB,\ BADC,\ CBAD,$$

deckend gelegt werden.

Wird in der Ebene des regulären Vierecks $ABCD$ (Fig. 1, Taf. 3) ein fünfter

Punct E hinzugefügt, so wird damit die Symmetrie im Allgemeinen aufgehoben. Denn die Figur $ABCDE$ kann von einer ihr gleichen und ähnlichen $abcde$ im Allgemeinen nur auf eine Weise gedeckt werden. Die durch den Zusatz von E verloren gegangene Symmetrie wird man aber dadurch wieder herstellen können, dass man in der Ebene von $A.....E$ noch sieben neue Puncte F, G, H, I, K, L, M hinzusetzt; diejenigen nämlich, auf welche der Punct e der Figur $abcde$ fällt, wenn man das Quadrat $ABCD$ auf die noch übrigen sieben Arten vom Quadrate $abcd$ gedeckt werden lässt. Denn setzt man auch zur Figur $a.....e$ sieben neue Puncte f, g,.....m hinzu, so dass die Figur a, b,.....m der Figur A, B,.....M gleich und ähnlich wird, so werden, so oft sich auf eine der acht verschiedenen Arten die beiden Quadrate $ABCD$ und $abcd$ decken, auch die acht Puncte e,.....m mit den aeht Puncten E,.....M, nur immer in anderer Ordnung, zusammenfallen. Es wird daher, so wie das Quadrat $ABCD$, auch die hinzugefügte Figur E,.....M, und desgleichen auch die aus beiden zusammengesetzte $A.....M$, jede nach der Zahl 8, symmetrisch sein.

Wir wollen hierbei das reguläre Viereck, von welchem wir ausgegangen waren, die *Grundfigur* und die aus der willkührlichen Annahme eines Punctes E in der Ebene desselben entstandene Figur von acht Puncten eine der Grundfigur *zugeordnete Figur* nennen. Man sieht leicht, dass auf gleiche Weise zu jeder andern symmetrischen Figur eine zugeordnete Figur construirt werden kann, dass der Ort eines ihrer Puncte willkührlich ist, und dass die Zahl ihrer Puncte der Zahl gleich kommt, nach welcher die Grundfigur symmetrisch ist. Ist daher, wie wir im Folgenden annehmen wollen, die Grundfigur ein reguläres nEck, so besteht die zugeordnete Figur aus $2n$Puncten; sie ist nämlich, wie man schon aus der obigen Figur ersehen kann, aus zwei einander gleichen regulären nEcken zusammengesetzt, welche mit dem nEck der Grundfigur einerlei Mittelpunct haben, und deren Seiten vom Parallelismus mit den Seiten der Grundfigur um gleiche Winkel, aber entgegengesetzt, abweichen.

Ist die Grundfigur ein System von nur zwei Puncten oder ein Zweieck, als wobei der Unterschied zwischen regulär und irregulär wegfällt, so hat die zugeordnete Figur vier Puncte, die sich als die vier Ecken eines Rechtecks definiren lassen, dessen Mittelpunct der Mittelpunct der Grundfigur ist, und von welchem zwei gegenüberliegende Seiten von der die zwei Puncte der Grundfigur verbindenden Geraden rechtwinklig halbirt werden.

Besteht aber die Grundfigur aus nur einem Puncte, so hat man, analog

dem Vorhergehenden, die zugeordnete Figur von zweien gebildet anzunehmen, zwischen denen der Punct der Grundfigur in der Mitte liegt.

Erinnert werde nur noch, dass bei gewissen Annahmen des ersten willkürlich zu bestimmenden Puncts der irgend einer Grundfigur zugeordneten Figur, die Puncte der letzteren paarweise zusammenfallen, und sich somit ihre Zahl auf die Hälfte der vorhin gedachten reducirt; dass aber auch alle diese Puncte in einem einzigen, nämlich im Mittelpuncte der Grundfigur, zusammenfallen können.

Das jetzt über symmetrische in einer Ebene enthaltene Systeme von Puncten Bemerkte gilt nach dem Gesetze der Dualität vollkommen auch in Bezug auf Systeme nicht in einer Ebene liegender und sich in einem Puncte O schneidender gerader Linien. So wie nämlich die Ecken einer vollkommen symmetrischen Figur in einer Ebene, oder eines ebenen regulären Vielecks, definirt werden können als ein in einer Ebene enthaltenes System von Puncten, welche von einem gewissen andern Puncte der Ebene (dem Mittelpuncte der Figur) in gleichen Entfernungen sind, und von denen, in einer gewissen Folge genommen, ein jeder von dem nächstfolgenden und der letzte vom ersten gleichweit absteht: so ist ein System gerader, durch einen Punct O gehender Linien vollkommen symmetrisch zu nennen, wenn dieselben mit einer noch andern durch O gehenden Linie (der Mittellinie des Systems) gleiche Winkel bilden, und wenn sie in einer solchen Folge genommen werden können, dass die Winkel, welche jede mit der nächstfolgenden und die letzte mit der ersten macht, einander gleich sind. So wie ferner ein reguläres nEck mit einem andern ihm gleichen auf $2n$ Arten zur Deckung gebracht werden kann, und dabei ein in der Ebene des einen willkührlich hinzugefügter Punct in der Ebene des andern eine diesem andern als Grundfigur zugeordnete, nach $2n$ symmetrische Figur von $2n$ Puncten erzeugt: so lässt sich auch ein vollkommen symmetrisches System von n sich in einem Puncte O schneidenden Linien im Raume, mit einem andern ihm gleichen Systeme auf $2n$ Arten zur Deckung bringen und erzeugt dabei mit einer ihm willkürlich hinzugefügten, durch O gehenden Linie eine zugeordnete, nach $2n$ symmetrische Figur von $2n$ Linien, welche durch den gemeinschaftlichen Durchschnitt der n Linien des andern Systems gehen.

Um sich dieses zu näherer Anschauung zu bringen, errichte man auf der Ebene eines regulären Vielecks, etwa eines gleichseitigen Dreiecks ABC (Fig. 2), im Mittelpuncte M desselben ein Perpendikel, und es werden die einen beliebigen Punct O dieses Perpendikels mit A, B, C verbindenden und auf beiden Seiten

unbestimmt verlängert anzunehmenden drei Linien eine nach der Zahl 6 symmetrische Figur im Raume bilden, von welcher OM die Mittellinie ist. Werden nämlich die den Puncten A, B, C, M, O entsprechenden Puncte einer andern, der ersten gleichen Figur mit a, b, c, m, o bezeichnet, so werden bei drei Dekkungen der beiden Figuren, om mit OM und a, b, c, der Reihe nach mit A, B, C, mit B, C, A, mit C, A, B, bei den drei übrigen Deckungen om mit OM' und a, b, c, der Reihe nach mit C', B', A', mit A', C', B', mit B', A', C' zusammenfallen, wobei M', A', B', C' Puncte bedeuten, welche in den über O hinaus verlängerten Linien OM, OA, OB, OC so liegen, dass O der gemeinschaftliche Mittelpunct von MM', AA', BB', CC' ist. Es erhellet endlich ohne Weiteres, dass, wenn die sechs Puncte $F, G, \ldots\ldots L$ in der Ebene ABC eine diesem Dreieck zugeordnete Figur bilden, das System der sechs Linien OF, OG,.... OL eine den drei Linien OA, OB, OC, als Grundfigur, zugeordnete Figur sein wird. Analoges gilt für Grundfiguren, die aus mehr oder weniger als drei Linien zusammengesetzt sind. Ist die Grundfigur eine einzige Linie g, so besteht die zugeordnete Figur aus zweien, welche, sich in einem Puncte der g schneidend, mit g in einer Ebene so liegen, dass der von ihnen gebildete Winkel von g halbirt wird.

Uebrigens gilt auch hier die bei symmetrischen Figuren von Puncten in einer Ebene gemachte Erinnerung, dass in gewissen speciellen Fällen die Linien der zugeordneten Figur paarweise, oder auch alle mit einander, in der Mittellinie der Grundfigur zusammenfallen.

Mit Hülfe der jetzt über symmetrische Figuren angestellten Betrachtungen wird es leicht sein, die fast bei allen Krystallbildungen sich offenbarende Symmetrie in einem bestimmten Gesetze auszudrücken.

Von den, mehr als Ausnahmen zu betrachtenden sogenannten hemiëdrischen Formen und Zwillingskrystallen jetzt und im Folgenden abgesehen, sind die Flächen eines vollkommen ausgebildeten Krystalls paarweise einander parallel. Ferner giebt es bei jedem solchen Krystalle einen *Mittelpunct*, d. i. einen Punct, welcher zwischen je zwei einander parallelen Flächen in der Mitte liegt. Eine durch den Mittelpunct gelegte und auf einer der Flächen, also auch auf der ihr parallelen Fläche, perpendiculäre Gerade soll der *Träger* dieser beiden Flächen genannt werden. Alle bei einem Krystalle vorkommenden Träger bilden demnach ein System in einem Puncte, im Mittelpuncte des Krystalls, sich schneidender Graden, in welchem Puncte der Theil eines jeden, der zwischen den zwei von ihm getragenen Flächen liegt, halbirt wird.

Es giebt nun Krystalle, bei denen die gegenseitige Lage der Träger gar keine Symmetrie zeigt. Oder aber (und hierin eben besteht das noch aufzustellende Gesetz der Symmetrie): es lassen sich die Träger aller Flächen eines Krystalls in einer, oder zwei, oder mehreren Gruppen zusammenfassen, deren jede eine zugeordnete Figur zu einer und derselben vollkommen symmetrischen Grundfigur ist. Die Linien, aus denen letztere besteht, hat man sich, gemäss dem Vorigen, gleichfalls durch den Mittelpunct des Krystalls gehend vorzustellen. Die Anzahl dieser Linien der Grundfigur aber kann nur eine der fünf 1, 2, 3, 4, oder 6 sein, nicht 5, 7, 8, oder irgend eine grössere Zahl; als welches, wie sich zeigen lässt, dem Gesetze der rationalen Verhältnisse widerstreiten würde. Es sind daher nur fünf Grundfiguren möglich. Auch finden sich für jede derselben Krystalle in der Natur, und man wird somit von selbst darauf geleitet, die Krystalle nach der Verschiedenheit ihrer Grundfiguren in eben so viele verschiedene Classen oder Systeme einzutheilen. Indessen ist diese Eintheilung keine neue, sondern stimmt mit der bisher angenommenen, von Weiss begründeten Eintheilung vollkommen überein, wie folgende Uebersicht lehrt:

Grf.	Tr.	Fl.	Sp.	Systeme.
—	1	2	—	Triklinoëdrisches oder tetraprismatisches System.
1	2	4	180°	Monoklinoëdrisches oder hemiprismatisches System.
2	4	8	90	Rhombisches oder prismatisches System.
3	6	12	60	Rhomboëdrisches System.
4	8	16	45	Tetragonales oder pyramidales System.
6	12	24	30	Hexagonales System.

Die Columne Grf. enthält die Zahlen von Linien, welche die Grundfigur haben kann; die Zahlen der Columnen Tr. und Fl. zeigen an, aus wie viel Trägern und Flächen jede zu der entsprechenden Grundfigur gehörige Gruppe im Allgemeinen und höchstens zusammengesetzt ist; die Erklärung der Columne Sp. folgt weiter unten. In der letzten Columne, welche die Namen der verschiedenen Systeme angiebt, steht dasjenige voran, welches keine Grundfigur hat, und wo daher die Träger mit ihren Flächenpaaren nicht gruppenweise, sondern einzeln in Betrachtung kommen.

Den hiermit aufgezählten Systemen ist aber noch eines hinzuzufügen, welches sich durch Symmetrie vor allen andern auszeichnet. Es entspringt dasselbe aus einer Grundfigur von drei, oder, wenn man will, von vier Geraden, welche eine

besonders merkwürdige Lage gegen einander haben. Während nämlich eine Grundfigur von drei oder von vier Linien, wie wir vorhin sahen, im Allgemeinen nur auf resp. sechs oder acht Arten mit einer ihr gleichen Figur congruirt, können, wenn man zur Grundfigur die drei Linien nimmt, welche die Mittelpuncte der gegenüberliegenden Flächen eines Würfels, oder die vier Linien, welche die gegenüberliegenden Ecken des Würfels mit einander verbinden, vierundzwanzig Congruenzen zu Wege gebracht werden; und dieses aus dem Grunde, weil der Würfel mit einem ihm gleichen auf sechsmal vier Arten zur Deckung gebracht werden kann, und dabei immer jene drei und diese vier Linien des einen Würfels mit den entzprechenden drei und vier Linien des andern zur Dekkung kommen. Eine noch beliebig durch den Mittelpunct des Würfels gelegte gerade Linie wird bei diesen 24 Deckungen im Allgemeinen und höchstens 24 verschiedene Lagen erhalten; und somit ist es einleuchtend, dass eine Figur, welche der jetzt angenommenen Grundfigur in der obigen Bedeutung des Worts zugeordnet ist, aus 24 Linien besteht, und dass folglich bei einem Krystalle, dem eine solche Grundfigur zukommt, im Allgemeinen und höchstens je 24 Träger mit den 48 von ihnen getragenen Flächen zu einer Gruppe gehören. Das System, in welchem Krystalle dieser Art begriffen sind, wird das *tessulare*, auch wohl vorzugsweise das *reguläre*, oder auch das *octaëdrische* genannt, indem die drei Verbindungslinien der gegenüberliegenden Ecken und die vier Verbindungslinien der Mittelpuncte der gegenüberliegenden Flächen eines Octaëders Figuren bilden, welche mit den vorigen Grundfiguren von drei und von vier Linien identisch sind.

Es lässt sich nun zeigen, dass, ausser der jetzt erklärten Weise, nicht noch durch eine andere specielle Annahme für die gegenseitige Lage der 2, 3, 4 oder 6 Linien, welche die Grundfigur eines Krystalls bilden können, die Grundfigur einen höheren Grad von Symmetrie gewinnt, und damit zugleich eine von den vorigen verschiedene und dem Gesetze der rationalen Verhältnisse nicht widersprechende zugeordnete Figur erzeugt wird. Und somit giebt es, auch der Theorie nach, wenn diese auf das eben gedachte Gesetz und auf das Gesetz der Symmetrie, wie es im Vorigen ausgesprochen wurde, gegründet wird, nicht mehr und nicht weniger Krystallsysteme, als in der Natur gefunden werden.

Die Anzahl dieser Systeme ist sieben: zuerst das in der Anordnung seiner Träger ganz unsymmetrische; sodann fünf Systeme mit einer Grundfigur von 1, 2, 3, 4, oder 6 Linien und zugeordnelen Figuren von resp. 2, 4, 6, 8, oder 12 Trägern; zuletzt das vorzugsweise sogenannte reguläre System. Doch kann man,

wie es gewöhnlich geschieht, die zwei Systeme, bei deren einem die Grundfigur 3, beim andern 6 Linien hat, für eines rechnen, indem man entweder die Flächengruppen des ersteren als hemiëdrische Formen des letzteren, oder, wie *Miller* thut, jede Flächengruppe des letzteren, als aus zweien des ersteren zusammengesetzt betrachtet. Hierdurch reducirt sich die Zahl der Systeme auf sechs die man (wenigstens einfacher, als bisher) das *irreguläre* oder das *vorerste*, das *erste, zweite, dritte, vierte* und das *reguläre* System nennen könnte; wobei die vier mittleren ihre Namen nach der Anzahl der ihren Grundfiguren zukommenden Linien führen. Es verbände sich hiermit noch der Vortheil, dass bei den vier mittleren die Zahl eines jeden, nachdem sie vervierfacht worden, zugleich anzeigte, wie viel Flächen zu den einzelnen Gruppen oder Formen desselben im Allgemeinen zu rechnen sind *).

Uebrigens kann man die Grundfiguren, statt sie, wie im Vorigen geschehen, aus 1, 2, 3, 4, oder 6 Geraden bestehen zu lassen, auch aus eben so vielen, durch den Mittelpunct des Krystalls gelegten Ebenen gebildet annehmen, die sich, wenn es ihrer mehr als zwei sind, in einer und derselben Geraden, und, wenn es mehr als eine sind, unter gleichen Winkeln, also unter Winkeln von 90^0, 60^0, 45^0, oder 30^0 schneiden. Dabei zerfallen die zu einer und derselben Gruppe gehörigen Träger in Bezug auf jede Ebene der Grundfigur in Paare, deren jedes gegen die Ebene symmetrisch liegt. Sehr leicht lässt sich Dies veranschaulichen, wenn man zwei ebene Spiegel unter einem Winkel von 180^0, 90^0, 60^0, 45^0, oder 30^0 an einander setzt. Man sehe die Columne Sp. der obigen Tabelle. Die Spiegelflächen selbst, und die Bilder, welche sie von sich machen, sind die Ebenen der Grundfigur. Ein zwischen die Spiegel gehaltener, ihre gemeinschaftliche Grenzlinie treffender Stab gewährt, in Vereinigung mit seinen Spiegelbildern, den Anblick der zu einer Gruppe gehörigen Träger, nur dass man von jedem Träger bloss die auf die eine Seite des Krystallmittelpuncts fallende Hälfte wahrnimmt, als welcher Punct da liegt, wo der Stab die gemeinschaftliche Grenze der Spiegel

*) Noch ein System, welches von mehreren Krystallographen mit aufgestellt wird, ist das sogenannte *diklinoëdrische*. Ich bemerke in dieser Hinsicht, dass man die dahin gehörigen Krystalle, die übrigens bis jetzt nur als Seltenheiten beobachtet worden sind, auch zum triklinoëdrischen Systeme rechnen kann, wobei zwei Träger sich unter rechten Winkeln schneiden. Hierdurch, und in Folge des Gesetzes der rationalen Verhältnisse, wird allerdings eine Symmetrie möglich gemacht, die sich jedoch nur auf die mit jenen zwei Trägern in einer Ebene liegenden Träger beschränkt, und deren Grundfigur der eine jener zwei Träger selbst ist. Eben so, wie das diklinoëdrische, könnte es noch einige andere Systeme geben, bei welchen bloss die in einer gewissen Ebene enthaltenen Träger Symmetrie beobachten; und dies in Bezug auf eine Grundfigur, bestehend aus zwei sich rechtwinklig, oder drei sich unter Winkeln von 60^0 schneidenden und in derselben Ebene begriffenen Linien.

trifft. Bringt man den zwischen zwei nächstfolgenden Ebenen der Grundfigur enthaltenen Theil eines Krystalls zwischen die zwei unter gleichem Winkel gegen einander geneigten Spiegel-Ebenen, so wird man den ganzen Krystall zu sehen glauben. Aehnlicher Weise wird man den Anblick aller 24 zu einer Gruppe des regulären Systems gehörenden Träger haben, wenn man drei Spiegel unter Winkeln von 90^0, 60^0 und 45^0 an einander setzt und mit einem in die solchergestalt gebildete Pyramide gehaltenen Stabe die Spitze derselben berührt. Ein ebenes Dreieck, dessen Ecken in den Kanten der Pyramide liegen, giebt den Anblick eines sogenannten Achtundvierzigflächners, und in den speciellen Fällen, wenn die Dreiecks-Ebene auf den Kanten des Flächenwinkels von 90^0, 60^0, oder 45^0 normal ist, den Anblick eines Rhombendodekaëders, eines Octaëders, oder eines Würfels.

Mit Ausnahme der schon oben gedachten Formen, *sind* demnach, wie man kurz sagen kann, *die Krystalle kaleidoskopische Figuren, und das System, zu welchem ein Krystall gehört, wird durch den Spiegelwinkel des Kaleidoskops bestimmt.*

Druck von J. Petsch in Berlin.

Crelle, Journal d. Math. Bd. 43. Heft 3.

Fac-simile einer Handsch[illegible]

aus dem Jahre 18[illegible]

Königsb[illegible]

Hochgeehrtester Herr Geheimrath,

In Antwort auf Ihr geehrtes Schreiben bemerke ich, [illegible]
daß Sie meinen kleinen Arbeiten in Ihrem Journal einen [illegible]
zur größten Ehre anrechnen werden, in so anständige[illegible]
beiden vorigen Briefen Ihnen dieselbe Versicherung ge[illegible]
Herrn über Leben und Tod der kleinen Geschöpfe auf[illegible]
keines zu fassenden Entschlusses, noch von der Ihrigen, [illegible]
nehm, wenn, wo möglich, das 4. Heft Sie aufnehme. [illegible]
Abhandlungen hätte füglich mit der über Gauß Method[illegible]
beide Eigenschaften derselben Functionen betreffen. Die[illegible]
und welche gewiß jedes analytische Herz theilen wird[illegible]
des Journals hat mich gehindert, Ihnen mehrere [illegible]
rent habe, zuzusenden; andere bedürften nur der [illegible]
neue Theoreme aus der Theorie der Zahlen darunt[illegible]

Um diesem Briefe einen Inhalt zu geben, füge ich fo[illegible]
Coordinaten hinzu „Wenn die (nichtwinkligen) Coordinaten[illegible]
Systeme, die gemeinschaftlichen Anfangspunkt haben, x [illegible]

$$x = a\xi + a'\upsilon + a''\zeta \quad , \text{ so ist } a = \cos\varphi \sin\alpha^2 + \cos\alpha^2 \quad , b$$
$$y = b\xi + b'\upsilon + b''\zeta \qquad b' = \cos\varphi \sin\beta^2 + \cos\beta^2 \quad , c$$
$$z = c\xi + c'\upsilon + c''\zeta \qquad c'' = \cos\varphi \sin\gamma^2 + \cos\gamma^2 \quad d$$

$$c = -\sin\varphi \cos\beta$$
$$a' = -\sin\varphi \cos\gamma$$
$$b'' = -\sin\varphi \cos\alpha$$

wo $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$. Die Winkel φ $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$
die ξ, υ, ζ aus x, y, z durch dieselben Formeln, unde[illegible]
und die Erklärung der Natur dieser Ausdrücke hab[illegible]

...rift von C. G. J. Jacobi,
...26.

...erg den 8ten October 1826

...daß ich nicht erlaube, sondern überaus wünsche,
...Platz einräumen möchten, welche es sich gewiß
...er Gesellschaft zu erscheinen. Da ich in meinen
...gegeben habe, und sie noch im vorigen zum
...uthorisirte, so bedürfte es von meiner Seite
..., einen solchen abzuwarten. Es wäre mir ange-
... die kleinere von den beiden rechtgeschickten
...bode zusammengeworfen werden können, so da
...die Besorgniß, die Sie mir eingeflößt haben,
...und, über die Zweifelhaftigkeit des Fortbestehens
... nicht unterhaltende Abhandlungen, die ich be-
...der Ausarbeitung; es dürften sich auch einige
...unter befinden.–

... folgende Formeln für die Transformation der
...aten eines Punktes in Bezug auf 2 rechtwinklige
..., x, y, z, und ξ, ν, ζ heißen, so ist und man setzt:

$$, b = \sin\varphi\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta(1-\cos\varphi)$$
$$, c' = \sin\varphi\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma(1-\cos\varphi)$$
$$d'' = \sin\varphi\cos\beta + \cos\gamma\cos\alpha(1-\cos\varphi)$$
$$\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma(1-\cos\varphi)$$
$$\cos\gamma + \cos\beta\cos\alpha(1-\cos\varphi)$$
$$\cos\alpha + \cos\gamma\cos\beta(1-\cos\varphi),$$

...γ, φ haben sehr naturgemäße Bedeutung. Man findet
...indem man bloß statt φ −φ setzt. Über den Beweis
... haben Sie nur zu befehlen.–

– Ergebenst.

Dr. C. G. J. Jacobi.

Crelle, Journal d. Math. Bd. 43. Heft 3.

Fac-simile einer [illegible]

[illegible] (1

Meine [illegible] Herren, die ich Euch Ihnen [illegible]

Die beiliegenden Formeln sind die mehr [illegible] gültig [illegible]

Breslau 30. 7. 15. (184

Es sei [illegible] = k, dann werden [illegible] und [illegible] 83 [illegible]
Quotient der Modulu der elliptischen Functionen [illegible]

$$\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots}\,:\,\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots}{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\cdots} = \sqrt[4]{\frac{2}{k'}}$$

als Coefficienten gewisse elliptische [illegible] man [illegible] hier [illegible]
so kann muß die auf mehrere Arten geschehen, wie mit den [illegible]
fenden Formeln geschieht:

VII.

$$\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\cdots} = \frac{\Pi(1-q^{2\nu+1})}{\Pi(1+q^{2\nu+1})} \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

$$= \frac{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)\cdots}{(1+q)(1-q^2)(1+q^3)\cdots} = \frac{\Pi(1-q^{\nu+1})}{\Pi\{(1+q^{2\nu+1})(1-q^{2\nu+1})\}}$$

$$= \frac{(1-q)(1-q)(1-q^4)\cdots}{(1+q)(1+q^2)(1-q^4)\cdots} = \frac{\Pi\{(1-q^{2\nu+1})(1-q^{4\nu+4})\}}{\Pi\{(1+q^{2\nu+1})(1-q^{4\nu+4})\}}$$

$$= \frac{(1-q)^2(1-q^2)(1-q^3)^2\cdots}{(1-q^2)^2(1-q^4)(1-q^6)^2\cdots} = \frac{\Pi\{(1-q^{2\nu+1})^2(1-q^{2\nu+2})\}}{\Pi\{(1-q^{4\nu+2})^2(1-q^{4\nu+4})\}}$$

$$= \frac{(1-q^2)^2(1-q^4)(1-q^6)^2\cdots}{(1+q)^2(1-q^2)(1+q^3)^2\cdots} = \frac{\Pi\{(1-q^{4\nu+4})^2(1-q^{4\nu+6})\}}{\Pi\{(1+q^{2\nu+1})^2(1-q^{2\nu+2})\}}$$

Die Zahlen und Namen der vorhergehenden vier Brüche, welche [illegible]
[illegible] werden kann, gehören [illegible] zu den [illegible]
zu elliptischen [illegible], welche in den Formeln (1) enthalten [illegible]
der ersten Reihe, der auf die Form [illegible] in [illegible]
Formeln 10) oder 11) enthalten ist. Die Formeln [illegible]
dieser Gruppe der Formeln [illegible] gehören [illegible]
so wollen wir die folgenden Formeln:

2.

Handschrift von C. G. J. Jacobi,

den Jahren 1843. u. 1848.

(1843.)

mündlich zu bringen hoffe. Auch bringe ich wohl so ein 8 Bogen noch mit.

auf die Stadtpost geben zu lassen. Ihr C. G. J. Jacobi

1848)

83 } der 4? Wurzel der
aufgedeutet ~~haben~~ wird,

betrachteten Art darstellen.
folgenden leicht zu beweisen,

. . . 2 1

. . . 2

. . . 3

. . . 4.

welche der vorgelegten P.
~~[illegible]~~
sind, außer dem Nenner
in 4 erfordert, und in der
~~[illegible]~~ Restituirt man
~~[illegible]~~ Brüche, oder bedient man sich der obigen,
gebenen Regeln, so auch den beiden ersten
Factoren der ~~[illegible]~~ Ausdrücke abzuleiten

Fac-simile einer Handschr

geschrieben aus

Hrn. Geheimerath

begünstigt schon wieder mit einigen Zeilen, in
d. Prof. Encke in Berl. für die Zeit unsch
dt seligen Jacobi abgefasst hat. Da ich ungern
vollständig jede auch Ihrer gütigen Mittheilung die
den Verfasser betreffe durch einen Nekrolog
verschieben, den ausführlichen Nekrolog bei dem
werden. Hierdurch nun bestens ersucht, mein

De arithmetice determinanda area oblongi sph
Pythagorea e Planimetria in Sp

[Auct. Dr. Chr. Taudermann, Math. Prof. O.

Oblongum sphaericum est quadrigenum sph., cuius l
aequales sunt. Qualibet ipsius linea diagonalis alter
ipsum dividit in triangula congrua. Iam si area
oblongi = C, patent formulae notissimae

$$\alpha = 4C - 2\pi \quad \text{et} \quad \tang \frac{\alpha}{4} = \frac{}{\cot \frac{\alpha}{2}}$$

quarum altera, quia $C = \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2}$, ideoque $\sin C$

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{4}}{\cos \frac{\alpha}{4}} = \frac{\cos \frac{\alpha}{4}}{\cot \frac{\alpha}{2} \cot \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{4}}$$

sive in formulam

$$\sin \frac{\alpha}{4} = \tang \frac{\alpha}{2} \cdot \tang \frac{\beta}{2},$$

qua duce ex oblongi lateribus α et β optime compos
sive $\alpha + \beta < \pi$ est.
Si $\beta = \alpha$ sumitur, oblongum fit quadratum, lineae
aequales intersecant, et quadrati aream e dato ips

$$\sin \frac{\alpha}{4} = \tang^2 \frac{\alpha}{2}, \text{ in qua o}$$

Ex his, Lector benevole! jam perspicies, pari m

α et β
lateribus adiuvante circulo sph., cuius diametor
latus quadrati, quod oblongo dato sit aequale
Lineam oblongi diagonalem γ facillime invenies det

$$\cos \gamma = \cos\alpha + \cos\beta - 1, \text{ sive}$$

sive

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2}\right)}.$$

α, β, γ
Quodsi supra lateribus trianguli rectangulari sp
quorum areae sint a, b, c, et quae constructi p
brevius sit, si latus γ hypotenusam esse co

$$\log \sqrt{\frac{1}{\cos \gamma}} = \log \sqrt{\frac{1}{\cos \alpha}} + \log \sqrt{\frac{1}{\cos \beta}}. \text{ Quia}$$

$\cos\alpha = \frac{1 - \sin \frac{a}{4}}{1 + \sin \frac{a}{4}}$ est, oritur relatio

$$\log \sqrt{\frac{1 + \sin \frac{c}{4}}{1 - \sin \frac{c}{4}}} = \log \sqrt{\frac{1 + \sin}{1 - \sin}}$$

qua adhibita functione longitudinali hypoc

$$\mathcal{E}\left(\frac{c}{4}\right) = \mathcal{E}\left(\frac{a}{4}\right) + \mathcal{E}($$

e exprimit theorema Pythagoricum e P

hrift von C. Gudermann,

Tagen vor seinem Tode.

bern

indem ich einen Complex der Wahrheit übersehen werde
fehlenden Theilen der Mathematik eine Stütze zu
und muß, daß mir das Journal im achten 42. Bande, ist
in letzten Arbeiten der Herr Verfasser enthalten sein werden,
seinem werde, so würde es Ihnen vielleicht sehr angenehm
Gelegenheit gegeben sein zu lassen; die darüber Gelesen
Mittheilung sein in Rom gesehen werde; .....

Sphærici e datis lateribus et de Chiremate
Sphæricam evehendo

O. Monast Guestph.]

latera opposita sunt æqualia et cuius anguli interni
alterum sibi æqualem dividit in partes æquales et oblongum ..
oblongi $= a$, et latera duo sunt α et β, angulus

$$\frac{\sin C}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2} + \cos C}$$

$C = \cos\frac{a}{4}$ et $\cos C = -\sin\frac{a}{4}$ est, abit in

—,

putabis ipsius aream a, dummodo $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} < 1$,

æ ipsius diagonales nunc se normaliter in partes
ipsius latere a computabis ope formulæ

$\alpha < \frac{\pi}{2}$.

modo, quo in Planimetria, e datis oblongi sphærici

$= \alpha + \beta$, et in Sphærica geometrice reperiri
le

determinatam esse formulæ

$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\left[\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right]}$.

).

sphærici construuntur tria quadrata sphæræ
possunt, dummodo quodvis latus quadrante
censes, erit $\cos\gamma = \cos\alpha\cdot\cos\beta$, ideoque
via vero $\sin\frac{a}{4} = \operatorname{tang}^2\frac{1}{2}\alpha = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$, ideoque

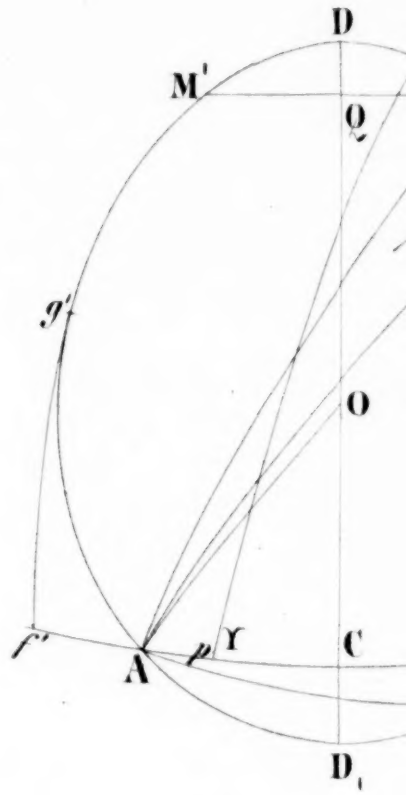
$$\frac{\sin\frac{a}{4}}{\sin\frac{a}{4}} + \log\sqrt{\frac{1+\sin\frac{b}{4}}{1-\sin\frac{b}{4}}},$$

Loxodromia eadem est ac

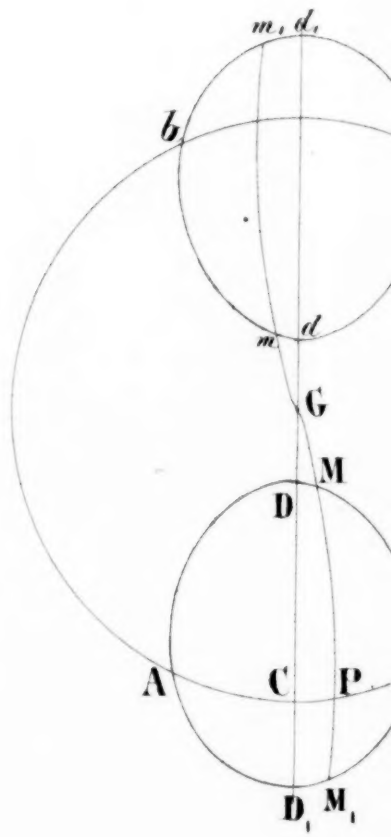
$\left(\frac{b}{4}\right)$,

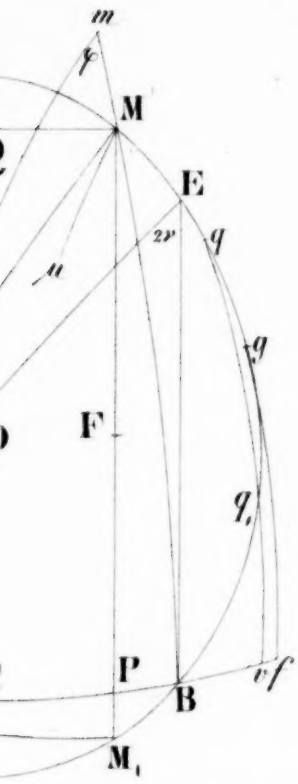
Planimetria in Sphæricam translatum.

1.



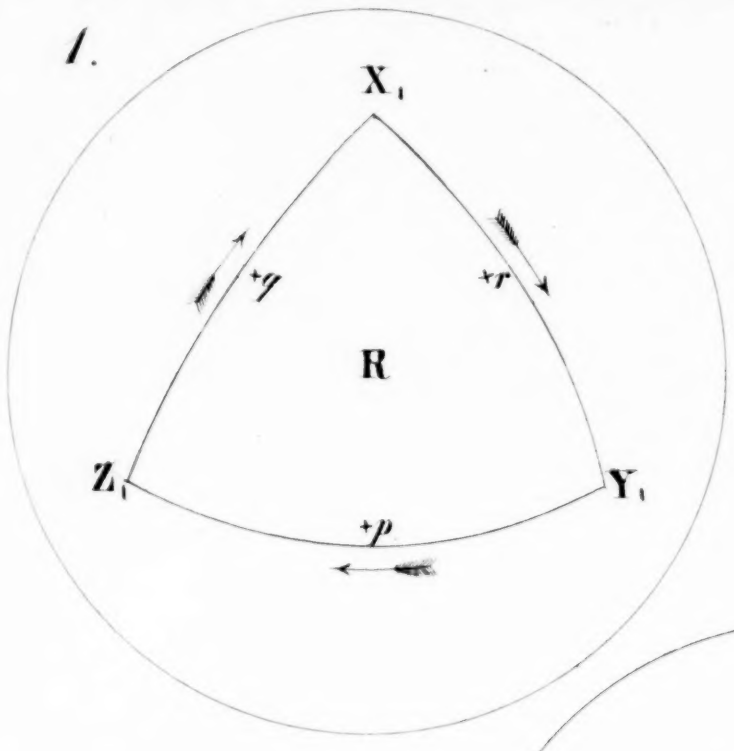
2.



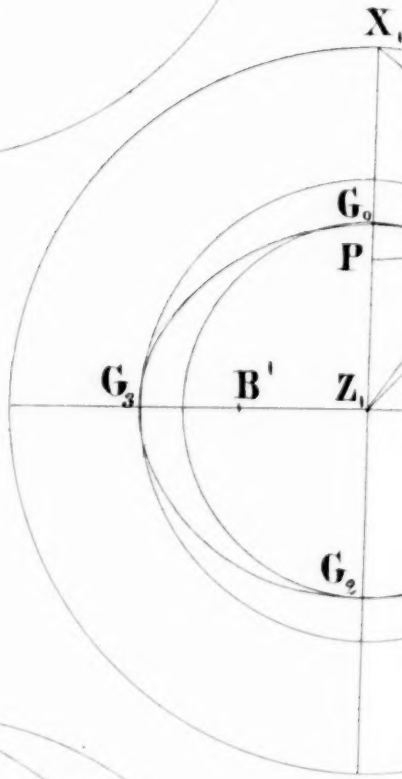

m
M
E
2v
q
u
q
F
q,
P
B
vf
M,

a
B

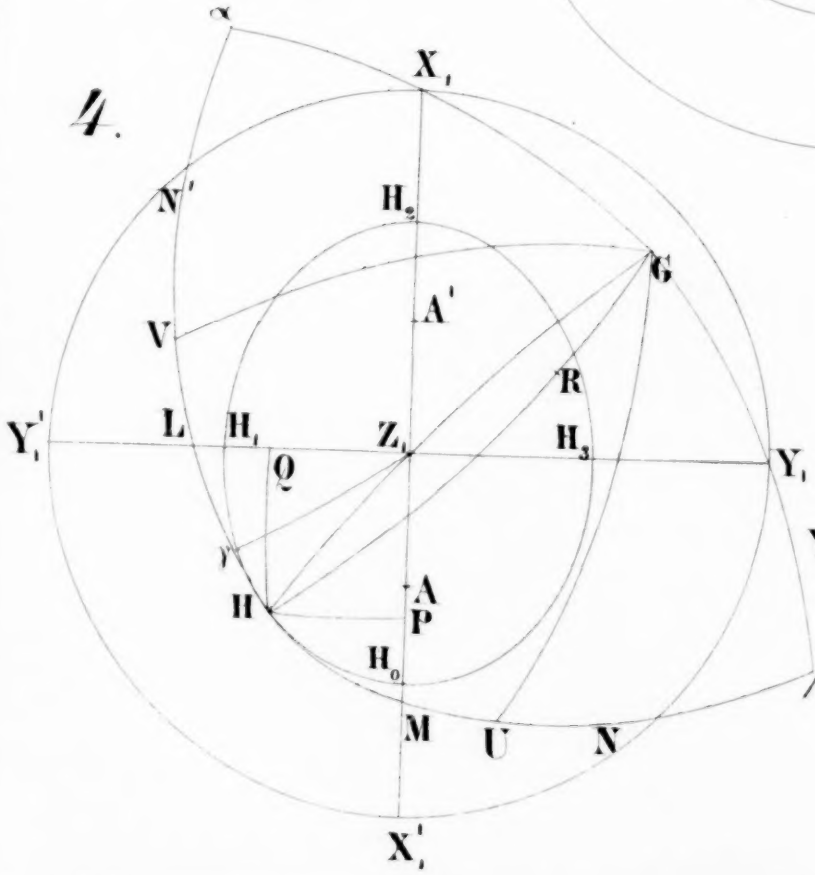
1.


X1
+q
+r
R
Z1
Y1
+p

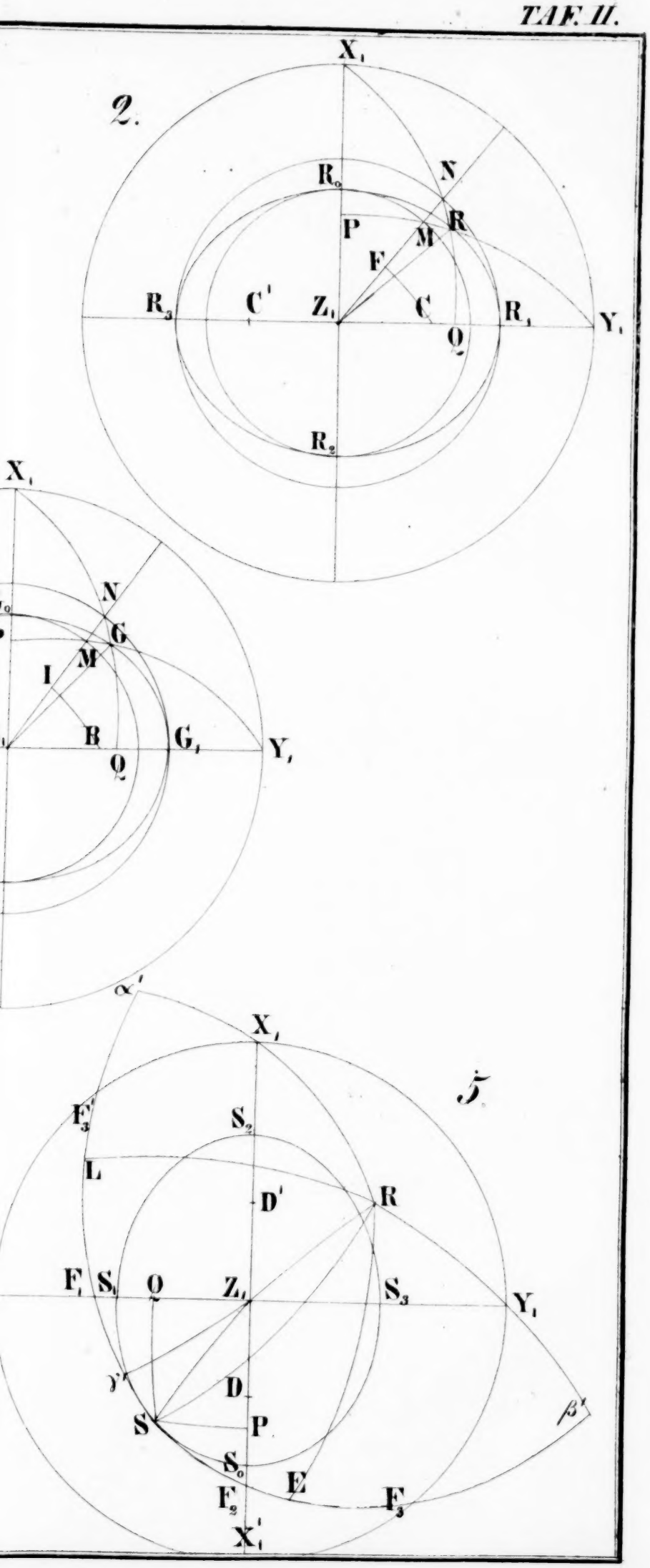
3.


X1
G0
P
G3
B'
Z1
G2

4.


X1
N'
H2
G
A'
V
R
Y'1
L
H1
Z1
H3
Y1
Q
γ
A
H
P
H0
β
M
U
N
X'1

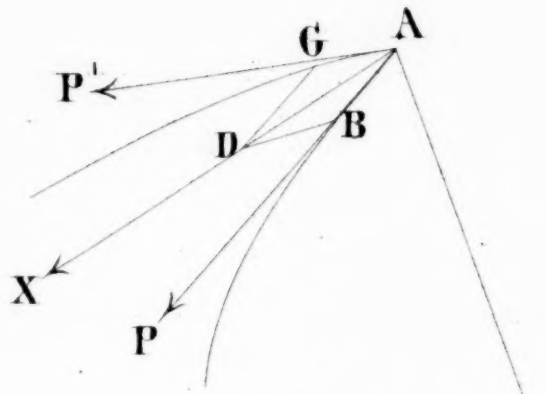
2.

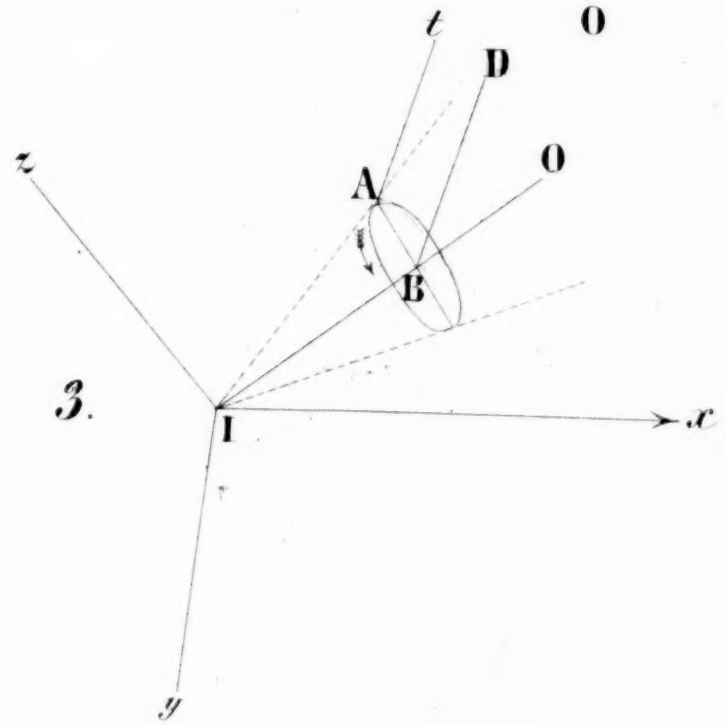

X1
R0
N
P
R
M
F
R3
C'
Z1
C
R1
Y1
Q
R2
X1
N
G
M
I
B
G1
Y1
Q

3.

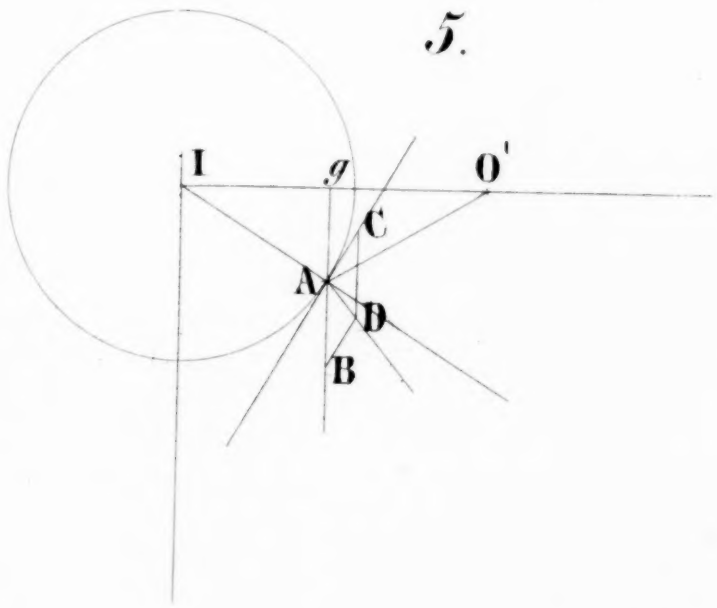
α'
X1
F3
S2
L
D'
R
F1
S1
Q
Z1
S3
Y1
γ'
D
β'
S
P
S0
E
F2
F3
X'1

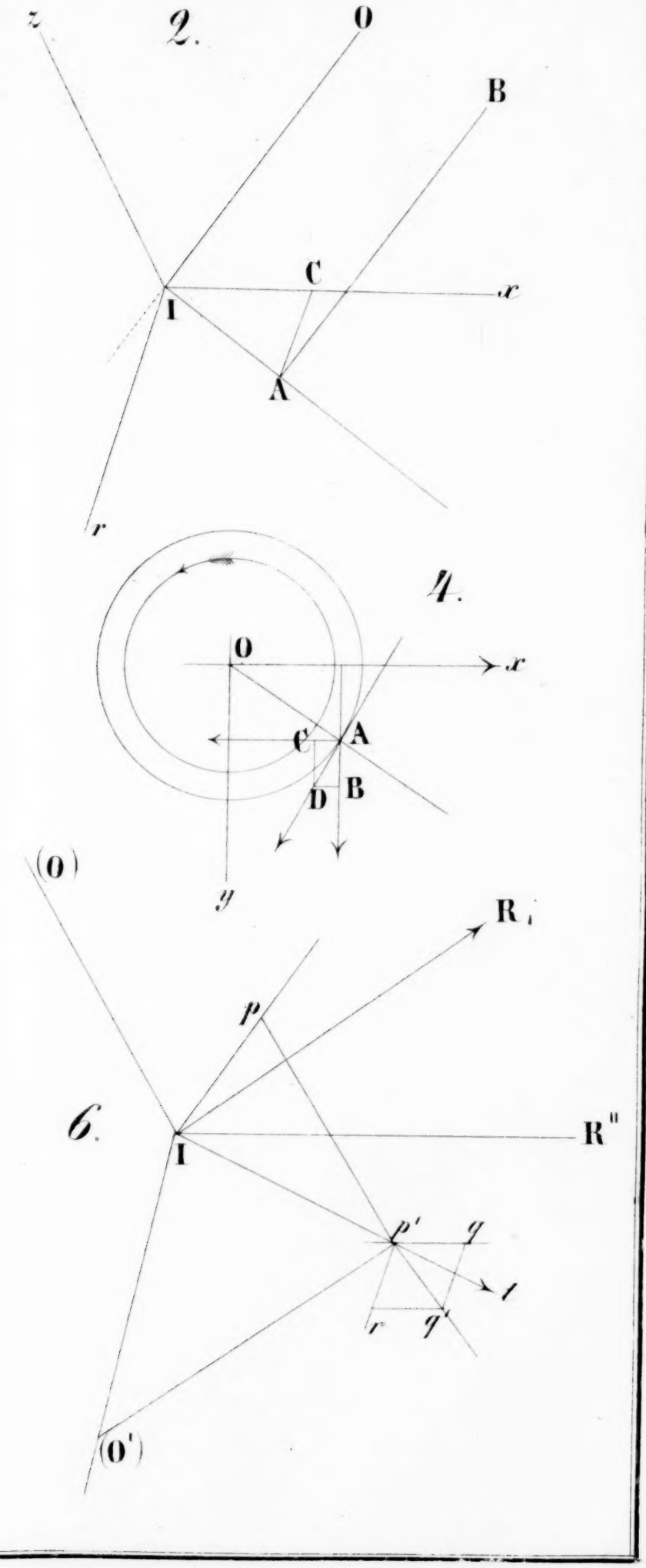
1.



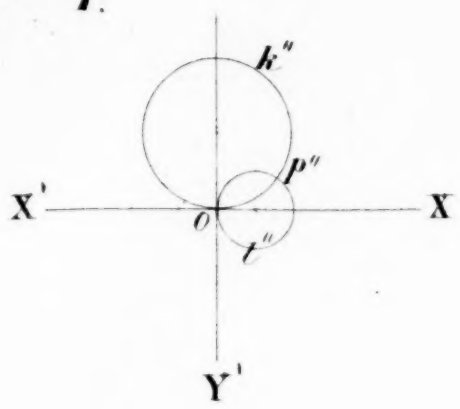


5.

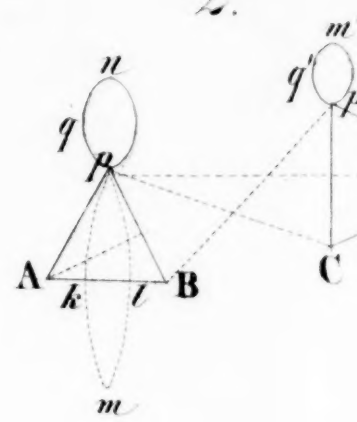



z
2.
O
B
C
x
I
A
r
4.
O
x
C
A
D
B
y
(O)
R'
p
6.
R''
I
p'
q
l
r
q'
(O')

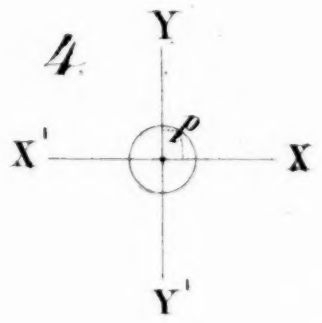
1.



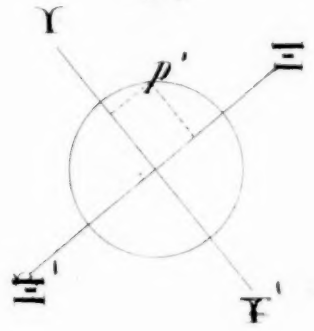
2.

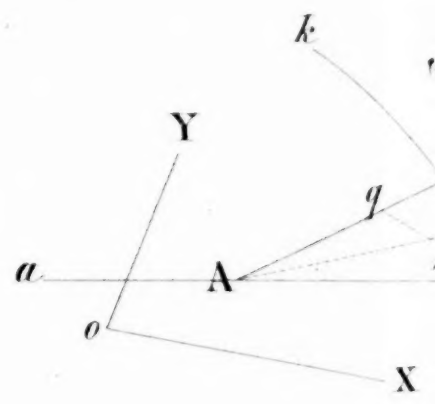


4.

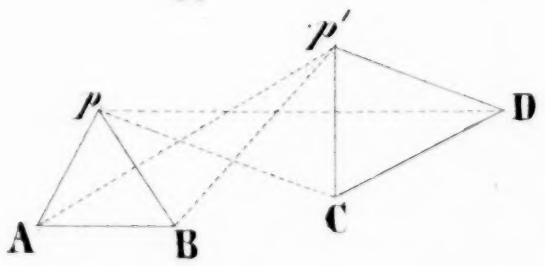


5.

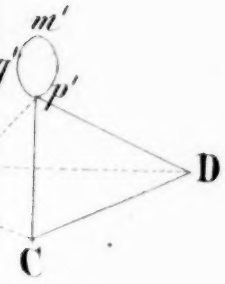




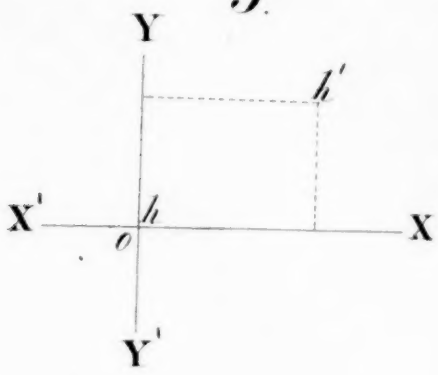
8.



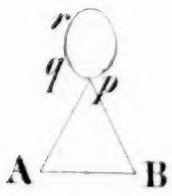
a



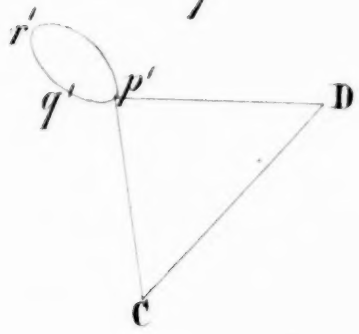
3.



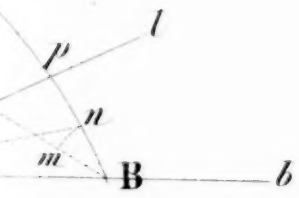
6.



7

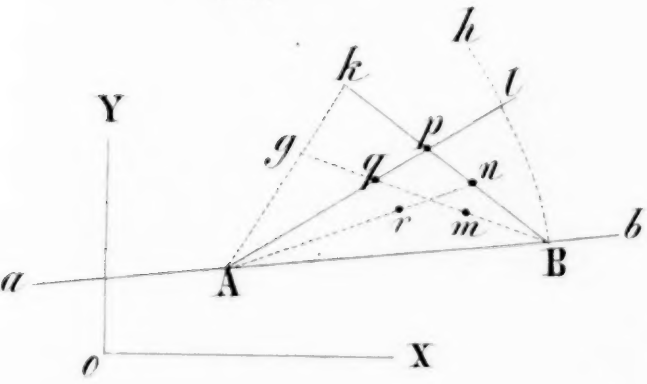


9.

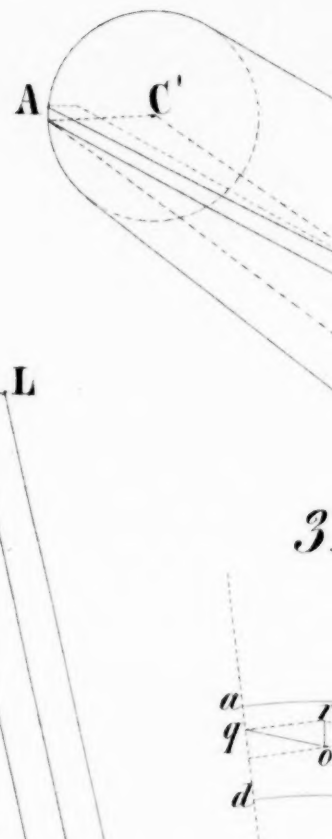


X

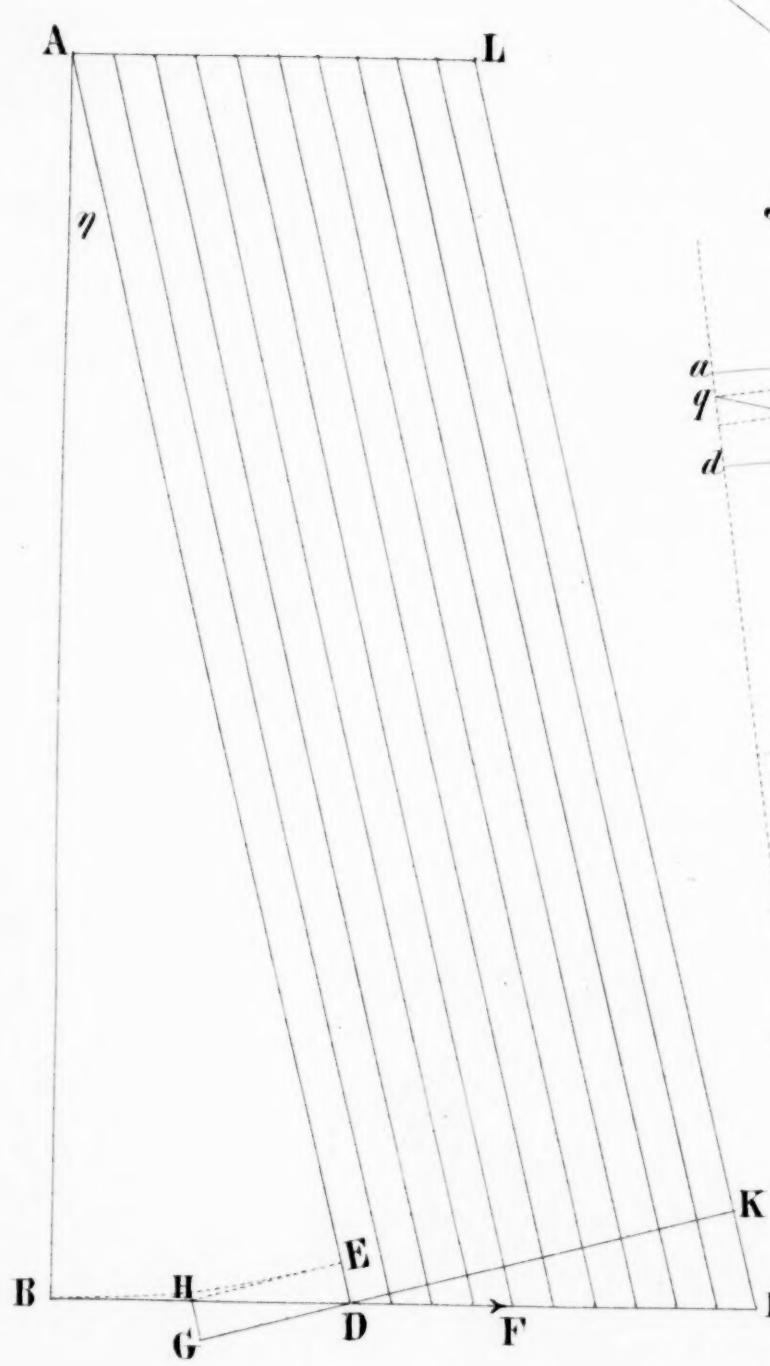
10.



1.

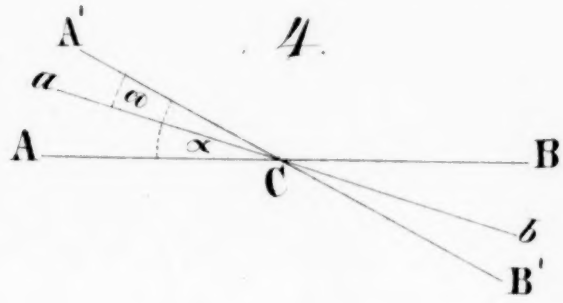


2.

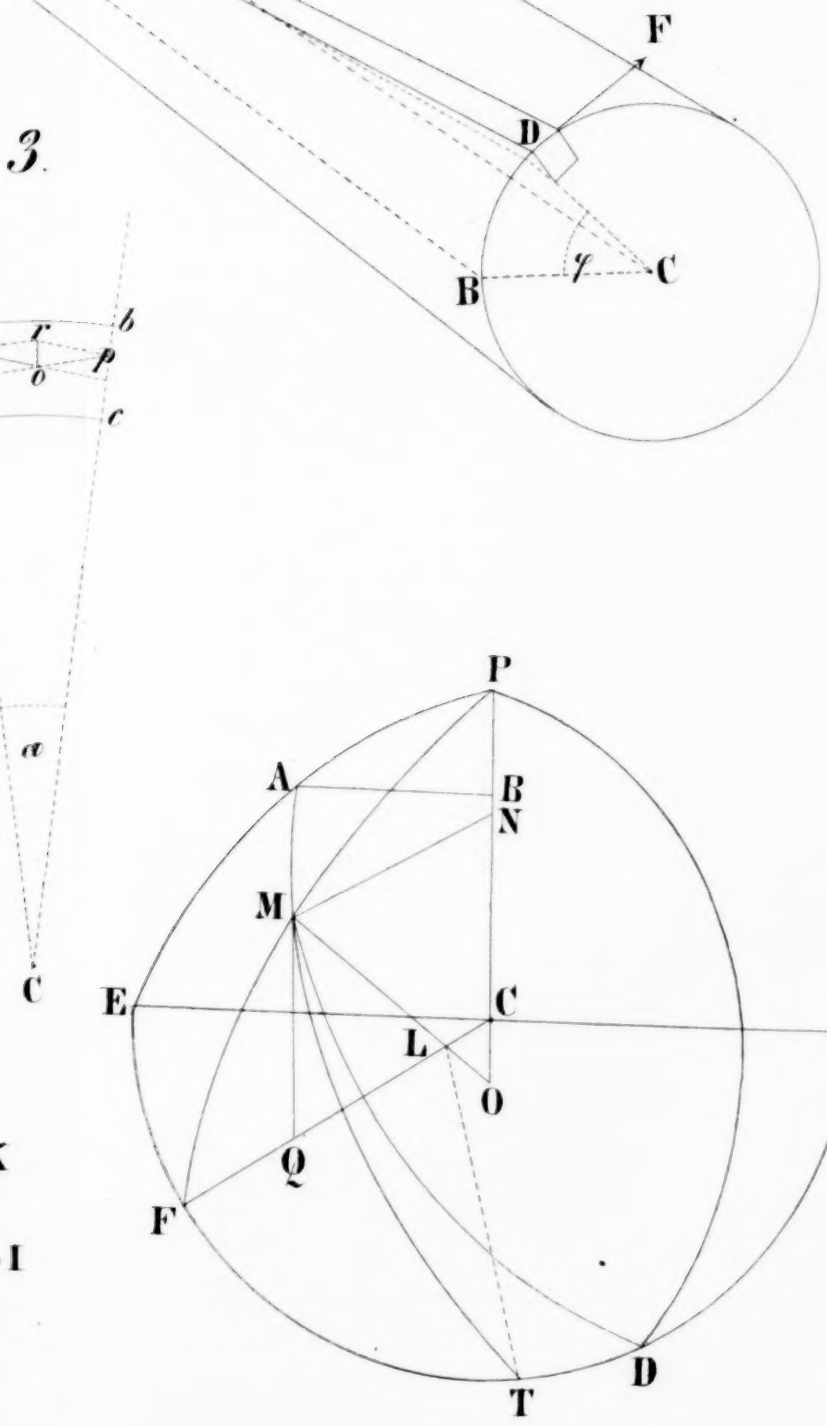


3.

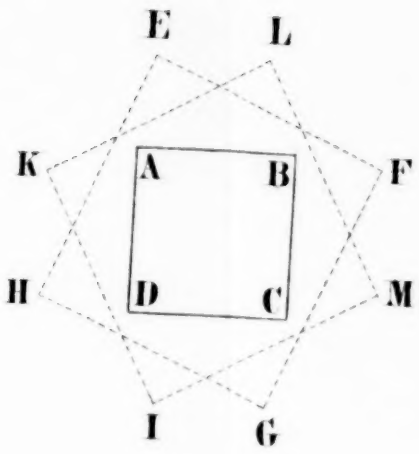
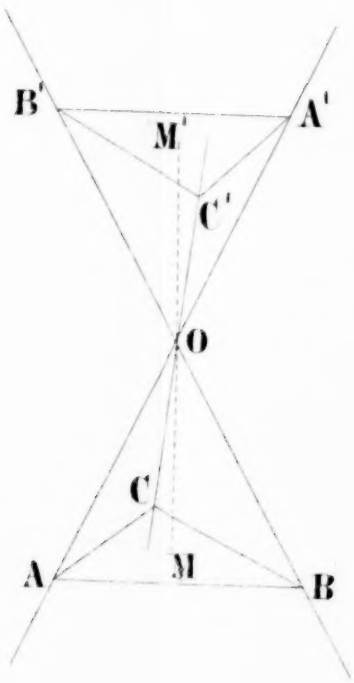
4.



3.



1.



2.